

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

**GRUPPO FONDAMENTALE  
DI GRUPPI TOPOLOGICI**

Tesi di Laurea in topologia algebrica

Relatore:  
Prof.  
Massimo Ferri

Presentata da:  
Enrico Baroni

Seconda sessione  
Anno Accademico 2007/08

Un linguista sarebbe scioccato nel vedere che se un insieme non è chiuso non significa che sia aperto, oppure che “ $E$  è denso in  $E$ ” non è la stessa cosa che “ $E$  è denso in se stesso”.

–J. E. Littlewood (1885-1977), *A Mathematician’s Miscellany*, 1953.

»

# Introduzione

In questa tesi si trattano due importanti strutture matematiche, quella di gruppo topologico e quella di gruppo fondamentale di uno spazio topologico. Si cercano inoltre le correlazioni tra queste due strutture.

Il concetto di gruppo topologico nasce dallo studio dei gruppi di trasformazioni continue (come ad esempio le traslazioni nello spazio euclideo); in generale, se uno spazio è soggetto all'azione di un gruppo di trasformazioni continue, viene naturale dotare tale gruppo di una struttura topologica. Per qualche tempo quindi, i gruppi topologici vengono visti come gruppi di trasformazioni continue e solo in seguito diviene chiaro che nel trattare certi problemi risulta più semplice vedere un gruppo topologico come oggi viene definito, ovvero come un insieme dotato di una struttura di gruppo e di una topologia, con la condizione che le due strutture siano collegate dalla continuità dell'operazione.

Mentre il gruppo topologico ha una struttura topologica e contemporaneamente algebrica, il gruppo fondamentale costituisce un passaggio dalla topologia all'algebra, in cui ad oggetti topologici (spazi) vengono sostituiti oggetti algebrici (gruppi), in particolare, ad oggetti topologicamente equivalenti si associano oggetti algebricamente equivalenti (ma non viceversa). Il più noto risultato relativo al gruppo fondamentale di un gruppo topologico è la sua commutatività, mentre altri risultati meno immediati vengono ottenuti tramite la teoria dei rivestimenti. In particolare applicando questa ai gruppi topologici si ha la definizione del gruppo di rivestimento universale ed un metodo per il calcolo del gruppo fondamentale che consiste nel calcolare il nucleo di una funzione (proiezione di rivestimento), associata a tale gruppo di rivestimento universale.

In questa tesi la trattazione del gruppo topologico non segue lo sviluppo storico e quindi il gruppo topologico viene definito come una terna costituita da un insieme, una topologia ed un'operazione, senza fare particolare riferimento ai gruppi di trasformazioni continue; nella scelta dei risultati relativi ai gruppi topologici vengono privilegiati quelli che possono costituire una base per risultati relativi al gruppo fondamentale di un gruppo topologico, ma compaiono anche risultati, come la topologizzazione di un gruppo, che non hanno una diretta connessione con tale argomento. La costruzione del gruppo fondamentale è fatta in modo sintetico, per lasciare spazio alla teoria dei rivestimenti e alla costruzione del gruppo di rivestimen-

to universale. Nella trattazione si è esclusa un'importante classe di gruppi topologici, quella dei gruppi di Lie che pure avrebbero importanti proprietà relativamente al loro gruppo fondamentale. Tale classe avrebbe però richiesto una trattazione a parte data la sua complessità.

Dunque il primo capitolo viene dedicato interamente ai gruppi topologici: se ne forniscono alcuni esempi e la definizione, si generalizzano i concetti algebrici di sottogruppo, omomorfismo, isomorfismo e gruppo quoziente alla teoria dei gruppi topologici, si fornisce un metodo per la topologizzazione di un gruppo, e se ne considerano le proprietà di connessione e le proprietà locali (si verifica in particolare l'importanza dell'elemento neutro).

Nel secondo capitolo viene data la costruzione del gruppo fondamentale (per uno spazio generico) partendo dalla definizione di omotopia e di prodotto tra cammini. Una volta costruito il gruppo fondamentale, si vede come un'applicazione continua tra spazi topologici induca un omomorfismo di gruppi, mentre un'omeomorfismo induce un isomorfismo. Nella parte finale del capitolo, viene dimostrata la commutatività del gruppo fondamentale di un gruppo topologico.

Nel terzo capitolo, infine, si definisce un rivestimento, si calcola il gruppo fondamentale della circonferenza (vista come gruppo topologico) e si estende più volte questo risultato (teoremi 3.1.4 e 3.1.9). Si vede inoltre come il gruppo fondamentale dello spazio totale venga mandato mediante la proiezione di rivestimento in un sottogruppo dello spazio base, e si forniscono teoremi di esistenza ed unicità per gli spazi di rivestimento di un dato spazio (in particolare per il rivestimento universale). Infine, si definiscono gli automorfismi di rivestimento e si applica la teoria dei rivestimenti al caso dei gruppi topologici, definendo il gruppo di rivestimento universale (del quale si dimostra l'esistenza) e utilizzandolo per calcolare il gruppo fondamentale dei gruppi topologici delle rotazioni  $H_3$  ed  $H_4$ .

# Indice

<b>1</b>	<b>gruppi topologici</b>	<b>5</b>
1.1	gruppi topologici: definizione e prime proprietà . . . . .	5
1.2	topologizzazione di un gruppo . . . . .	6
1.3	sottogruppi, sottogruppi normali e gruppi quozienti . . . . .	8
1.4	omomorfismi ed isomorfismi tra gruppi topologici . . . . .	11
1.5	connessione nei gruppi topologici . . . . .	13
1.6	proprietà locali . . . . .	14
<b>2</b>	<b>il gruppo fondamentale</b>	<b>15</b>
2.1	omotopie e prodotti di cammini . . . . .	15
2.2	gruppo fondamentale . . . . .	17
<b>3</b>	<b>rivestimenti</b>	<b>21</b>
3.1	rivestimenti di spazi topologici . . . . .	21
3.2	automorfismi di rivestimento . . . . .	26
3.3	rivestimenti di gruppi topologici . . . . .	27
<b>4</b>	<b>conclusioni</b>	<b>31</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>32</b>

# Capitolo 1

## gruppi topologici

Un gruppo topologico è una terna del tipo  $(G, *, \tau)$ , dove  $G$  è un insieme,  $*$  è un'operazione che rende l'insieme un gruppo e  $\tau$  è una topologia in  $G$ . Le due strutture (di gruppo e topologica) risultano collegate dalla continuità dell'operazione in  $G$ .

### 1.1 gruppi topologici: definizione e prime proprietà

**Definizione 1.1.** Un insieme  $G$  si dice gruppo topologico se valgono le proprietà seguenti:

1.  $G$  è un gruppo.
2.  $G$  è uno spazio topologico.
3. L'operazione in  $G$  è continua nello spazio topologico  $G$ .

Indicando con  $UV$  l'insieme i cui elementi sono del tipo  $uv$  con  $u \in U$  e  $v \in V \subset W$  e con  $U^{-1}$  l'insieme degli elementi del tipo  $u^{-1}$ , dove  $u \in U$ , quest'ultima condizione può essere formulata più precisamente così:

1. Se  $a$  e  $b$  sono due elementi di  $G$ , allora per ogni intorno  $W$  di  $ab$  esistono due intorni  $U$  e  $V$  di  $a$  e  $b$  tali che  $UV \subset W$ .
2. Se  $a$  è un qualsiasi elemento di  $G$  allora per ogni intorno  $W$  di  $a^{-1}$  esiste un intorno  $U$  di  $a$  tale che  $U^{-1} \subset W$ .

O, in un'unica condizione:

- Se  $a$  e  $b$  sono 2 elementi di  $G$ , allora per ogni intorno  $W$  di  $ab^{-1}$  esistono gli intorni  $U$  e  $V$  di  $a$  e  $b$  rispettivamente tali che  $UV^{-1} \subset W$ .

Elenchiamo ora alcune proprietà del gruppo topologico:

- Sia  $f(x) = xa$ ,  $g(x) = ax$ ,  $k(x) = x^{-1}$  dove  $a$  è un elemento fissato del gruppo  $G$  e  $x$  denota un elemento variabile dello stesso gruppo. Allora tutte e tre le funzioni sono omeomorfismi dello spazio topologico in sé

stesso. Dimostro solo per  $f$ .

Innanzitutto  $f$  è una funzione 1 – 1 poichè per ogni  $y'$  esiste un unico elemento  $x'$  tale che  $y' = x'a$ . La continuità segue dalla definizione, ovvero esistono gli intorno  $U$  e  $V$  di  $x'$  ed  $a$  tali che  $UV \subset W$ ,  $f(U) \subset W$  che implica che  $f$  è continua.

Lo stesso argomento stabilisce la continuità dell'inversa.

- Sia  $F$  un insieme chiuso,  $U$  un insieme aperto,  $P$  un insieme arbitrario ed  $a$  un elemento del gruppo topologico  $G$ . Allora  $Fa$ ,  $aF$ ,  $F^{-1}$  sono insiemi chiusi;  $UP$ ,  $PU$ ,  $U^{-1}$  sono insiemi aperti. La dimostrazione segue dalla proposizione precedente, infatti  $f$  è un omeomorfismo e porta  $F$  nell'insieme  $Fa$ . Allo stesso modo  $Ua$  è aperto.
- Un gruppo topologico è omogeneo, con questo si intende che per ogni coppia di elementi  $p$  e  $q$  di  $G$  esiste un omeomorfismo di  $G$  in sè stesso che manda  $p$  in  $q$ . Infatti la funzione  $f(x) = xa$  soddisfa  $f(p) = q$  se poniamo  $a = p^{-1}q$ .
- Dall'omogeneità del gruppo topologico segue che è sufficiente verificare le proprietà locali in un singolo punto dell'insieme.
- Lo spazio topologico di un gruppo  $G$  è regolare, ovvero, per ogni punto  $a$  e ogni insieme chiuso  $B$  in  $G$  che non contiene  $a$  esistono aperti disgiunti  $M$  ed  $N$  tali che  $a \in M$ ,  $B \subset N$ .

