ESERCIZI SULL'OMOTOPIA

1) Sia X è uno spazio topologico. Si mostri che una mappa $f : \mathbf{S^1} \to X$, è omotopa a una mappa costante se e solo se f è la resistrizione di una opportuna mappa $g : D^2 \to X$.

2) Dimostrare che uno spazio X è contraibile se e solo se l'identità di X è omotopa ad una mappa costante.

3) Sia $f : \mathbf{S^n} \to \mathbf{S^n}$ una mappa priva di punti fissi. Si mostri che f è omotopa alla mappa antipodale $\alpha : \mathbf{S^n} \to \mathbf{S^n}$ definita da $\alpha(x) = -x$.

4) Sia X uno spazio qualunque e $f, g : X \to \mathbf{S^n}$ due mappe tali che $f(x) \neq -g(x)$, per ogni $x \in X$. Mostrare che f e g sono mappe omotope.

5) Siano N ed S due punti antipodali di $\mathbf{S^2}$, e sia $\overline{NS}$ il diametro che li unisce. Mostrare che $\mathbf{S^2}/_{N\equiv S} \simeq \mathbf{S^2} \cup \overline{NS}$, dove $\mathbf{S^2}/_{N\equiv S}$ è lo spazio ottenuto da $\mathbf{S^2}$ identificando N con S.

6) Dimostrare che se γ è una circonferenza in $\mathbf{R^3}$, allora $\mathbf{R^3} - \gamma \simeq \mathbf{S^2} \cup \overline{NS}$.