TEOR – Sia $\dim V = n$. Allora

1) Se $X \subset V$ è lin. indipendente, allora X ha k elementi, con $k \leq n$ (e se ne ha proprio n, allora è una base.

2) Se $Y \subset V$ è un sistema di generatori di V, allora ha h elementi, con $h \geq n$ (e se ne ha proprio n, allora è una base)

Se risulta valida l'implicazione $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, allora è valida anche la contronominale

$$(\neg \mathcal{B}) \Rightarrow (\neg \mathcal{A})$$

non

Sia $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ una base ordinata di V. Allora $\forall v \in V$ esiste ed è unica la n-pla di scalari $(x_1, \dots, x_n)$ tale che

componenti di v rispetto a $\mathcal{B}$

$$v_{=\mathcal{B}} = (x_1, \dots, x_n) \qquad v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

ESEMPI –

In $\mathbb{R}^3$ c'è una bellissima base:

$$\mathcal{B}_{nat} = \big((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\big).$$

Ma ci sono infinite altre basi (tutte di 3 elementi).

$(1,5,0)$, $(2,1,0)$, $(1,1,1)$ è una base di $\mathbb{R}^3$?

TRUCCONE metto in matrice (in colonna)

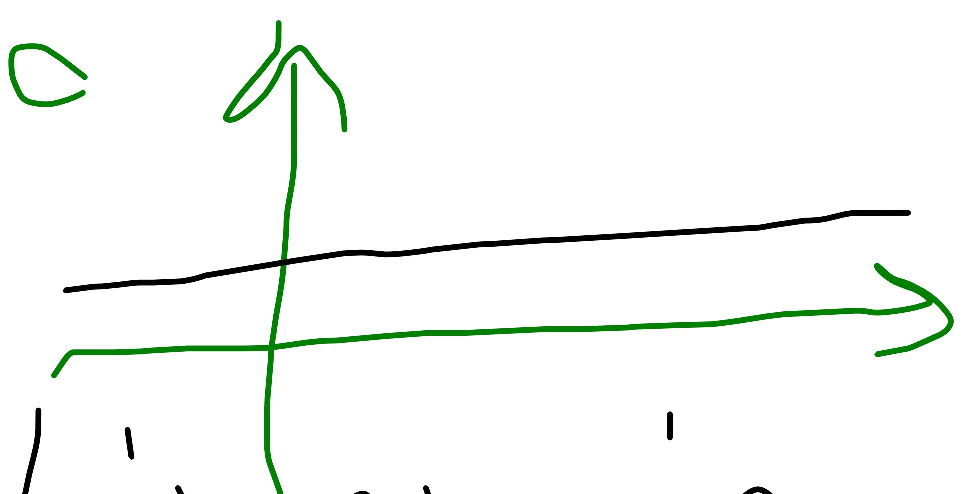
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

allora i 3 vettori sono lin. indip. in $\mathbb{R}^3$ (che ha dim $= 3$) perciò formano una base.

$V = \{$ polinomi a coeff. reali, in x, di grado $\leq 2 \}$

Una base $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$

è il polinomio costante 1



Per esempio il polinomio p definito da $p(x) = 3 + 2x + x^2$ ha, rispetto a $\mathcal{B}$, componenti $(3, 2, 1)$, infatti $p(x) = 3 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2$

Ma anche $\mathcal{B}' = (1, 1+x, 1+x+x^2)$ è una base di V. Lo stesso polinomio p di prima ha, rispetto a $\mathcal{B}'$, altre componenti: $(1,1,1)$, infatti

$$p(x) = 3 + 2x + x^2 = 1 \cdot 1 + 1(1+x) + 1(1+x+x^2)$$

$$p \equiv_{\mathcal{B}} (3,2,1)$$

$$\equiv_{\mathcal{B}'} (1,1,1)$$

NOTA - Date due basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ di una stessa sp. vett. se ho le componenti $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ di un certo $v \in V$, posso ottenere le sue componenti $\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{B}'$, usando la matrice E del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ in questo modo:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

PROP. La matrice E ha come colonne le n-ple di componenti dei vettori di $\mathcal{B}$ rispetto a $\mathcal{B}'$.