Come esempio di gruppo topologico posso considerare  $S^1 \subset \mathbf{C}$  con l'operazione  $\mu : S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$  definita da  $\mu(z_1, z_2) = z_1 z_2$  e  $v(z) = z^{-1}$ . Tale spazio è un gruppo, infatti  $|z_1| = 1$ ,  $|z_2| = 1$  e dunque  $1 = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ , verifico che l'operazione è continua: sia  $z = e^{ix} = e^{ix_1} e^{ix_2} = e^{i(x_1+x_2)}$ , un intorno di  $U$  di  $e^{ix}$  sarà del tipo  $e^{i\rho x}$  dove  $-\varepsilon \leq \rho \leq \varepsilon$ .

Posso allora prendere  $e^{i\rho_1 x_1}$  ed  $e^{i\rho_2 x_2}$ , se  $-\varepsilon/4 \leq \rho_1 \leq \varepsilon/4$  allora si ha che  $e^{ix_1 \rho_1} e^{ix_2 \rho_2} \subset U$ .

Un ulteriore esempio di gruppo topologico é dato da  $R^n$  con la struttura di gruppo additivo.

## 1.2 topologizzazione di un gruppo

Considero un insieme con la struttura di gruppo; in esso è sempre possibile definire una topologia che renda l'operazione continua (ad esempio posso prendere la topologia discreta). Nelle seguenti proposizioni e nei seguenti teoremi vediamo come un sistema di intorno dell'identità mi dia una topologia sull'insieme, e che la topologizzazione sia unica in relazione a tale sistema di intorno.

Premettiamo, senza dimostrarlo, un lemma.

**Lemma 1.2.1.** *Affinché un sistema di insiemi aperti sia una base è condizione necessaria e sufficiente che, per ogni insieme aperto  $A$  e per ogni punto  $a \in A$ , esista un aperto  $U \in \Sigma$  tale che  $a \in U \subset A$ .*

**Proposizione 1.2.2.** *Sia  $G$  un gruppo topologico e sia  $\Sigma^*$  un sistema completo di intorno per l'identità e sia  $M$  un insieme denso in  $G$ . Allora la collezione  $\Sigma$  degli insiemi della forma  $Ux$ , dove  $U \in \Sigma^*$ ,  $x \in M$ , è un sistema completo di intorno dello spazio  $G$ . Inoltre  $\Sigma^*$  soddisfa le cinque condizioni:*

1. Sia  $e$  l'elemento neutro, allora l'intersezione di tutti gli insiemi di  $\Sigma^*$  consiste solamente di  $e$ .
2. L'intersezione di due qualsiasi insiemi di  $\Sigma^*$  contiene un terzo insieme appartenente a  $\Sigma^*$ .
3. Per ogni insieme  $U \in \Sigma^*$  esiste un insieme  $V \in \Sigma^*$  tale che  $VV^{-1} \subset U$ .
4. Per ogni insieme  $U \in \Sigma^*$  ed ogni elemento  $a \in U$  esiste un insieme  $V \in \Sigma^*$  tale che  $Va \subset U$ .
5. Se  $U \in \Sigma^*$  e se  $a$  è un elemento arbitrario di  $G$ , allora esiste un insieme  $V \in \Sigma^*$  tale che  $a^{-1}Va \subset U$ .

*Dimostrazione.* Per quanto visto, gli insiemi del sistema  $\Sigma$  sono aperti. Dobbiamo far vedere che costituiscono una base per  $G$ .

Sia  $W$  un insieme aperto arbitrario in  $G$  e sia  $a \in W$ . Allora  $Wa^{-1}$  è aperto e contiene  $e$ . Quindi esiste un intorno  $U \in \Sigma^*$  tale che  $UU^{-1} \subset Wa^{-1}$ . Ma  $M$  è ovunque denso in  $G$  così è anche l'insieme  $aM^{-1}$ ; conseguentemente gli insiemi  $U$  e  $aM^{-1}$  hanno l'elemento  $d$  in comune.

Si noti che  $d^{-1}a \in M$ . Da questo segue che  $Ud^{-1}a \in \Sigma$ . D'altra parte  $Ud^{-1}a \subset W$ . Infatti  $UU^{-1} \subset Wa^{-1}$  e poiché  $d \in U$  abbiamo che  $Ud^{-1} \subset Wa^{-1}$  che implica che  $Ud^{-1}a \subset W$ . Infine poiché  $d \in U$  ne segue che  $e \in Ud^{-1}$  e conseguentemente che  $a \in Ud^{-1}a$ . Quindi la condizione che  $\Sigma$  sia una base è soddisfatta in virtù del lemma precedente.  $\square$

Forniamo ora delle condizioni affinché una certa collezione di insiemi sia una base.

**Teorema 1.2.3.**

Sia  $R$  un qualsiasi insieme e sia  $\Sigma$  una qualsiasi collezione di insiemi che soddisfi le seguenti due condizioni:

1. Per ogni coppia di punti distinti  $a$  e  $b$  in  $R$  esiste un insieme  $U \in \Sigma$  tale che  $a \in U$  mentre  $b$  non appartiene ad  $U$ .
2. Per ogni coppia di insiemi  $U$  e  $V$  della collezione  $\Sigma$  che contengono il punto  $a \in R$  esiste un insieme  $W \in \Sigma$  tale che  $a \in W \subset U \cap V$ .

Introduco un'operazione di chiusura in  $R$  definendo  $a \in M$  se e solo se ogni insieme della collezione  $\Sigma$  che contiene  $a$  interseca anche  $M$ . L'operazione così definita introduce un'operazione di chiusura sull'insieme, così che  $R$  diventa uno spazio topologico.

Per lo spazio  $R$  così definito  $\Sigma$  è un sistema completo di intorni.

**Teorema 1.2.4.**

Sia  $G$  un gruppo algebrico e sia  $\Sigma^*$  un qualsiasi sistema di sottoinsiemi di  $G$  che soddisfano le 5 condizioni della proposizione 1.2.2. Allora esiste uno ed un solo modo di introdurre una topologia in  $G$  in modo tale che  $G$  diventi un gruppo topologico e il sistema  $\Sigma^*$  sia un sistema completo di intorni dell'identità.

*Dimostrazione.* Se  $G$  ammette una sola topologizzazione che lo trasforma in un gruppo topologico e rispetto alla quale  $\Sigma^*$  è un sistema completo di intorni dell'identità allora, la collezione  $\Sigma$  di tutti gli insiemi della forma  $Ux$ , dove

$U \in \Sigma^*$ ,  $x \in G$  è una base per quella topologia. Da questo segue che la topologia che soddisfa le due condizioni date è unica se esiste. Completiamo la dimostrazione del teorema mostrando che  $\Sigma$  soddisfa le condizioni del teorema 1.2.3, che le operazioni di gruppo sono continue nella topologia e infine che  $\Sigma^*$  è un sistema fondamentale di intorni in quella topologia.

Siano  $a$  e  $b$  elementi distinti di  $G$ . Essendo  $e$  l'unico elemento comune tra tutti gli insiemi di  $\Sigma^*$  allora esiste  $U \in \Sigma^*$  tale che  $ba^{-1}$  non è contenuto in  $U$  ma allora  $Ua$  non contiene  $b$ . Dunque la prima condizione del teorema precedente è soddisfatta. Nell'ordine per verificare la seconda condizione del teorema 1.2.3 osserviamo che, se  $b \in Ua$ , dove  $U \in \Sigma^*$  allora esiste un intorno  $V \in \Sigma^*$  tale che  $Vb \subset Ua$ . Infatti  $ba^{-1} \in U$  così che, per la quarta condizione esiste  $V \in \Sigma^*$  tale che  $Vba^{-1} \subset U$ , ma allora  $Vb \subset Ua$ .

Siano ora  $Ua$  e  $Vb$  due intorni del punto  $c$ , sia  $c \in Ua$ ,  $c \in Vb$ , dove  $U, V \in \Sigma^*$ . Per quanto visto anche sopra esistono gli intorni  $U', V' \in \Sigma^*$  tali che  $U'c \subset Ua$  e  $V'c \subset Vb$ . Scegliendo un intorno  $W \in \Sigma^*$  contenuto nell'intersezione  $U', V'$  otteniamo  $Wc \subset Ua$ ,  $Wc \subset Vb$  per cui, la seconda condizione del teorema 1.2.3 è soddisfatta.

Mostro ora che le operazioni di gruppo sono continue nella topologia così ottenuta. Sia  $c = ab^{-1}$  e  $W'c'$  sia un arbitrario intorno di  $c$ , allora, come è stato mostrato esiste un intorno  $W \in \Sigma^*$  tale che  $Wc \subset W'c'$ . Uso 3) per ottenere un intorno  $U \in \Sigma^*$  tale che  $UU^{-1} \subset W$  ed infine 5) per ottenere un altro intorno  $V \in \Sigma^*$  tale che  $ab^{-1}Vba^{-1} \subset U$ . Allora  $ab^{-1}V^{-1} \subset U^{-1}ab^{-1}$  e conseguentemente

$$Ua(Vb)^{-1} = Uab^{-1}V^{-1} \subset UU^{-1}ab^{-1} \subset Wab^{-1} = Wc \subset W'c' \quad (1.1)$$

Dunque  $G$  è un gruppo topologico con la topologia indotta dal sistema di intorni  $\Sigma$ .

