ESERCIZI SUL GRUPPO FONDAMENTALE

1) Siano $P, P_1, P_2, \dots, P_n \in \mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1}$ punti distinti del Toro. Trovare il gruppo fondamentale di $X = \mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1} - \{P\}$ e di $X_n = \mathbf{S^1} \times \mathbf{S^1} - \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$.

2) Si calcoli il gruppo fondamentale dello spazio del topo: l'unione puntata di una sfera e due circonferenze.

3) Si calcoli il gruppo fondamentale di un grafo connesso in funzione del numero dei suoi vertici e dei suoi lati.

4) Sia r una retta di $\mathbf{R^3}$ e γ una circonferenza centrata in r e senza punti in comune con essa. Si calcoli il gruppo fondamentale dello spazio $X = \mathbf{R^3} - r - \gamma$ (suggerimento: si trovi un opportuno sottospazio di $\mathbf{R^3}$ che sia un retratto forte per deformazione di X).

5) Si calcoli il gruppo fondamentale di $\mathbf{S^3} - \gamma$, dove γ è una circonferenza di $\mathbf{R^3}$ e $\mathbf{S^3} = \mathbf{R^3} \cup \{\infty\}$ è la compattificazione uno-punto di $\mathbf{R^3}$.

6) Sapendo che identificando a coppie i lati di un poligono di $2n$ lati si ottiene una supeficie chiusa, elencare tutte le possibili superficie che si possono ottenere identificando i lati di un ottagono ognuno col suo opposto (usare il teorema di classificazione delle superficie chiuse).

7) Sia X uno spazio connesso per archi e sia $\phi_a : \pi_1(X, x) \to \pi_1(X, y)$ l'isomorfismo associato ad un arco a da x a y. Dimostrare che ϕ_a è indipendente da a se e solo se $\pi_1(X)$ è abeliano.