Dati spazi vettoriali V, W chiamo Trasformazione lineare ogni applicazione $T : V \longrightarrow W$ tale che, $\forall\, v, v' \in V$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$

somma in V — somma in W

1) $T(v+v') = T(v) + T(v')$

2) $T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v)$

prodotto in V per scalare — prodotto in W per scalare

Operatore lineare su V: una trasformazione lineare da V a se stesso

---

Isomorfismo da V a W: una trasformazione lineare biiettiva (quindi invertibile)

Automorfismo di V: un operatore lineare biiettivo.

ESEMPI

1) V qualsiasi $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato

$$T : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto \alpha \cdot v$$

operatore lineare, automorfismo se $\alpha \neq 0$

2) $V = \{$segmenti del piano, con un estremo in $N\}$

$$T : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto T(v) =$$ segmento v ruotato attorno ad N di $30°$ in senso antiorario

automorfismo

3) $V = \{$ segmenti dello spazio con un estremo in $M\}$

Π un piano passante per M

$$T : V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto T(v) =$$ proiezione ortogonale di v su Π

operatore lineare

4) $V = \{\text{successioni convergenti}\}$

$$T : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a_1, a_2, \dots) \longmapsto \lim_{n \to \infty} a_n$$

5) $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ammette derivate di ogni ordine}\}$

$$T : V \longrightarrow V$$

$$f \longmapsto f'$$

6) $V = \{$forze applicate in un punto M dello spazio$\}$

$W = \{$segmenti dello spazio con un estremo in $M\}$,

$$T: V \longrightarrow W$$
$$\vec{f} \longmapsto$$ è il segmento che ha direzione e verso di $\vec{f}$, e lunghezza in cm uguale alla intensità in Newton di $\vec{f}$

isomorfismo

7) V sp. vettoriale ; $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ($\dim V = n$)

base ordinata di V

$$T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Phi_{\mathcal{B}} \quad v \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$ delle componenti di v rispetto a $\mathcal{B}$

isomorfismo

8) $V = \mathbb{R}^n$ $W = \mathbb{R}^m$

$A \in M_{m \times n}$ matrice fissata

$$T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è lineare

$T: V \longrightarrow W$ lineare

Nucleo di T $\quad Ker\,T = \{ v \in V \mid T(v) = \overline{0}_W \}$

Immagine di T $\quad Im\,T = \{ w \in W \mid \exists\, v \in V$ per cui $w = T(v) \}$

PROP - $Ker\,T$ è un sottospazio vettoriale di V

PROP - $Im\,T$ è un sottospazio vettoriale di W

PROP - T risulta essere iniettiva $\iff Ker\,T = \{ \overline{0}_V \}$

PROP- T risulta essere suriettiva $\iff \operatorname{Im} T = W$

PROP- Se $\dim V = n$, allora

$$\dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = n$$

PROP- Se T è un isomorfismo, allora T trasforma

insiemi lin. ind. di V in insiemi lin. ind. di W
insiemi lin. dip. di V in insiemi lin. dip. di W
sistemi di gen. di V in sist. di gen. di W
basi di V in basi di W
sottospazi di V di dim $= h$ in sottospazi di W di dim $= h$

$\dim V = n \quad \dim W = m$

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base di V, $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_m)$ base di W

$T : V \longrightarrow W$ lineare

Chiamo matrice associata a T rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ la matrice (chiamata $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)$) la cui i-esima colonna è la m-pla di componenti di $T(e_i)$

PROP - Sia $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)$. Sia $v \in V$ $v \equiv_{\mathcal{B}} (x_1, \dots, x_n)$. Allora per $T(v) \in W$ $T(v) \equiv_{\mathcal{B}'} (y_1, \dots, y_m)$ vale
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ESEMPI

