ESERCIZI SUL GRUPPO FONDAMENTALE e RIVESTIMENTI

1) Siano $P, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1}$ punti distinti del Toro. Trovare il gruppo fondamentale di $X = \mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1} - \{P\}$ e di $X_n = \mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1} - \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

2) Si calcoli il gruppo fondamentale di un grafo connesso in funzione del numero dei suoi vertici e dei suoi lati.

3) Si calcoli il gruppo fondamentale di $\mathbf{S^3} - \gamma$, dove γ è una circonferenza di $\mathbf{S}^3$ (suggerimento: pensare $\mathbf{S}^3$ come la compattificazione uno-punto di $\mathbb{R}^3$).

4) Sapendo che identificando a coppie i lati di un poligono di $2n$ lati si ottiene una supeficie chiusa, elencare tutte le possibili superficie che si possono ottenere identificando i lati di un ottagono ognuno col suo opposto (usare il teorema di classificazione delle superficie chiuse).

5) Sia X uno spazio connesso per archi e sia $\phi_a : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$ l'isomorfismo associato ad un arco a da x a y. Dimostrare che ϕ_a è indipendente da a se e solo se $\pi_1(X)$ è abeliano.

6) Sia $GL_2^+(\mathbb{R})$ l'insieme delle matrici reali di ordine 2 con determinante positivo. Usare il risultato del punto 7) degli esercizi sull'omotopia per dimostrare che il gruppo fondamentale di $GL_2^+(\mathbb{R})$ è $\mathbb{Z}$.

7) Sia X uno spazio connesso per archi e localmente connesso per archi. Se $\pi_1(X)$ è finito, allora ogni mappa $X \to \mathbf{S^1}$ è nullomotopa (suggerimento: usare il rivestimento universale $\mathbb{R} \to \mathbf{S^1}$).

8) Trovare tutti i rivestimenti connessi con 2-fogli o con 3-fogli di $\mathbf{S^1} \vee \mathbf{S^1}$, a meno di isomorfismi di rivestimenti senza punti base.