Rimane da provare che  $\Sigma^*$  è una base in  $e$ . Sia  $W$  un arbitrario sottoinsieme aperto di  $G$  che contiene  $e$ . Poiché  $\Sigma$  è una base per  $G$  esiste un intorno  $Ua \in \Sigma$  del punto  $e$  tale che  $Ua \subset W$ . Da  $e \in Ua$  segue che  $a^{-1} \in U$  e, conseguentemente in virtù della condizione 4), esiste un intorno  $V \in \Sigma^*$  tale che  $Va^{-1} \subset U$ . Ma allora  $V \subset Ua \subset W$  che mostra che  $\Sigma^*$  è una base in  $e$ .  $\square$

### 1.3 sottogruppi, sottogruppi normali e gruppi quozienti

Estendiamo innanzitutto il concetto di sottogruppo algebrico ai gruppi topologici.

**Definizione 1.2.** Sia  $G$  un gruppo topologico. Allora un sottoinsieme  $H$  è detto un sottogruppo del gruppo topologico  $G$  se:

1.  $H$  è un sottogruppo del gruppo algebrico  $G$ .

2.  $H$  è un insieme chiuso nello spazio topologico  $G$ . Un sottogruppo  $N$  del gruppo topologico  $G$  è detto sottogruppo normale se  $N$  è un sottogruppo normale del gruppo algebrico  $G$ .

**Proposizione 1.3.1.** *Sia  $G$  un gruppo topologico e sia  $H$  un suo sottoinsieme che è un sottogruppo di  $G$  considerato come gruppo algebrico. Allora anche  $H$  è un gruppo topologico rispetto alla topologia indotta da  $G$ . In particolare, un sottogruppo di un gruppo topologico è esso stesso un gruppo topologico.*

*Dimostrazione.* Devo dimostrare che l'operazione è continua nello spazio topologico  $H$ . Siano  $a$  e  $b$  due elementi di  $H$  e sia  $ab^{-1} = c$ . Ogni intorno  $W'$  di  $c$  nello spazio  $H$  può essere scritto come l'intersezione di  $H$  con qualche intorno  $W$  di  $c$  nello spazio  $G$ .  $W' = H \cap W$ . Poiché  $G$  è un gruppo topologico esistono intorni  $U$  e  $V$  di  $a$  e  $b$  tali che  $UV^{-1} \subset W$ . Ma allora le intersezioni  $U' = H \cap U$  e  $V' = H \cap V$  sono intorni di  $a$  e  $b$  nello spazio  $H$  e abbiamo  $U'V'^{-1} \subset W$  come anche  $U'V'^{-1} \subset H$  così che  $U'V'^{-1} \subset W'$  e vale la condizione di continuità dell'operazione.  $\square$

**Proposizione 1.3.2.** *Sia  $G$  un gruppo topologico e sia  $H$  un sottogruppo del gruppo algebrico  $G$ . Allora  $\bar{H}$  è un sottogruppo del gruppo topologico  $G$ . Se  $H$  è un sottogruppo normale del gruppo algebrico  $G$  allora  $\bar{H}$  è anch'esso normale. Se  $H$  è aperto in  $G$  allora  $\bar{H} = H$ .*

*Dimostrazione.* Provo innanzitutto che, se  $a \in \bar{H}$  e  $b \in \bar{H}$ , allora  $ab^{-1} \in \bar{H}$ . Sia  $W$  un arbitrario intorno di  $ab^{-1}$  e scegliamo gli intorni  $U$  e  $V$  degli elementi  $a$  e  $b$  tali che  $UV^{-1} \subset W$ . Allora esistono elementi  $x$  e  $y$  in  $H$  tali che  $x \in U$ ,  $y \in V$ . Così abbiamo simultaneamente che  $xy^{-1} \in H$  e che  $xy^{-1} \in W$ . Quindi l'intorno (ricordiamo generico)  $W$  interseca  $H$  e dunque  $ab^{-1} \in \bar{H}$ . Per essere un sottogruppo del gruppo topologico deve essere chiuso, ma questo segue dalla definizione. Suppongo ora che  $H$  sia un sottogruppo normale del gruppo algebrico  $G$  e siano  $a \in \bar{H}, c \in G$ , in maniera simile voglio dimostrare che, preso un intorno generico  $V$  del punto  $c^{-1}ac$  esso appartiene ad  $\bar{H}$ . Infatti, dato  $V$ , esiste un intorno  $U$  di  $a$  tale che  $c^{-1}Uc \subset V$  e poiché  $a \in \bar{H}$  esiste un elemento  $x \in H$  appartenente ad  $U$ . Ma allora  $c^{-1}xc \in H$  e  $c^{-1}xc \in V$  così che  $V$  interseca  $H$ , segue che  $c^{-1}ac \in \bar{H}$  e quindi  $\bar{H}$  è un sottogruppo normale del gruppo  $G$ . Infine, se  $H$  è un aperto in  $G$  e se  $a \in \bar{H}$  allora  $a$  è contenuto nell'aperto  $aH$  che deve intersecare  $H$ . Pertanto  $a \in HH^{-1} = H$  e  $H = \bar{H}$   $\square$

Mi preoccupo ora di definire una topologia sul quoziente  $G/H$ , ovvero l'insieme dei laterali destri, ricordando che tale quoziente non ha necessariamente la struttura di gruppo algebrico. Nel caso in cui  $H$  è un insieme normale  $G/H$  ha struttura di gruppo, e in questo caso posso preoccuparmi che la topologia definita sul quoziente mi dia una struttura di gruppo topologico.

**Proposizione 1.3.3.** *Sia  $G$  un gruppo topologico e sia  $H$  un sottogruppo di  $G$ . Introduco una topologia in  $G/H$  nel modo seguente: sia  $\sum$  una base di aperti in  $G$  e, per ogni  $U \in \sum$  denoto con  $U^*$  la collezione di tutti i laterali della forma  $Hx$ , dove  $x \in U$ . La collezione  $\sum^*$  di tutti gli insiemi della forma  $U^*$ ,  $U \in \sum$ , costituisce una base per un'unica topologia in  $G/H$ . Si verifica inoltre che tali topologie non dipendono dalla scelta della base in  $G$ .*

*Dimostrazione.* Voglio dimostrare che la collezione  $\sum *$  definita sopra, verifica le condizioni del teorema 1.2.3 e che quindi costituisce una base per  $G/H$ . Siano  $A$  e  $B$  due punti di  $G/H$  e sia  $a \in A$ , poiché  $B = Hb$  è chiuso (è un sottogruppo di un gruppo topologico), e poiché  $a$  non appartiene a  $B$  esiste un intorno  $U$  di  $a$  che non interseca  $B$ . Ma allora l'insieme  $Hx, x \in U$  è un intorno di  $A$  che non contiene  $B$ . Quindi ho verificato la prima condizione del teorema 1.2.3. Voglio ora dimostrare la seconda condizione: Siano  $U^*$  e  $V^*$  due intorni del laterale  $A$  e sia  $a \in A$ . Prendiamo in  $\sum$  gli intorni  $U$  e  $V$  tali che  $U^*$  è la collezione dei laterali della forma  $Hx, x \in U$  e  $V^*$  è la collezione dei laterali della forma  $Hy, y \in V$ . Allora  $HU$  e  $HV$  sono aperti in  $G$  contenenti  $a$ . Quindi esiste un intorno  $W$  di  $a$  contenuto nell'intersezione di  $HU$  e  $HV$  ed è facile verificare che  $W^*$  è un intorno di  $A$  contenuto nell'intersezione  $U^* \cap V^*$ . Quindi la seconda condizione è verificata.  $\square$

**Proposizione 1.3.4.** *Sia  $G$  un gruppo topologico,  $H$  un sottogruppo e sia  $G/H$  lo spazio dei laterali (destri). Definisco in  $G/H$  la topologia come sopra e associo ad ogni elemento  $x \in G$  il laterale che lo contiene. In questo modo ottengo una funzione  $f$  da  $G$  a  $G/H$  che chiamo proiezione naturale. Tale  $f$  risulta essere un'applicazione continua e aperta.*

*Dimostrazione.* Dimostro dapprima la continuità. Sia  $a \in G$  e sia  $A = Ha$  così che  $f(a) = A$ . Inoltre sia  $U^*$  un arbitrario intorno di  $A$  in  $G/H$ . Allora esiste un intorno  $U$  nello spazio  $G$  tale che  $U^*$  consiste di tutti i laterali della forma  $Hx, x \in U$ . L'insieme  $HU$  è a sua volta aperto in  $G$  e contiene  $a$ , quindi esiste un intorno  $V$  di  $a$  contenuto in  $HU$ . È facile vedere che  $f(V) \subset U^*$  così che  $f$  è continua. Sia ancora  $a \in G$  e  $A = Ha = f(a)$ . Questa volta sia  $U$  un intorno arbitrario di  $a$ , allora è immediato che  $f(U) = U^*$ , in particolare  $U^* \in f(U)$  così che  $f$  è aperta.  $\square$

Mi interessa particolarmente il caso in cui  $H$  è un sottogruppo normale. Posso ad esempio chiedermi se il quoziente  $G/H$  sia un gruppo topologico. Sia  $G$  un gruppo topologico e sia  $N$  un sottogruppo normale di  $G$ . Allora l'insieme quoziente  $G/N$  è un gruppo e, per la proposizione 1.3.4 è uno spazio topologico, inoltre, nelle ipotesi di  $N$  normale:

**Proposizione 1.3.5.** *L'operazione di gruppo in  $G/N$  è continua nello spazio topologico  $G/N$ .*

Pertanto  $G/N$  è un gruppo topologico. È chiamato il gruppo quoziente del gruppo topologico  $G$  per mezzo del sottogruppo  $N$ .

