“Moebius”: un film e un invito alla topologia

Massimo Ferri

Dip. di Matematica, Univ. di Bologna
Piazza di Porta S. Donato, 5
I-40126 Bologna Italia
ferri@dm.unibo.it

1 Introduzione

Il film “Moebius” (v. Figura 1) presenta diversi spunti di interesse. Innanzi tutto fu concepito come un grande esercizio cinematografico nell’ambito dell’attività della Universidad del Cine di Buenos Aires; come tale venne realizzato con un investimento finanziario assai ridotto: circa 250.000 dollari. Tuttavia ottenne un successo di pubblico non indifferente ed una distribuzione internazionale. Inoltre utilizza coraggiosamente concetti e termini ostici per il grande pubblico: quelli della *topologia* (regolarmente confusa con la *topografia* dai recensori!). Infine si colloca in un genere difficilmente definibile, suggerendo più livelli di lettura.

In questo articolo mi occuperò quasi solo degli aspetti matematici toccati dal film, cercando di espandere, in termini assolutamente non tecnici, gli elementi che possono aver sollecitato la fantasia degli autori.

2 Il film

Realizzato nel 1996 per la regia del Prof. Gustavo Mosquera, “Moebius” si ispira ad un racconto di un astronomo americano, A. J. Deutsch [2]. La trama vede un matematico, più precisamente un topologo, impegnato a risolvere il mistero della scomparsa di un treno della metropolitana. Il racconto ha già contorni più fantastici che fantascientifici; questa tendenza si accentua, naturalmente, nelle mani di un sudamericano: la realizzazione cinematografica presenta i toni sfumati ed onirici di un García Marquez piuttosto che le lucide fantasie di un Borges (al quale ci sono espliciti omaggi nel film). Al di là della sola tradizione letteraria, nella trascrizione del racconto si aggiunge un elemento strettamente argentino. Dice lo stesso Mosquera: “Incominciai a riscrivere il testo sostituendo al nome delle stazioni sotterranee quello di alcune stazioni che già esistevano a Buenos Aires [...]. In questo modo però tutto cominciò ad acquistare un significato speciale [...], il cambiamento dei luoghi era piuttosto semplice se lo si confrontava con il profondo cambiamento di significato che risultava dal solo immaginare i dialoghi possibili intorno alla sparizione di un treno con della gente ... proprio in un paese in cui si erano appena avute tante persone scomparse per motivi politici" [8].

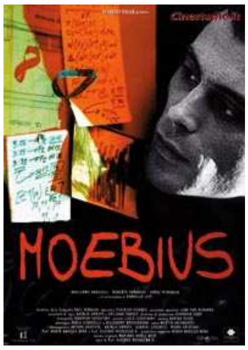

Figura 1. La locandina del film "Moebius".

Il riferimento è chiaramente allo sconcertante fenomeno dei "desaparecidos": almeno 12.000 persone rapite e mai più restituite dal regime autoritario argentino fra il 1976 ed il 1983, oltre a molte altre migliaia di cui furono consegnate le salme. Nel film ci sono indizi espliciti che fanno riferimento a questo livello di lettura.

Tuttavia il livello più evidente è quello fantastico. Nonostante si faccia riferimento alla topologia della rete metropolitana ed in particolare (importando un errore già presente nel racconto) ad una "singolarità" di un nastro di Moebius, non c'è mai la pretesa di (pseudo)scientificità della fantascienza. La topologia compare quasi come una sorta di trampolino con cui la mente si possa lanciare al di là dell'esperienza quotidiana, identificata con la geometria dell'esperienza materiale.

Ma il nastro di Moebius è effettivamente un oggetto "fuori dal nostro mondo"? Prima di tutto: che cos'è un nastro di Moebius? Quali sono i suoi aspetti matematici che possano risultare così inconsueti da rasentare il fantastico? È un fenomeno isolato o si trova all'interno di una famiglia di oggetti topologicamente interessanti? Queste sono le domande a cui cercherò di rispondere nei prossimi paragrafi. Avviso fin d'ora che non darò definizioni ed enunciati precisi, riservandomi di citare nel § 7 i termini a cui far riferimento per uno studio vero e proprio. Questo articolo è esclusivamente un invito alla topologia, certo non un articolo *di* topologia.