$V = \{\text{pol. di gr.} \leq 3\}$ $\qquad$ $W = \{\text{pol. di gr.} \leq 2\}$

$\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$ $\qquad$ $\mathcal{B}' = (1, x, x^2)$

$$T : V \longrightarrow W$$
$$p \longmapsto 3p' - 2p''$$

Costruisco $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)$

$$T(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \equiv_{\mathcal{B}'} (0, 0, 0)$$
$$T(x) = 3 = 3 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \equiv_{\mathcal{B}'} (3, 0, 0)$$
$$T(x^2) = 6x - 4 = 4 \cdot 1 + 6 \cdot x + 0\, x^2 \equiv_{\mathcal{B}'} (-4, 6, 0)$$
$$T(x^3) = 9x^2 - 12x = 0 \cdot 1 - 12 \cdot x + 9x^2 \equiv_{\mathcal{B}'} (0, -12, 9)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Per esempio voglio sapere chi è il polinomio $T(p)$ dove $p(x) = -2 + 6x - x^3$

$p = -2 \cdot 1 + 6x + 0x^2 + (-1)x^3 \equiv_{\mathcal{B}_3} (-2, 6, 0, -1)$

Allora

$$T(p) \equiv_{\mathcal{B}_3'} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$$

perciò

$$T(p) = 18 + 12x - 9x^2$$

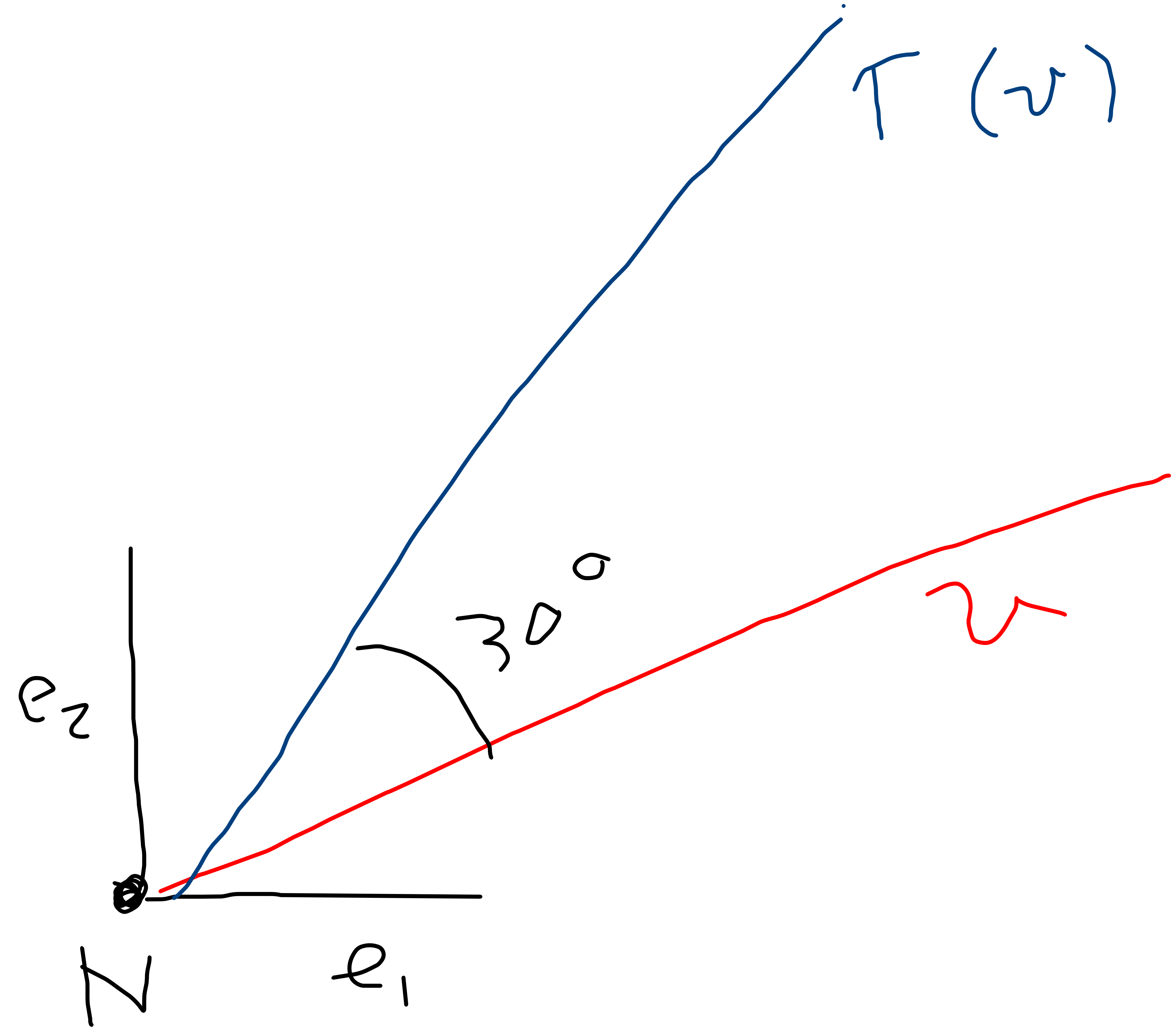
Normalmente, se $W = V$ si usa la stessa base in V e in W. Allora scriveremo $M_{\mathcal{B}}(T)$ per $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T)$