*Dimostrazione.* Siano  $A$  e  $B$  due elementi di  $G/N$ ,  $C = AB^{-1}$ , e sia  $W^*$  un arbitrario intorno di  $C$ . Allora  $W^*$  è la collezione di tutti i laterali della forma  $Nz, z \in W$ , dove  $W$  è un arbitrario intorno di  $G$ . Dal fatto che  $C \in W^*$  esiste un elemento  $c \in W$  tale che  $C = Nc$ . Sia  $b$  un elemento arbitrario di  $B$  e sia  $a = cb$ ; allora  $a \in A$ . Poiché  $G$  è un gruppo topologico esistono gli intorni  $U$  e  $V$  di  $a$  e  $b$  tali che  $UV^{-1} \subset W$ . Denoto con  $U^*$  l'intorno di  $A$  che consiste di tutti i laterali della forma  $Nx, x \in U$  e con  $V^*$  l'intorno di  $B$  che consiste di tutti i laterali della forma  $Ny, y \in V$ . Abbiamo allora

$$Nx(Ny)^{-1} = Nxy^{-1}N^{-1} = NN^{-1}xy^{-1} = Nxy^{-1} \in W^*$$

Così  $U * V *^{-1} \subset W *$  □

## 1.4 omomorfismi ed isomorfismi tra gruppi topologici

Così come, dal punto di vista algebrico, due gruppi sono indistinguibili se isomorfi e, dal punto di vista topologico, due spazi topologici sono indistinguibili se omeomorfi, dal punto di vista topologico-algebrico, due gruppi topologici sono indistinguibili se esiste tra loro un isomorfismo di gruppi topologici come definito sotto.

**Definizione 1.3.** Una funzione  $f$  di un gruppo topologico  $G$  su un gruppo topologico  $G'$  è detta un isomorfismo se:

1.  $f$  è un isomorfismo del gruppo algebrico  $G$  sul gruppo algebrico  $G'$ .
2.  $f$  è un omeomorfismo dello spazio topologico  $G$  nello spazio topologico  $G'$ .

**Definizione 1.4.** Un'applicazione  $g$  di un gruppo topologico  $G$  su di un gruppo topologico  $G*$  è un omomorfismo se:

1.  $g$  è un omomorfismo del gruppo algebrico  $G$  nel gruppo algebrico  $G*$ .
2.  $g$  è un'applicazione continua dello spazio topologico  $G$  su  $G*$ .

**Proposizione 1.4.1.** *Siano  $G$  e  $G*$  due gruppi topologici e sia  $g$  un omomorfismo del gruppo algebrico  $G$  sul gruppo algebrico  $G*$ . Allora, affinché  $g$  sia continua o aperta, è sufficiente che lo sia in  $e$ , dove  $e$  è l'elemento neutro del gruppo.*

*Dimostrazione.* Sia  $a \in G$ ,  $g(a) = a*$  e sia  $U*$  un intorno arbitrario di  $a*$ . Allora  $U * a *^{-1}$  è un aperto e contiene  $e*$  così che esiste un intorno  $U'$  di  $e$  tale che  $g(U') \subset U * a *^{-1}$ . L'insieme aperto  $U = U'a$  contiene un intorno  $V$  di  $a$  e abbiamo che  $g(V) \subset g(U')g(a) \subset U * a *^{-1} a * = U*$ . Così  $g$  è continua. In modo analogo si vede che  $g$  è aperta. □

Diamo, senza dimostrarla, la seguente proposizione.

**Proposizione 1.4.2.** *Sia  $G$  un gruppo topologico,  $N$  sia un sottogruppo normale e sia  $G/N$  il gruppo quoziente. Allora la proiezione naturale  $g$  è un omomorfismo aperto di  $G$  su  $G/N$ .*

I seguenti teoremi mostrano come gli omomorfismi aperti siano una classe importante di funzioni tra gruppi topologici.

Consideriamo ora un'estensione di quel teorema che dice che se esiste un omomorfismo tra due gruppi  $G$  e  $G*$  avente kernel  $N$  allora  $G/N$  e  $G*$  sono isomorfi.

**Teorema 1.4.3.** *Siano  $G$  e  $G*$  due gruppi topologici e sia  $g$  un omomorfismo aperto da  $G$  a  $G*$  avente nucleo  $N$ . Allora  $N$  è un sottogruppo normale di  $G$  e l'isomorfismo del gruppo algebrico  $G/N$  sul gruppo  $G*$  è un isomorfismo del gruppo topologico  $G/N$  sul gruppo topologico  $G*$ .*

*Dimostrazione.* So già che  $N$  è un sottogruppo normale del gruppo  $G$  e che  $G/N$  e  $G^*$  sono isomorfi come gruppi. Per vedere che  $N$  è un sottogruppo di un gruppo topologico, devo verificare che è chiuso, ma questo è vero poiché  $N$  è la retroimmagine di  $e^*$  mediante la funzione continua  $g$ . Sia ora  $x^*$  un arbitrario intorno di  $G^*$  e sia  $X = g^{-1}(x^*)$ . Allora  $X$  è un laterale di  $N$  in  $G$ . Definisco  $f(x^*) = X$ . Segue da un teorema basilare dell'algebra dei gruppi che  $f$  è un isomorfismo da  $G^*$  a  $G/N$  (come gruppi algebrici). Rimane solo da dimostrare che  $f$  è un omeomorfismo. Sia  $a^* \in G^*$  e sia  $f(a^*) = A$ . Denoto con  $U^*$  un intorno arbitrario di  $A$  nello spazio  $G/N$ .  $U^*$  consiste di tutti i laterali della forma  $Nx$ ,  $x \in U$  dove  $U$  è qualche intorno fissato nello spazio  $G$ . Sia  $a$  un elemento in  $U$  tale che  $A = Na$ . Allora  $g(a) = a^*$  e, poiché  $g$  è aperto esiste un intorno  $V^*$  di  $a^*$  tale che  $g(U) \supset V^*$ . Da questo segue che  $f(V^*) \subset U^*$ . Sia ora  $x^* \in V^*$ . Allora esiste un elemento  $x \in U$  tale che  $g(x) = x^*$ . Conseguentemente  $f(x^*) = Nx \in U^*$ . Così  $f$  è continua. Mostro ora la continuità di  $f^{-1}$ : sia  $A = Na \in G/N$  e sia  $f^{-1}(A) = a^*$ . Sia inoltre  $U^*$  un intorno arbitrario di  $a^*$ . Allora  $g(a) = a^*$  e, dal fatto che  $g$  è continua esiste un intorno  $V$  di  $a$  tale che  $g(V) \subset U^*$ . Denoto con  $V^*$  l'intorno di  $A$  in  $G/N$  che consiste di tutti i laterali della forma  $Nx$ ,  $x \in V$ . Poiché  $g(V) \subset U^*$  segue che  $f^{-1}(V^*) \subset U^*$ . Allora  $f^{-1}$  è continua.  $\square$

**Proposizione 1.4.4.** *Siano  $G$  e  $G^*$  gruppi topologici e sia  $f$  un omomorfismo aperto di  $G$  su  $G^*$ . Denoto con  $N'$  il nucleo di  $f$ . Allora  $f$  crea una corrispondenza 1 – 1 tra i sottogruppi di  $G^*$  ed i sottogruppi di  $G$  contenenti  $N'$  così definita:  $N^*$  sia un sottogruppo di  $G^*$  quindi il sottogruppo  $N$  di  $G$  corrispondente è l'immagine inversa  $N = f^{-1}(N^*)$ , se  $N$  è un sottogruppo di  $G$  che contiene  $N'$  allora il sottogruppo  $N^*$  di  $G^*$  corrispondente ad esso è proprio l'immagine  $N^* = f(N)$ .*

*Le due corrispondenze così definite sono inverse l'una all'altra. Inoltre, sottogruppi normali corrispondono a sottogruppi normali, e infine, se  $N$  ed  $N^*$  sono sottogruppi corrispondenti allora  $G/N$  risulta isomorfo a  $G^*/N^*$ .*

*Dimostrazione.* Considero dapprima la corrispondenza di  $N$  su  $N^*$ . Come immagine inversa di un chiuso  $N^*$ ,  $N$  è anch'esso chiuso e contiene  $N'$ . Inoltre,  $N$  è un sottogruppo del gruppo algebrico  $G$ . Così  $N$  è un sottogruppo del gruppo topologico  $G$ . Inoltre, se  $N^*$  è un sottogruppo normale di  $G^*$ , e se  $g$  denota la proiezione di  $G^*$  sul gruppo quoziente  $G^*/N^* = G^{**}$  allora  $h = gf$  è un omomorfismo aperto (vedi 1.4.2) di  $G$  su  $G^{**}$  avente nucleo  $N$ . Quindi, per il teorema 1.4.3,  $N$  è un sottogruppo normale di  $G$  e i gruppi quoziente  $G/N$  e  $G^*/N^*$  sono isomorfi.

Si consideri inoltre la corrispondenza di  $N^*$  su  $N$  dove  $N^* = f(N)$  ed  $N \supset N'$ . Mostriamo dapprima che l'immagine inversa di  $N^*$  mediante  $f$  coincide con  $N$ . Infatti se  $f(a) \in N^*$  esiste un elemento  $b \in N$  tale che  $f(a) = f(b)$ ; ma allora  $f(ab^{-1}) = e^*$  e  $ab^{-1} \in N' \subset N$  così che  $a \in Nb = N$ .