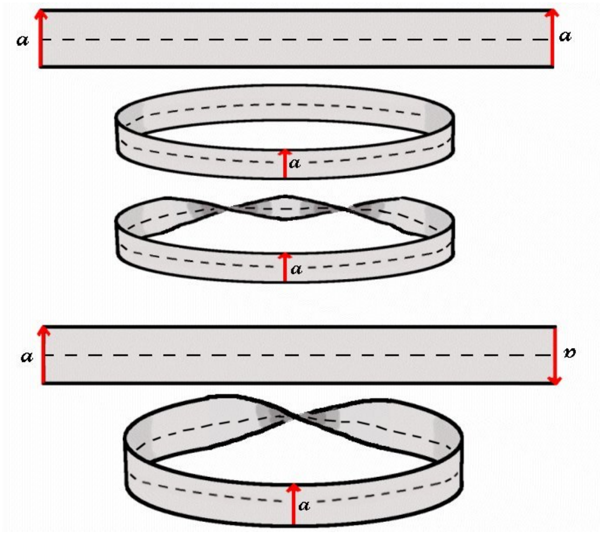

Figura 2. Costruzione di tronchi di cilindro e del nastro di Moebius.

3 Il nastro di Moebius

È facilissimo costruire un nastro di Moebius; prima però cominciamo con qualcosa di più abituale. Prendiamo una striscia rettangolare di tela; ci sono diversi modi di cucire insieme due suoi lati. Il più semplice (quello che adotteremmo per formare con la striscia una cintura) dà luogo ad una figura familiare: un cilindro. (Più propriamente è quello che in geometria analitica è chiamato *tronco* di cilindro; in geometria solida è la *superficie laterale* di un cilindro). Questa costruzione è indicata nella parte superiore della Figura 2 dalle due frecce verticali: esse devono essere identificate (cucite insieme) rispettando il verso delle frecce. Si noti che, come ci aspettiamo, il bordo del cilindro così costruito è formato da due curve separate; inoltre, proprio come una normale cintura, ha due facce: una interna ed una esterna. Notiamo subito una differenza essenziale rispetto alla geometria a cui siamo abituati: qui non si parla di un cilindro rigido, ma di un oggetto che possiamo pensare di deformare anche curvando segmenti, modificando aree ecc. Nel § 4 lo stireremo addirittura su un piano!

Ma noi siamo interessati ad un'altra costruzione. Invece che identificare i due lati “direttamente” come prima, eseguiamo prima una torsione di mezzo giro, rovesciando uno dei due lati, come nella parte inferiore della Figura 2; questo è indicato anche questa volta dal verso delle frecce (si noti la freccia di destra, rovesciata rispetto a prima). Abbiamo costruito un modello concreto di nastro di Moebius. La prima differenza notevole consiste nel bordo: ora è costituito da una sola curva. La seconda rilevante differenza rispetto al cilindro consiste nel fatto che il nastro di Moebius ha una sola faccia: si può passare da una parte all'altra del nastro senza attraversare il bordo. Questa proprietà è splendidamente raffigurata da una stampa di M.C. Escher: "Band van Möbius II" simpaticamente parodiata in un logo dell'Università del Maryland, riprodotto nella Figura 3; ne riparleremo nel § 5. Si noti anche un'altra peculiarità che nel film risulta travisata: è vero che una tartaruga che percorra il nastro si trova al punto di partenza, ma dall'altra parte della superficie, e quindi e quindi "è lì ma non è lì" come il treno scomparso del film. Però dopo un ulteriore giro (in generale dopo un numero pari di giri) si ritroverà al punto di partenza e dalla stessa parte!

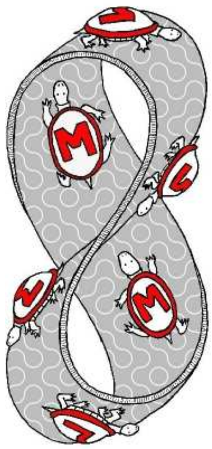

Figura 3. Tartarughe che percorrono un nastro di Moebius

Un cenno storico: il nome tradizionalmente attribuito a questo oggetto deriva dall'astronomo e matematico tedesco August Ferdinand Moebius (Schulpforta 1790 – Lipsia 1868; grafia equivalente: Möbius), che lo ideò nel 1858 e lo descrisse in una pubblicazione del 1865 [7]. Tuttavia lo stesso oggetto era stato studiato precedentemente da un altro matematico tedesco: Johann Benedikt Listing (Frankfurt am Main 1808 – Göttingen 1882) [6].