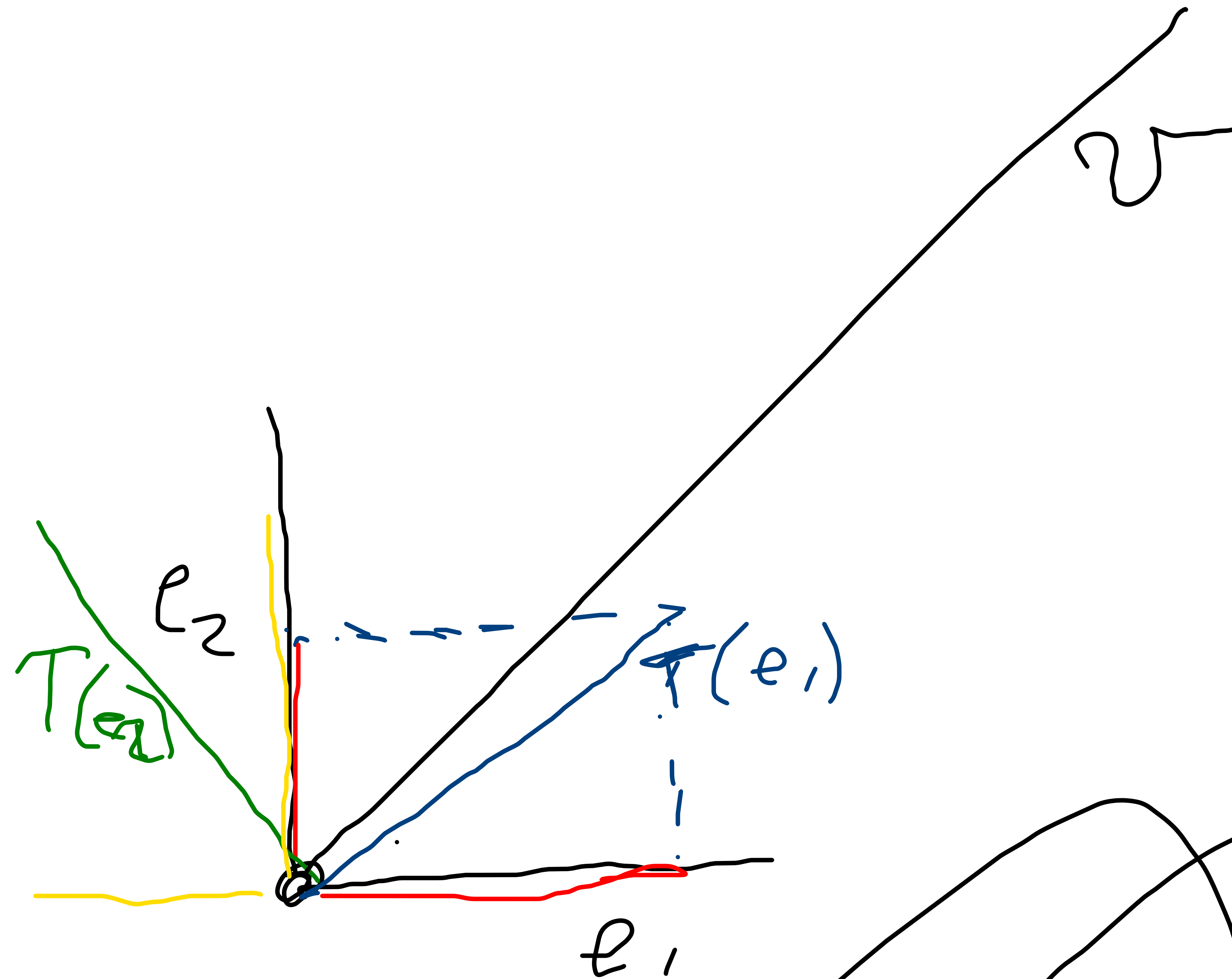
ESEMPIO –

$V = W = \{$ segmenti di questo piano con un estremo in N $\}$

$T : V \longrightarrow V$ rotazione di $30°$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$





$$T(e_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} e_1 + \frac{1}{2} e_2 \equiv_{\mathcal{B}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$T(e_2) = -\frac{1}{2} e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 \equiv_{\mathcal{B}} \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$M(T) = A =_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$v \equiv_{\mathcal{B}} (x, y) = x e_1 + y e_2 \qquad T(v) \equiv_{\mathcal{B}} A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE

Un operatore lineare T su V, rispetto a una base $\mathcal{B}$ sarà rappresentato da una matrice quadrata A.

Sì, ma rispetto a un'altra base $\mathcal{B}'$ lo stesso T sarà rappresentato da una diversa matrice A'.

Che rapporto c'è fra A ed A'?

$A, A' \in M_n$ si dicono <u>simili</u> se rappresentano uno stesso operatore lineare rispetto a basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

PROP – A simile ad A'

$$\Updownarrow$$

$\exists E \in M_n$, con $\det E \neq 0$, tale che

$$A' = E^{-1} \cdot A \cdot E$$

è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

PROP-

A simile ad $A' \Longrightarrow \det A = \det A'$

A simile ad $A' \Longrightarrow \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} A'$

$\sum_{i=1}^{n} a'_{ii}$

A simile ad $A' \Longrightarrow$ rango di A = rango di A'

Rango di $A \in M_{m \times n}$: $r(A)$ massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A.

PROP - $r(A) = r({}^tA)$

COR - $r(A)$ = max numero di righe lin. indip. di A

PROP - Se $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(T)$ allora $r(A) = \dim \operatorname{Im} T$

COR - $\dim \operatorname{Ker} T = n - r(A)$