Da questo segue che  $f(G/N) = G^*/N^*$ . Siccome  $f$  è aperto e  $G/N$  è un insieme aperto questo implica che  $G^*/N^*$  è aperto e anche che  $N^*$  è chiuso in  $G^*$ .  $\square$

## 1.5 connessione nei gruppi topologici

**Definizione 1.5.** Sia  $a$  un punto di uno spazio topologico  $R$ , allora esiste un sottoinsieme connesso massimale  $K$  di  $R$  che contiene il punto  $a$ . Con massimale si intende che ogni sottoinsieme connesso di  $R$  che contiene  $a$  è necessariamente un sottoinsieme di  $K$ . L'insieme  $K$  che è automaticamente chiuso è detto componente connessa di  $a$ . Ovviamente esso è anche la componente di ogni suo punto.

**Proposizione 1.5.1.** Sia  $G$  un gruppo topologico e sia  $N$  la componente dell'identità e nello spazio topologico  $G$ . Allora  $N$  è un sottogruppo normale di  $G$ .

*Dimostrazione.* Siano  $a$  e  $b$  due elementi di  $N$ . Poiché  $N$  è connesso, l'insieme  $aN^{-1}$  è anch'esso connesso e contiene  $e$ , e si ha  $aN^{-1} \subset N$ , in particolare  $ab^{-1} \in N$ , quindi  $N$  è un sottogruppo del gruppo algebrico  $G$ . Poiché le componenti sono chiuse, segue che  $N$  è un sottogruppo del gruppo topologico  $G$ . Che  $N$  è anche normale può essere mostrato in modo simile.  $\square$

**Teorema 1.5.2.** Un gruppo topologico  $G$  è generato da un intorno arbitrario dell'identità. Con questo si intende che  $G$  coincide con l'unione degli insiemi del tipo  $U^n$ , o anche che ogni elemento di  $G$  può essere scritto come prodotto finito di elementi appartenenti ad  $U$ .

Definiamo ora il sottogruppo centrale di un gruppo  $G$ , che verrà visto in seguito nel capitolo sui rivestimenti.

**Definizione 1.6.** Un elemento  $z$  di un gruppo  $G$  si dice centrale se commuta con ogni elemento di  $G$ , cioè se  $zx = xz$  per ogni  $x \in G$ , o, equivalentemente che  $x^{-1}zx = z$ . L'insieme  $Z$  di tutti gli elementi centrali di  $G$  è detto il centro di  $G$ .

Valgono per il centro  $Z$  le seguenti proprietà:

- Il centro  $Z$  è un sottogruppo

*Dimostrazione.* Siano  $z$  e  $z'$  elementi di  $Z$  allora per ogni  $x \in G$  abbiamo  $xzz' = zxx' = zz'x$  così che  $zz' \in Z$ . Inoltre, moltiplicando l'equazione  $xz = zx$  a destra e a sinistra per  $z^{-1}$  otteniamo che  $z^{-1}x = xz^{-1}$  così che  $z^{-1} \in Z$ .  $\square$

Ogni sottogruppo  $H$  del centro  $Z$  è un sottogruppo normale in  $G$ .

*Dimostrazione.* Infatti, se  $h \in H$  allora  $h \in Z$  e perciò  $x^{-1}hx = h \in H$  per ogni  $x \in G$ . In particolare il centro stesso è un sottogruppo normale.  $\square$

I sottogruppi di  $Z$  sono detti sottogruppi normali centrali.

Si noti che, per il sottogruppo normale  $N$  di  $G$ , si deve avere  $a^{-1}na \subset N$  per ogni  $n \in N$  e per ogni  $a \in G$ , mentre per il sottogruppo centrale si ha  $a^{-1}na = n$ .

Vale allora il seguente teorema:

**Teorema 1.5.3.** Ogni sottogruppo normale discreto  $N$  di un gruppo topologico connesso  $G$  è un sottogruppo centrale normale.

## 1.6 proprietà locali

Si è visto nei precedenti teoremi come quello che accade in un intorno dell'identità sia determinante per tutto il gruppo topologico. Dunque viene naturale studiare il gruppo topologico nelle sue proprietà locali ovvero relative ad un intorno dell'elemento neutro.

**Definizione 1.7.** Due gruppi topologici  $G$  e  $G'$  sono detti localmente isomorfi se esistono due intorni  $U$  ed  $U'$  delle rispettive identità  $e$  ed  $e'$  rispettivamente ed un omeomorfismo  $f$  di  $U$  su  $U'$  tale che:

- se  $x, y, e$  e  $xy \in U$  allora  $f(xy) = f(x)f(y)$
- se  $x', y'$  e  $x'y' \in U'$  allora  $f^{-1}(x'y') = f^{-1}(x')f^{-1}(y')$

Si dimostra che la seconda condizione è superflua.

La seguente proposizione fornisce un metodo per costruire gruppi tra loro localmente isomorfi:

**Proposizione 1.6.1.** *Sia  $G$  un gruppo topologico e sia  $N$  un sottogruppo discreto di  $G$ . Allora  $G$  e  $G/N = G'$  sono localmente isomorfi.*

*Dimostrazione.* Sia  $f$  la proiezione naturale di  $G$  su  $G'$ . Denoto con  $W$  un intorno dell'identità in  $G$  che non contenga elementi di  $N$  eccetto  $e$  e sia  $U$  un intorno dell'identità tale che  $UU^{-1} \subset W$ . Infine sia  $f(U) = U'$ . È facile vedere che  $f$  è additiva su  $U$ . Infatti, suppongo che  $x$  e  $y \in U$  siano mandati nello stesso elemento da  $f$ . Allora  $xy^{-1} \in N$  ma anche  $xy^{-1} \in W$  e conseguentemente  $xy^{-1} = e$  o  $x = y$ . Poiché  $f$  è continua e aperta ne segue che come applicazione tra  $U$  ed  $U'$  è pure continua. Vale allora la prima condizione della definizione e quindi  $G$  e  $G'$  sono localmente isomorfi ed  $f$  è un isomorfismo locale.

## Capitolo 2

# il gruppo fondamentale

Con il gruppo fondamentale si ha il passaggio dalla topologia all'algebra, e dunque da risultati algebrici posso ottenere informazioni prettamente topologiche, come ad esempio la semplice connessione, o posso verificare che due spazi connessi per archi non sono tra loro omeomorfi (mi basta verificare che i rispettivi gruppi fondamentali non sono isomorfi). In generale il gruppo fondamentale non è commutativo, ma la commutatività vale nel caso del gruppo fondamentale di un gruppo topologico.

### 2.1 omotopie e prodotti di cammini

Intuitivamente due funzioni continue  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  sono omotope se esiste una famiglia intermedia di funzioni continue  $f_t: X \rightarrow Y (0 \leq t \leq 1)$  che varia con continuità al variare di  $t$ .

**Definizione 2.1.** Due funzioni continue  $f_0, f_1$  sono dette omotope se esiste un'applicazione continua  $F: X \times I \rightarrow Y$  tale che  $F(x, 0) = f_0(x)$  e  $F(x, 1) = f_1(x)$  per ogni  $x \in X$ .

**Definizione 2.2.** Sia  $A$  un sottoinsieme di  $X$  e  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  due funzioni continue. Diremo che  $f_0, f_1$  sono omotope relativamente ad  $A$  se esiste un'omotopia  $F: X \times I \rightarrow Y$  tra  $f_0$  e  $f_1$  tale che, se  $a \in A$ ,  $F(a, t)$  non dipende da  $t$ ; in altre parole  $F(a, t) = f_0(a)$  per ogni  $a \in A$  e per ogni  $t \in I$ .

Diremo che  $f_0 \approx f_1$  (rel  $A$ ) se esiste un'omotopia relativa ad  $A$  tra le due funzioni.

**Lemma 2.1.1** (lemma d'incollamento). *Siano  $W$  e  $X$  due spazi topologici, con  $W = A \cup B$  dove  $A$  e  $B$  sono sottoinsiemi chiusi di  $W$ . Se  $f: A \rightarrow X$  e  $g: B \rightarrow X$  sono due funzioni continue tali che  $f(w) = g(w)$  per ogni  $w \in A \cap B$ , la funzione  $h: W \rightarrow X$  definita da  $h(w) = f(w)$  se  $w \in A$ ,  $g(w)$  se  $w \in B$  risulta continua.*

**Proposizione 2.1.2.** *La relazione  $\approx_A$  è una relazione di equivalenza sull'insieme delle funzioni continue da  $X$  a  $Y$ .*

*Dimostrazione.* La relazione è riflessiva ( $F(x, t) = f(x)$ ) e simmetrica (se  $F: f \approx_A g$  allora  $G: g \approx_A f$  dove  $G(x, t) = F(x, 1-t)$ ). Mi manca da dimostrare

la transitività. Siano  $F : f \approx_A g$  un'omotopia tra  $f$  e  $g$ , e sia  $G : g \approx_A h$  un'omotopia tra  $g$  e  $h$ ; allora la funzione  $H : X \times I \rightarrow Y$  definita da  $H(x, t) = F(x, 2t)$  se  $0 \leq t \leq 1/2$  e  $G(x, 2t - 1)$  se  $1/2 \leq t \leq 1$  risulta continua per il lemma di incollamento ed è un'omotopia tra  $f$  e  $h$  relativa ad  $A$ .  $\square$

**Definizione 2.3.** Se  $f$  e  $g$  sono due archi(o cammini) in uno spazio  $X$ , con  $f(1) = g(0)$  il loro prodotto è l'arco  $f * g$  (o più semplicemente  $fg$ ) definito da  $(f * g)(t) = f(2t)$  se  $0 \leq t \leq 1/2$ ,  $g(2t - 1)$  se  $1/2 \leq t \leq 1$

**Definizione 2.4.** Diremo che due archi  $f_0$  e  $f_1$  sono equivalenti (e lo indico con  $\sim$ ) se sono omotopi relativamente a  $\{0, 1\}$ .