4 Sviluppo ed immersione

La Figura 2 mostra i due principali artifici con cui i topologi usualmente si raffigurano una superficie: lo sviluppo e l'immersione. Lo sviluppo consiste nel rappresentare un oggetto partendo da una figura facilmente concepibile e immaginando identificazioni di alcune sue parti: per esempio partendo da un poligono con istruzioni di incollamento (come nella maggior parte delle confezioni di cartone), ma anche da oggetti tridimensionali (v. § 6). Questo procedimento è molto comodo ed è comunque basato su una matematica rigorosa.

L’immersione è forse più naturale, ma più scomoda: consiste nel raffigurare l’oggetto in questione in uno spazio più “grande”: per esempio il nostro spazio euclideo tridimensionale.

Lo sviluppo permette di apprezzare le proprietà intrinseche dell’oggetto che si vuole studiare, senza confonderle con il modo in cui possiamo disporlo in uno spazio ambiente. Quando un topologo lavora sullo sviluppo di una superficie, pensa un po’ nei termini di un abitante della Flatlandia immaginata da Abbott [1], cioè come se non esistesse una terza dimensione. Possiamo immaginare il cilindro aperto e spianato in un rettangolo come nella parte superiore della Figura 2; allora possiamo pensare di strisciare lungo il rettangolo fino a raggiungere la freccia che lo delimita a sinistra; a quel punto possiamo oltrepassarla, ma rientrando subito attraverso la freccia che ne costituisce il lato destro.

L’immersione (la “cintura” che troviamo subito sotto nella Figura 2) è senz’altro più naturale ma, per esempio, non ci permette di vedere tutta la superficie senza che una parte venga nascosta dietro ad un’altra. Inoltre c’è un altro problema: ci possono essere diverse immersioni, non equivalenti fra loro, dello stesso oggetto. Finora, infatti, non abbiamo ancora parlato del terzo oggetto dall’alto nella Figura 2. Ne possiamo costruire un modello partendo al solito da una striscia di tela e torcendola, questa volta, di un giro intero prima di cucire insieme i due lati indicati dalla freccia; per intenderci, l’omino piatto di Flatlandia non si accorgerebbe della differenza: la topologia è la stessa che otterremmo senza torcere la fascia.

Noi, che viviamo nello spazio euclideo tridimensionale, vediamo invece una differenza notevole fra le due immersioni: infatti le due curve che formano il bordo sono allacciate fra di loro come anelli di una catena, se operiamo la torsione di un giro, mentre non lo sono se non torciamo: ce ne possiamo rendere conto se tagliamo la fascia lungo la linea tratteggiata. (A proposito, riesce il lettore ad immaginare che cosa succede se si taglia lungo la linea tratteggiata un nastro di Moebius?) Dal punto di vista intrinseco dell’omino piatto, ci sono due sole possibilità di identificazione dei lati verticali della striscia: con le frecce rivolte dalla stessa parte (entrambe in su, o equivalentemente entrambe in giù), oppure con le frecce rivolte da parti opposte (una in su e l’altra in giù). Nel nostro spazio, invece, lo stesso oggetto può essere immerso in infiniti modi diversi (identificando i lembi dopo una torsione di uno, due, ..., n giri completi).

Sempre a proposito di immersioni in spazi euclidei, si noti che il cilindro si può immergere (“stirandolo”) anche in un piano, sotto forma di corona circolare. Questo non è possibile con il nastro di Moebius: comunque proviamo a farlo, ci sarà sempre quella specie di accavallamento del bordo che si vede nelle figure; è forse questa la singolarità a cui fanno riferimento il racconto ed il film; non si tratta però di una singolarità della superficie, ma della sua proiezione su un piano.

Ma al di là della costruzione casalinga con la striscia di tela, l’immersione del nastro di Moebius nel nostro spazio ha un fondamento matematico sicu-

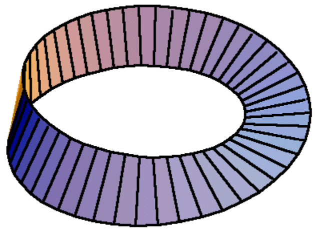

Figura 4. Il nastro di Moebius come luogo di segmenti.

ro? Sì, c'è una costruzione formale, illustrata nella Figura 4: il nastro viene visto come luogo tracciato da un segmento che venga trascinato lungo una circonferenza (orizzontale in figura) e contemporaneamente ruoti di mezzo giro attorno al proprio punto medio.