Data $A \in M_{m \times n}$, chiamo minore ogni sottomatrice quadrata ottenuta intersecando k righe con k colonne di A.

Dato un minore M di A, di ordine k, chiamo orlato di M ogni minore M' di ordine $k+1$ dentro a cui ci sia M stesso.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

TEOR (Kronecker)

$$r(A) = k$$

$$\Updownarrow$$

1) $\exists$ minore M di ordine k con $\det M \neq 0$

e 2) tutti gli orlati di M hanno $\det = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det M = 1 \neq 0$$

$$2 \leq r(A) \leq 4$$

$$|O_1| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|O_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_3| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_4| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_5| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$|O_6| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$r_A = 2$$

Sistema lineare

$$S:\begin{cases} a^1_1 x_1 + \dots + a^1_n x_n = b_1 \\ \dots\dots \\ a^m_1 x_1 + \dots + a^m_n x_n = b_m \end{cases}$$

<u>Soluzione</u> di S (se c'è) è ogni n-pla $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ che, sostituita ad $(x_1, \dots, x_n)$ soddisfa le uguaglianze

POSSIBILITÀ:

nessuna soluzione — sistema impossibile

esattamente una soluzione — sistema possibile e determinato

∞^k soluzioni — sistema possibile e indeterminato

le soluzioni dipendono da k parametri

$$A = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \hline a^m_1 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}$$

matrice incompleta

$$C = \begin{pmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n & b_1 \\ \hline a^m_1 & \cdots & a^m_n & b_m \end{pmatrix}$$

matrice completa

TEOR (Rouché-Capelli)

S è possibile $\iff r(C) = r(A)$

In tal caso S ammette $\infty^{n-\overset{r(C)}{r(A)}}$ soluzioni

$(\infty^0 = 1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$