Per la proposizione 2.1.2  $\sim$  è una relazione di equivalenza. In particolare posso considerare  $[f]$ , la classe di equivalenza dell'arco  $f$ . Posso anche definire il prodotto tra due classi  $[f][g] = [f * g]$  che risulta ben definito per la seguente proposizione.

**Proposizione 2.1.3.** Siano  $f_0, f_1, g_0, g_1$ , degli archi in  $X$ , con  $f_0(1) = g_0(0)$  e  $f_1(1) = g_1(0)$ . Se  $f_0 \sim f_1$  e  $g_0 \sim g_1$ , allora  $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$ .

*Dimostrazione.* Sia  $F$  un'omotopia tra  $f_0$  ed  $f_1$  e  $G$  un'omotopia tra  $g_0$  e  $g_1$ , definiamo  $H : I \times I \rightarrow X$  come  $H(t, s) = F(2t, s)$  se  $0 \leq t \leq 1/2$ ,  $G(2t - 1, s)$  se  $1/2 \leq t \leq 1$ .

Poiché  $F(1, s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0, s)$ ,  $H$  è continua per il lemma di incollamento; si vede quindi facilmente che  $H$  è un'omotopia tra  $f_0 * g_0$  e  $f_1 * g_1$ .  $\square$

Il prossimo lemma, che non dimostro, mi dice che il prodotto tra due classi risulta associativo.

**Lemma 2.1.4.** Siano  $f, g, h$  tre archi in  $X$  tali che  $f(1) = g(0)$  e  $g(1) = h(0)$ , allora  $(f * g) * h \sim f * (g * h)$ .

Dato un punto  $x \in X$ ,  $\varepsilon_x$  denota l'arco costante in  $x$ , la classe di equivalenza dell'arco si comporta come l'elemento neutro. Ovvero  $[\varepsilon_x][f] = [f] = [f][\varepsilon_y]$  Fornisco, senza dimostrazione i seguenti lemmi:

**Lemma 2.1.5.** Se  $f$  è un arco in  $X$  con punto iniziale  $x$  e punto finale  $y$ , allora  $\varepsilon_x * f \sim f \sim f * \varepsilon_y \sim f$ .

**Definizione 2.5.** Fissato  $f$  definisco l'arco  $\bar{f}$  come l'arco  $\bar{f}(t) = f(1 - t)$ .

Si verifica che due archi  $f$  e  $g$  sono equivalenti se e solo se  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  lo sono

**Lemma 2.1.6.** Se  $f$  un arco in  $X$  con punto iniziale  $x$  e punto finale  $y$ , allora  $f * \bar{f} \sim \varepsilon_x$  e  $\bar{f} * f \sim \varepsilon_y$ .

## 2.2 gruppo fondamentale

Abbiamo visto come l'insieme delle classi di equivalenza secondo la relazione di omotopia sembra soddisfare gli assiomi di gruppo. Abbiamo però due difficoltà: la prima è che il prodotto non è sempre ben definito, e la seconda è che l'elemento neutro non è fisso. Cerco quindi un sottoinsieme dell'insieme delle funzioni continue tale che il prodotto sia ben definito e che l'elemento neutro sia fissato.

**Definizione 2.6.** Un arco  $f$  è detto chiuso se  $f(0) = f(1)$ . Se  $f(0) = f(1) = x$ , diremo che  $f$  è un arco chiuso di base  $x$ .

**Definizione 2.7.** L'insieme delle classi di equivalenza di archi chiusi di base  $x \in X$  viene denotato con  $\pi(X, x)$ , ed è detto gruppo fondamentale di  $X$  con punto base  $x$ .

**Teorema 2.2.1.**  $\pi(X, x)$  è un gruppo.

*Dimostrazione.* Segue dai risultati della sezione precedente: il prodotto è quello  $f * g$ , l'elemento neutro è la classe  $[\varepsilon_x]$ ; l'inverso è dato da  $[f]^{-1} = [\bar{f}]$  e l'associatività segue dal lemma. 2.1.4  $\square$

Dato uno spazio topologico  $X$  non è detto che fissati due punti  $x$  e  $y$ , vi sia correlazione tra il gruppo fondamentale  $\pi(X, x)$  e  $\pi(X, y)$ , tuttavia vale il seguente

**Teorema 2.2.2.** Se esiste un arco in  $X$  dal punto  $x \in X$  al punto  $y \in X$ , allora i due gruppi  $\pi(X, x)$  e  $\pi(X, y)$  sono isomorfi.

*Dimostrazione.* Se  $f$  è un arco chiuso da  $x$  a  $y$ , per ogni arco chiuso  $g$  di base  $x$ ,  $(\bar{f} * g) * f$  è un arco chiuso di base  $y$ . Definisco allora

$$u_f : \pi(X, x) \rightarrow \pi(X, y)$$

come

$$u_f[g] = [\bar{f} * g * f] \quad (2.1)$$

L'applicazione  $u_f$  risulta un omomorfismo di gruppi, essendo.

$$\begin{aligned} u_f([g][h]) &= u_f[g * h] \\ &= [\bar{f} * g * h * f] \\ &= [\bar{f} * g * f * \bar{f} * h * f] \\ &= [\bar{f} * g * f][\bar{f} * h * f] \\ &= u_f[g]u_f[h] \end{aligned}$$

Inoltre utilizzando l'arco  $\bar{f}$  da  $y$  a  $x$ , possiamo definire  $u_{\bar{f}} : \pi(X, y) \rightarrow \pi(X, x)$  come  $u_{\bar{f}} = [f * h * \bar{f}]$ . Si verifica facilmente che  $u_{\bar{f}}u_f[g] = [g]$  e che  $u_fu_{\bar{f}}[h] = [h]$  ne segue che  $u_f$  è biiettiva, quindi è un isomorfismo.  $\square$

**Corollario 2.2.3.** Se  $X$  è uno spazio connesso per archi,  $\pi(X, x)$  e  $\pi(X, y)$  sono gruppi isomorfi per ogni coppia di punti  $x$  e  $y \in X$ .

Vediamo alcune proposizioni riguardanti l'effetto che una funzione continua tra due spazi topologici  $X$  e  $Y$  ha sui loro gruppi fondamentali. Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  è una funzione continua valgono le seguenti proposizioni:

1. Se  $f$  e  $g$  sono due archi in  $X$ ,  $\varphi f$  e  $\varphi g$  sono archi in  $Y$ .
2. Se  $f \sim g$ , allora  $\varphi f \sim \varphi g$ .
3. Se  $f$  è un arco chiuso in  $X$  di base  $x \in X$ ,  $\varphi f$  è un arco chiuso in  $Y$  di base  $\varphi(x) \in Y$ .

Quindi è ben definita la funzione

$$\underline{\varphi} : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x)) \quad (2.2)$$

come

$$\underline{\varphi}[f] = [\varphi f]. \quad (2.3)$$

**Lemma 2.2.4.**  $\underline{\varphi}$  è un omomorfismo di gruppi.

*Dimostrazione.* Si ha infatti  $\underline{\varphi}([f][g]) = \underline{\varphi}[f * g] = [\varphi f * \varphi g] = [\varphi f][\varphi g] = \underline{\varphi}[f]\underline{\varphi}[g]$   $\square$

**Teorema 2.2.5.** 1. Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  e  $\psi : Y \rightarrow Z$  sono due funzioni continue,  $\underline{\psi\varphi} = \underline{\psi}\underline{\varphi}$ .

2. Se  $1 : X \rightarrow X$  è l'applicazione identica,  $\underline{1}$  è l'omomorfismo identico di  $\pi(X, x)$ .

**Corollario 2.2.6.** Se  $\varphi : X \rightarrow Y$  è un omeomorfismo,  $\underline{\varphi} : \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$  è un isomorfismo.

Da questo corollario si deduce che, per vedere se due spazi connessi per archi non sono omeomorfi tra loro, basta vedere che i rispettivi gruppi fondamentali non sono isomorfi. Il viceversa non vale necessariamente.

**Definizione 2.8.** Uno spazio topologico  $X$  si dice semplicemente connesso se è connesso per archi e se  $\pi(X, x) = 1$  per qualche (e quindi per ogni)  $x \in X$ .

**Teorema 2.2.7.** Se  $X$  e  $Y$  sono due spazi connessi per archi, il gruppo fondamentale del prodotto è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi fondamentali di  $X$  e di  $Y$ .

*Dimostrazione.* Indico con  $p : X \times Y \rightarrow X$  e  $q : X \times Y \rightarrow Y$  le proiezioni e definiamo un'applicazione

$$\varphi : \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0) \quad (2.4)$$

mediante

$$\varphi[f] = (\underline{p}[f], \underline{q}[f]) = ([pf], [qf]) \quad (2.5)$$

Verifico che  $\varphi$  è ben definita. Se  $f \sim g$  esiste una funzione continua  $F : I \times I \rightarrow X \times Y$  tale che  $F(t, 0) = f(t)$ ,  $F(t, 1) = g(t)$  e  $F(0, s) = f(1, s) = (x_0, y_0)$ ; allora le funzioni  $pF : I \times I \rightarrow X$  e  $qF : I \times I \rightarrow Y$  sono due omotopie tra  $pf$  e  $pg$  e tra  $qf$  e  $qg$ . Quindi  $\varphi[f] = \varphi[g]$ , che vuol dire che  $\varphi$  è ben definita.