5 Orientabilità

La proprietà di avere due facce come il cilindro, o una sola come il nastro di Moebius è strettamente correlata ad un'immersione. Si può, a tale proposito, notare che anche le versioni "ritorte" del cilindro presentano due facce separate dal bordo. Nello stesso modo, anche le altre possibili immersioni del nastro di Moebius (ottenute torcendo di un giro e mezzo, o due giri e mezzo, ecc.) hanno una sola faccia. Questa è la manifestazione di un carattere importante della superficie: il cilindro è orientabile, mentre il nastro di Moebius è non orientabile.

Il carattere di orientabilità è dunque associato all'immersione e non alla topologia intrinseca della superficie? No: l'orientabilità può essere definita nel modo seguente, senza considerare la superficie come parte di uno spazio ambiente. Si noti che cilindro e nastro di Moebius sono molto simili localmente: per ogni punto dell'uno o dell'altro c'è un intorno [1] del punto nella superficie che è sostanzialmente un pezzo di piano (o meglio di semipiano, considerando la presenza del bordo). In ogni punto, dunque, possiamo considerare un riferimento cartesiano del pezzo di piano che ne costituisce l'intorno. Muovendoci lungo una curva sulla superficie, possiamo trascinare con continuità, cioè senza scatti, il riferimento. Definiamo la superficie *orientabile* se, qualunque sia il percorso chiuso che parte e arriva in uno stesso punto, il riferimento di partenza e quello d'arrivo sono coincidenti o tutt'al più basta una rotazione (non un ribaltamento) per sovrapporre l'uno all'altro. Basta, però, che ci sia un percorso chiuso per cui questo non succede perché la superficie sia definita *non*

[1] Attenzione: come molte altre, la nozione di *intorno* è trattata qui in modo discorsivo, ma è in realtà oggetto di una definizione rigorosa. Lo stesso vale per l'*omeomorfismo*, che formalizza l'idea di somiglianza espressa nel seguito. Si veda il § 7.

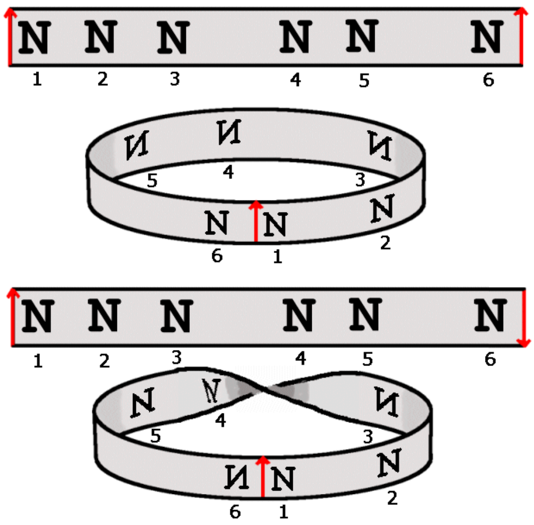

Figura 5. Facciamo scorrere una lettera lungo un percorso particolare.

orientabile. Il concetto può essere illustrato efficacemente trascinando lungo un percorso chiuso una figura che non abbia simmetria assiale, per esempio una lettera “N”. Si veda la Figura 5, dove possiamo seguire la lettera lungo un particolare percorso nel cilindro e nel nastro di Moebius; per comodità, lo stesso fenomeno è riportato anche nelle loro immersioni.

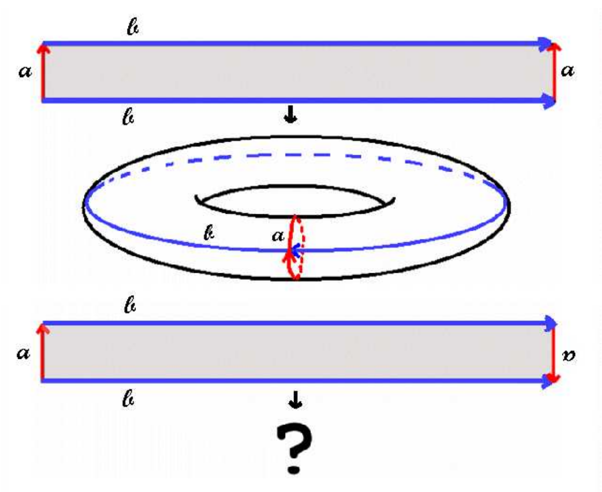

Figura 6. Altre identificazioni di lati di un rettangolo.

6 Oltre il nastro di Moebius

Possiamo estendere il trucco dello sviluppo al di là dei due oggetti considerati finora: infatti possiamo eseguire l'identificazione anche fra i due lati orizzontali del rettangolo. Nella Figura 6 in alto vediamo l'identificazione delle due curve di bordo del cilindro. Non è difficile immaginare una immersione della superficie (senza bordo) risultante nel nostro spazio: è il *toro*, quella specie di salvagente disegnato subito sotto. Le cose si complicano se eseguiamo la stessa identificazione ma partendo dal nastro di Moebius, come nella parte inferiore della Figura 6: i lati corti identificati con versi discordi, e quelli lunghi concordi.

Qui la tecnica dello sviluppo è veramente indispensabile: si segue abbastanza bene quello che può succedere all'omino piatto di Flatlandia quando attraversa sia i lati verticali sia quelli orizzontali; nel caso del toro, l'immersione è molto più ostica in quanto una parte della superficie ne nasconde un'altra; nel caso dell'altra identificazione l'immersione nel nostro spazio è addirittura impossibile! La superficie che si ottiene fu studiata da Felix Christian Klein (Düsseldorf 1849 – Göttingen 1925) [4]. Si tratta di una superficie senza bordo, non orientabile, chiamata *bottiglia di Klein*. Purtroppo non è possibile immergere la bottiglia di Klein nel nostro spazio; è invece possibile immergerla in uno spazio euclideo 4–dimensionale! Nel nostro spazio tridimensionale possiamo vederne solo una proiezione (nella Figura 7).

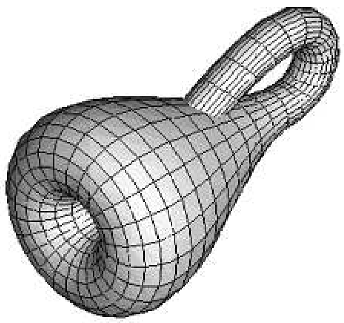

Figura 7. Una proiezione tridimensionale della bottiglia di Klein.

Notiamo un fatto importante: ogni proiezione bidimensionale del nastro di Moebius presenta necessariamente delle singolarità, cioè punti con intorni non euclidei (vale a dire non fatti come un cerchio, eventualmente deformato con continuità). Nello stesso modo, anche ogni proiezione tridimensionale della bottiglia di Klein ha singolarità in cui ci appare come un tubo che si autointerseca; si tratta, però, appunto di singolarità della proiezione e non della superficie stessa. La bottiglia di Klein ha un'altra caratteristica interessante:

tagliandola in modo opportuno, si scompone in due nastri di Moebius. Riesce il lettore a capire come praticare il taglio? (Suggerimento: lavorare sullo sviluppo).

Una considerazione di carattere combinatorio: le possibili identificazioni a coppie dei lati di un rettangolo sono in numero finito. Ignorando le diverse immersioni possibili, dal punto di vista intrinseco si può dunque ottenere solo un insieme finito di oggetti. Quali saranno? Si ritroveranno, in più di un modo, bottiglie di Klein e tori; inoltre si troverà un'altra superficie non orientabile e non immergibile nello spazio euclideo tridimensionale: il piano proiettivo. C'è però uno schema di identificazioni che dà luogo alla superficie più semplice possibile: la superficie sferica. Naturalmente s'intende la sfera in senso topologico, non geometrico, cioè a meno di deformazioni continue: la superficie di una palla che può essere bella tonda ma può anche essere sgonfia ed ammaccata. Riesce il lettore a trovare questo schema di identificazioni?

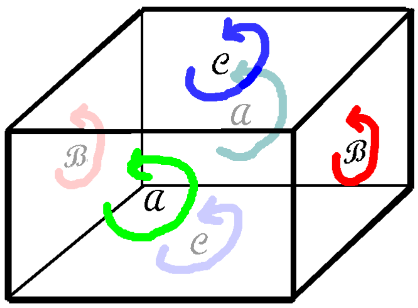

Figura 8. Sviluppo del toro tridimensionale.

C'è un'altra direzione in cui generalizzare il procedimento: aumentare la dimensione. Infatti possiamo considerare un parallelepipedo, al posto del rettangolo, ed effettuare un'identificazione delle facce a coppie. Un esempio è illustrato nella Figura 8; l'oggetto che si ottiene è localmente fatto come il nostro spazio (ma non globalmente) ed è l'analogo tridimensionale del toro. Naturalmente non lo possiamo raffigurare con un'immersione e ci dobbiamo accontentare del suo sviluppo. La generalizzazione si spinge in realtà anche alla dimensione 4 ed oltre, ma allora occorrono effettivamente gli strumenti adeguati anche per una pur vaga intuizione di quello che succede.