Vediamo ora la suriettività di  $\varphi$ : se  $([f_1][f_2])$  è un elemento di  $\pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ ,

allora  $\varphi[f] = ([f_1][f_2])$ , dove  $f : I \rightarrow X \times Y$  è definita da  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ . Ora vedo che  $\varphi$  è iniettiva: se  $\varphi[f] = \varphi[g]$ , allora  $F_1pf \sim pg$  e  $F_2qf \sim qg$ ; definendo  $F : I \times I \rightarrow X \times Y$  tramite  $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$ , otterremo allora un'omotopia tra  $f$  e  $g$  e quindi  $[f] = [g]$ . Che  $\varphi$  sia un isomorfismo segue dal fatto che  $p(f * g) = pf * pg$  e  $q(f * g) = qf * qg$  per ogni coppia di archi  $f, g : I \rightarrow X \times Y$  tali che  $f(1) = g(0)$ .  $\square$

Riprendiamo ora i gruppi topologici e vediamo che il gruppo fondamentale  $\pi(X, e)$ , dove  $X$  è un gruppo topologico ed  $e$  è l'elemento neutro del gruppo, risulta abeliano.

**Proposizione 2.2.8.** *Sia  $G$  un gruppo topologico. Allora fissati  $f$  e  $g$  in  $G$  con punto iniziale  $e$ , abbiamo che  $f * (f(1)g) \sim g * (fg(1))$ .*

*Dimostrazione.* Per provarlo considero la funzione  $\varphi(s, t) = f(s)g(t)$  (che è continua perché  $G$  è un gruppo topologico). Tale funzione manda il quadrato  $I \times I$  di vertici  $a = (0, 0), b = (1, 0), c = (1, 1), d = (0, 1)$  in  $G$ . I cammini dati dalle spezzate  $abc$  ed  $adc$  sono omotopi nel quadrato, inoltre  $abc$  è mandato da  $\varphi$  che è continua per ipotesi, in  $f*(f(1)g)$ , mentre  $adc$  è portato in  $g*(fg(1))$ . Segue la tesi.  $\square$

Da questo risultato segue in particolare che, se  $f$  e  $g$  sono cammini chiusi di un gruppo topologico,  $fg \sim gf$ , ovvero  $\pi(X, e)$  risulta abeliano.

Le seguenti due proposizioni generalizzano il risultato appena ottenuto.

**Proposizione 2.2.9.** *Siano  $f : I \rightarrow X$  e  $g : I \rightarrow Y$  due archi chiusi di base  $x_0$  e  $y_0$  rispettivamente. Se  $i : X \rightarrow X \times Y$  e  $j : Y \rightarrow X \times Y$  sono le inclusioni definite da  $i(x) = (x, y_0)$  e  $j(y) = (x_0, y)$  allora i due archi  $(if)*(jg)$  e  $(jg)*(if)$  sono equivalenti.*

*Dimostrazione.* Dimostro che  $p((if)*(jg)) \sim p((jg)*(if))$  e che  $q((if)*(jg)) \sim q((jg)*(if))$ . Si ha infatti

$$\begin{aligned} p((if)*(jg)) &= p(if) * p(jg) \\ &\sim f * \varepsilon_{x_0} \sim \varepsilon_{x_0} * f \\ &= p(jg) * p(if) \\ &= p(g * f) \end{aligned}$$

Ragionando in modo analogo per  $q((if)*(jg))$ , ottengo che  $p((if)*(jg)) \sim p((jg)*(if))$  e anche  $q((if)*(jg)) \sim q((jg)*(if))$ ; allora esisteranno due omotopie  $F_1 : p((if)*(jg)) \sim p((jg)*(if))$  ed  $F_2 : q((if)*(jg)) \sim q((jg)*(if))$ . Definisco quindi  $F : I \times I \rightarrow X \times Y$  tramite  $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$  ed ottengo quindi un'omotopia tra  $(if)*(jg)$  e  $(jg)*(if)$ .  $\square$

**Proposizione 2.2.10.** *Sia  $x_0$  un punto dello spazio  $X$  e supponiamo che esista una funzione  $\mu : X \times X \rightarrow X$  tale che  $\mu(x, x_0) = \mu(x_0, x) = x$  per ogni  $x \in X$ . Allora  $\pi(X, x_0)$  è abeliano.*

*Dimostrazione.* Siano  $f, g : I \rightarrow X$  due archi chiusi di base  $x_0$  e  $i, j : X \rightarrow X \times X$  le due inclusioni  $i(x) = (x, x_0), j(x) = (x_0, x)$ , allora  $\mu((if) * (jg)) = \mu(if) * \mu(jg) = f * g$ .

Poiché  $\mu$  è continua, si ha che se  $(if) * (jg) \sim (jg) * (if)$  (e questo è vero per la proposizione precedente), allora

$$f * g \sim \mu((if) * (jg)) \sim \mu((jg) * (if)) \sim g * f$$

□

Si noti infine che per l'omogeneità dei gruppi topologici, il gruppo fondamentale di un gruppo topologico non dipende dal punto fissato.

Questo fatto si può vedere anche senza sfruttare l'omogeneità: sia  $G$  un gruppo topologico e sia  $\phi(t)$  un cammino chiuso che contiene  $a$ . Definisco  $x(t)$  in questo modo:  $\phi(t) = a * x(t)$ , allora  $x(t)$  è un cammino chiuso che contiene  $e$ . Sia quindi  $\psi(t) = b * x(t)$ , questo è un cammino chiuso che contiene  $b$ . Fissati  $a, b$  ho definito una funzione  $F$  che mi manda un cammino chiuso in  $a$  in un cammino chiuso in  $b$ ,  $F(\phi(t)) = \psi(t)$ . È facile verificare che  $\phi_1 \sim \phi_2 \Leftrightarrow F(\phi_1) \sim F(\phi_2)$ .

# Capitolo 3

## rivestimenti

### 3.1 rivestimenti di spazi topologici

La teoria dei rivestimenti è un fondamentale strumento per il calcolo del gruppo fondamentale di uno spazio. In generale il gruppo fondamentale di uno spazio e quello del suo rivestimento risultano correlati, nel caso del gruppo fondamentale di un gruppo topologico tuttavia la relazione è ancora più forte, in quanto posso dotare il rivestimento universale di un gruppo topologico di una struttura di gruppo topologico e, in tal caso il gruppo fondamentale dello spazio base risulta isomorfo al kernel del rivestimento.

**Definizione 3.1.** Una funzione continua  $w$  di uno spazio topologico  $R^*$  su di uno spazio topologico  $R$  è detta un rivestimento, o una proiezione se ogni punto  $a \in R$  ha un intorno  $U$  tale che l'immagine inversa  $w^{-1}$  è l'unione di un numero finito o infinito di aperti disgiunti a due a due, ognuno dei quali è omeomorfo ad  $U$  mediante un'opportuna restrizione di  $w$ . Un intorno  $U$  avente questa proprietà è detto uniformemente rivestito e ognuno degli aperti  $V \subset R^*$  omeomorfi con  $U$  mediante  $w$  è detto un rivestimento proprio di  $U$ . Lo spazio  $R$  è detto lo spazio base, e  $R^*$  è detto lo spazio totale.

Alcuni esempi di rivestimenti:

- $e : \mathbf{R} \longrightarrow S^1$ , dove  $e(x) = e^{2\pi ix}$ .
- ogni omeomorfismo  $h : X \rightarrow X$
- $p : X \times Y \longrightarrow X$ , dove  $Y$  è uno spazio discreto e  $p$  è la proiezione sul primo fattore.

Nel seguito ci si occuperà in particolare di rivestimenti di spazi connessi per archi, localmente connessi per archi e localmente semplicemente connessi, tali che lo spazio totale sia connesso per archi (così che il gruppo fondamentale nello spazio non dipenda dal punto preso).

**Proposizione 3.1.1.** *Sia  $w$  una proiezione di uno spazio totale  $R^*$  su di uno spazio base  $R$ , sia  $U$  un intorno in  $R$  uniformemente rivestito e sia  $V$  un rivestimento proprio di  $U$  in  $R^*$ . Sia inoltre  $f$  una funzione continua di un arbitrario spazio connesso  $S$  in  $R^*$  tale che  $wf(S) \subset U$  e tale che l'intersezione  $f(S) \cap V$  non sia vuota. Allora  $f(S) \subset V$ .*

*Dimostrazione.* Infatti l'insieme connesso  $f(S)$  è contenuto in  $w^{-1}(U)$  e, conseguentemente non può intersecare contemporaneamente sia  $V$  che  $w^{-1}(U) \setminus V$ .  $\square$

**Definizione 3.2.** Sia  $w$  una proiezione di uno spazio  $R^*$  su  $R$  e sia  $f$  un cammino in  $R$ . Potremmo dire che un cammino  $f^*$  riveste  $f$  (o anche che è un sollevamento di  $f$ ) se  $wf^*(t) = f(t)$  con  $0 \leq t \leq 1$ .

**Proposizione 3.1.2.** Per ogni cammino  $f$  in  $R$  e per ogni fissato  $a^*$  in  $R^*$  tale che  $w(a^*) = a = f(0)$  esiste in  $R^*$  uno ed un solo sollevamento  $f^*$  di  $f$  avente come punto iniziale  $a^*$ . Inoltre se  $f$  è soggetto ad una omotopia che lascia fissato il punto iniziale  $a$ , allora anche  $f^*$  è soggetto ad un'omotopia che lascia fisso il punto iniziale  $a^*$ . Infine, se il punto finale di  $f$  rimane fissato mediante l'omotopia  $F$ , esiste un'omotopia che copre  $F$  per la quale accade lo stesso.

Come applicazione della proposizione considero il rivestimento  $\phi : \mathbf{R} \rightarrow S^1$  definita da  $\phi(x) = e^{2\pi ix}$ . Si verifica facilmente che questa funzione è un rivestimento.