7 Gli strumenti adeguati

Il primo strumento adeguato per il lavoro di un matematico è una terminologia precisamente definita. Non è questo il luogo dove fornire le definizioni, ma forse è opportuno almeno menzionare quali sono i termini corretti con cui si descrivono in modo rigoroso gli aspetti sorvolati nei paragrafi precedenti. Gli stessi concetti di *relazione* e di *equivalenza*, che possono sembrare tanto intuitivi da non necessitare di definizione, sono invece elementi definiti con precisione nell'ambito della *teoria degli insiemi*. Anche le identificazioni che abbiamo visto più volte hanno una formalizzazione: il *passaggio a quoziente*. Entriamo già nella topologia quando parliamo di *intorni* e di *continuità*; anche *immersione* e *proiezione* sono termini definiti rigorosamente. Le due relazioni di equivalenza che abbiamo confrontato nel § 4 sono l'*omeomorfismo*, rispetto a cui risultano equivalenti — o, come si suol dire, *omeomorfi* — due cilindri anche se immersi in modo diverso, e l'*isotopia ambientale* che invece distingue le diverse immersioni. Una *superficie* è un caso particolare, quello della dimensione 2, di *varietà n–dimensionale*, la cui definizione è imperniata sul fatto che per ogni punto ci sia un suo intorno omeomorfo ad un intorno di un punto in uno *spazio euclideo* di *dimensione n*. Per le varietà con *bordo*, come (tronco di) cilindro e nastro di Moebius, il modello è un *semispazio* euclideo invece che uno spazio.

Gli strumenti con cui si studiano attualmente le varietà sono quelli della topologia algebrica, cioè i *gruppi di omotopia* — in particolare il primo, detto anche *gruppo fondamentale* — i *moduli di omologia* e di *coomologia*, i *gruppi di cobordismo* e tanti altri *invarianti* in continuo sviluppo. Tranne la *sfera* ed il piano proiettivo, tutte le varietà citate sono *spazi fibrati*, a cui è dedicato un importante capitolo della topologia. Un altro settore estremamente vitale è la teoria dei *nodi* che studia a fondo problemi di isotopia ambientale. Molto interessante è poi l'interazione fra la topologia di una varietà e le *strutture geometriche* che si possono definire su di essa. Il fatto che le varietà costituiscano i più tipici *spazi delle configurazioni* e *spazi delle fasi* permette alla topologia di interagire con la fisica matematica soprattutto attraverso la *topologia differenziale*, in particolare lo studio dei *campi vettoriali* e delle *funzioni di Morse*.

Le prime nozioni di topologia e di topologia algebrica sono abbastanza facilmente accessibili; esiste un'ampia letteratura a diversi livelli [9, 5, 3].

8 Conclusioni

Che cosa c'è in un nastro di Moebius di tanto interessante da ispirare un racconto e un film? Forse il fatto che, pur essendo facile costruirne un modello concreto, esso presenta diverse peculiarità apprezzabili anche solo con un'indagine superficiale, ma certo molto di più con strumenti matematici opportuni. Inoltre offre un barlume di una parte della matematica rigorosa ma meno "rigida" della geometria scolastica: la topologia.

Riferimenti bibliografici

1. Abbott, E.A.: Flatlandia. Adelphi, 1966.
2. Deutsch, A.J.: A subway called Moebius. In: Fadiman, C. (ed.) Fantasia Mathematica (1950). Ristampa: Copernicus Books, 1996.
3. Hatcher, A.: Algebraic Topology. Cambridge Univ. Press, 2002.
4. Klein, F. Ch.: Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Leipzig, 1882.
5. Kosniowski, C.: Introduzione alla topologia algebrica. Zanichelli, 1988.
6. Listing, J.B.: Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern. Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 10, mathematische Klasse (1862), 97–182.
7. Möbius, A.F.: Über die Bestimmung des Inhalts eines Polyeders. Berichte über die Verhandlungen der königlich–sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse 17 (1865), 31–68. Ristampato in: A. F. Möbius, Gesammelte Werke t.2, Leipzig 1886, 473–512.
8. Mosquera, G.R.: Alcune riflessioni sulla creazione di "Moebius". In: Emmer, M., Manaresi, M. (ed.) Matematica, arte, tecnologia, cinema, Springer (2002) 204–210.
9. Singer, I.M., Thorpe, J.A.: Lezioni di topologia elementare e geometria. Boringhieri, 1980.