Sia ora  $\chi : \pi(S^1, 1) \rightarrow \mathbf{Z}$  mediante  $\chi[\sigma] = \sigma'(1)$ , dove  $\sigma'$  è il sollevamento di  $\sigma$ . Per la proposizione sopra,  $\chi$  risulta ben definito. Si verifica inoltre che è un omomorfismo: siano  $[\sigma], [\tau] \in \pi(S^1, 1)$ . Sia  $m = \sigma'(1)$ ,  $n = \tau'(1)$ . Sia  $\tau''$  un cammino da  $m$  ad  $m+n$  (in  $R$ ), definito mediante  $\tau''(s) = \tau'(s) + m$ . Allora anche  $\phi \circ \tau'' = \tau$  così  $\sigma'\tau''$  è il sollevamento di  $\sigma\tau$  con punto iniziale 0. Il suo punto finale è  $m+n$ . Dunque  $\chi([\sigma][\tau]) = \chi[\sigma] + \chi[\tau]$ .  $\chi$  è suriettivo: dato  $n \in \mathbf{Z}$  definisco  $\sigma'(s) = ns$ . Se  $\sigma = \phi \circ \sigma'$ ,  $\chi[\sigma] = n$ . Devo infine far vedere che  $\chi[\sigma] = 0$  implica  $[\sigma] = 1$ . Sia dunque  $\chi[\sigma] = 0$ , così  $\sigma'$  è un cammino chiuso in  $R$  di base 0. In particolare  $\sigma'$  è omotopo a 0 per cui componendo l'omotopia con  $\phi$  (continua),  $\sigma \cong 1$ ,  $[\sigma] = 1$ . Questo prova il seguente teorema:

**Teorema 3.1.3.**

$$\pi(S^1) \cong \mathbf{Z} \quad (3.1)$$

L'unica proprietà di  $S^1$  usata in questa dimostrazione è che  $S^1$  è un gruppo topologico (come si è visto nel capitolo precedente), quoziente di  $\mathbf{R}$  per  $\mathbf{Z}$ . L'unica proprietà di  $\mathbf{R}$  utilizzata è che  $\mathbf{R}$  è un gruppo topologico semplicemente connesso. L'unica proprietà usata di  $\mathbf{Z}$  è che è un sottogruppo discreto di  $\mathbf{R}$ . Posso allora generalizzare il precedente risultato come segue:

**Teorema 3.1.4.** Se  $G$  è un gruppo topologico semplicemente connesso,  $H$  un sottogruppo normale discreto, allora

$$\pi(G/H, 1) \cong H \quad (3.2)$$

**Teorema 3.1.5.** Sia  $w$  una proiezione di uno spazio connesso per archi  $R^*$  su di uno spazio connesso per archi  $R$ . Sia  $p$  un punto fissato in  $R$  e sia  $p^*$  un qualsiasi punto di  $R^*$  tale che  $p^* \in w^{-1}(p)$ . Allora sia  $\underline{w} : \pi(R^*, p^*) \rightarrow \pi(R, w(p^*))$  l'omomorfismo definito precedentemente come  $\underline{w}[f] = [wf]$ , questo risulta un isomorfismo del gruppo fondamentale  $\pi(R^*, p^*)$  su di un sottogruppo  $\rho(w, p^*)$  del gruppo fondamentale  $\pi(R, p)$ . Inoltre, per ogni  $p' \in \rho(w, p^*)$  è esattamente uno dei sottogruppi coniugati a tale sottogruppo di  $\pi(R, p)$  che denoto con  $\sigma(w)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f^*$  un cammino chiuso in  $R^*$  in  $p^*$  e sia  $f = wf^*$ . Segue dal teorema precedente che se  $f$  è omotopicamente nullo in  $R$  allora anche  $f^*$  è anch'esso omotopicamente nullo in  $R^*$ . Dunque l'omomorfismo  $w$  è iniettivo e determina un isomorfismo su un sottogruppo  $\rho(w, p^*)$ . Siano ora  $p_1^*$  e  $p_2^*$  una coppia di punti appartenenti a  $w^{-1}(p)$ , sia  $f_1^*$  un cammino chiuso di base  $p_1^*$ ,  $f_2^*$  un cammino chiuso di base  $p_2^*$  e sia  $g^*$  un cammino che unisce  $p_1^*$  a  $p_2^*$ . Scriviamo  $wf_1^* = f_1$ ,  $wf_2^* = f_2$ ,  $wg^* = g$ , tutti e tre i cammini  $f_1, f_2, g$  sono cammini chiusi di base  $p$ . Poichè  $f_1^*$  e  $g^*f_2^*g^{*-1}$  sono entrambi cammini chiusi di base  $p_1^*$  segue che le loro immagini  $f_1$  e  $gf_2g^{-1}$  determinano gli elementi  $f_1$  e  $gf_2g^{-1}$  del sottogruppo  $\rho(w, p_1^*)$ . Similmente sia  $f_2$  che  $g^{-1}f_1g$  appartengono al sottogruppo  $\rho(w, p_2^*)$ . Poichè  $f_1$  ed  $f_2$  sono elementi arbitrari di  $\rho(w, p_1^*)$  e  $\rho(w, p_2^*)$  rispettivamente, ne segue che  $g\rho(w, p_2^*)g^{-1} \subset \rho(w, p_1^*)$  e anche  $g\rho(w, p_1^*)g^{-1} \subset \rho(w, p_2^*)$ . Ovvero

$$\rho(w, p_2^*) = g^{-1}\rho(w, p_1^*)g \quad (3.3)$$

Allora i sottogruppi  $\rho(w, p_1^*)$  e  $\rho(w, p_2^*)$  risultano coniugati. D'altra parte, se fissiamo un punto  $p_1^*$  nell'insieme  $w^{-1}(p)$ , scelto un qualsiasi elemento  $g$  del gruppo  $\pi(R, p)$ , sia  $g^*$  il cammino con punto iniziale  $p_1^*$ , sollevamento di  $g$ ; allora il punto finale  $g^*(1) = p_2^*$  appartiene anch'esso a  $w^{-1}(p)$ . Dunque vale l'uguaglianza sopra. Così un arbitrario sottogruppo di  $\pi(R, p)$  coniugato con  $\rho(w, p_1^*)$  è della forma  $\rho(w, p_2^*)$  dove  $p_2^* \in w^{-1}(p)$  e l'insieme di sottogruppi della forma  $\rho(w, p^*)$ ,  $p^* \in w^{-1}(p)$  costituisce esattamente una classe di sottogruppi coniugati.  $\square$

**Proposizione 3.1.6.** *Sia  $w$  un rivestimento di uno spazio  $R^*$  su  $R$ , sia  $p \in R$ ,  $p^* \in w^{-1}(p)$ , e siano  $f_1^*$  ed  $f_2^*$  due cammini in  $R^*$  con punto iniziale  $p^*$ . Allora i punti finali di  $f_1^*$  ed  $f_2^*$  coincidono se e solo se i punti finali delle loro immagini  $f_1 = w(f_1^*)$ ,  $f_2 = w(f_2^*)$  coincidono e  $f_1f_2^{-1} \in \rho(w, p^*)$ . In particolare,  $f_1^*$  è chiuso se e solo se  $f_1 \in \rho(w, p^*)$  ed è chiuso.*

*Dimostrazione.* Considero il caso particolare in cui  $f_1$  è chiuso. In particolare se  $f_1^*$  è chiuso si ha che  $f_1 \in \rho(w, p^*)$ , d'altra parte, se  $f_1 \in \rho(w, p^*)$  esiste un cammino chiuso  $h^*$  di base  $p^*$  la cui immagine  $h = wh^*$  appartiene alla classe  $f_1$ . Poichè  $h$  ed  $f_1$  sono omotopi, segue che è possibile deformare  $h$  in modo continuo fino ad  $f_1$ , senza muovere gli estremi, da cui segue dalla prop. 3.1.1 che il sollevamento  $h^*$  può essere deformato in modo continuo fino ad  $f_1^*$  senza muovere gli estremi, e siccome  $h^*$  è un cammino chiuso, lo è pure  $f_1^*$ . Ritorno al caso generale. In primo luogo, se  $f_1^*$  ed  $f_2^*$  hanno gli stessi estremi allora lo stesso è vero per le immagini  $f_1$  ed  $f_2$ . Inoltre  $f_1 * (f_2^*)^{-1}$  è chiuso, da cui si ha  $f_1f_2^{-1} \in \rho(w, p^*)$ . Suppongo d'altra parte che queste due condizioni siano soddisfatte. Il cammino  $f_1f_2^{-1}$  è rivestito da  $f_1 * (g_2^*)^{-1}$  dove  $g_2^*$  denota il cammino con punto iniziale  $f_1 * (1)$  che copre  $f_2^{-1}$ . Poichè, come abbiamo visto,  $f_1 * (g_2^*)^{-1}$  è chiuso, segue che  $(g_2^*)^{-1}$  deve avere come punto finale  $p^*$ . Allora  $g_2^*$  e  $f_2^*$  hanno entrambi punto iniziale  $p^*$  e rivestono lo stesso cammino  $f_2$ . Ne consegue che  $g_2^* = f_2^*$ , e, in particolare  $f_2 * (1) = g_2 * (1) = f_1 * (1)$ . Allora  $f_2^*$  e  $f_1^*$  hanno lo stesso punto finale. È una facile conseguenza di 3.1.1 che, se  $R$  è connesso per archi la cardinalità di  $w^{-1}(x)$ ,  $x \in R$ , è uguale all'indice del sottogruppo  $\rho(w, p^*)$  nel gruppo fondamentale  $\pi(R, p)$ , dove  $p \in R$

è un punto dello spazio base e  $p^*$  è un elemento di  $w^{-1}(p)$ . Infatti  $f \equiv g \pmod{\rho(w, p^*)} \Leftrightarrow fg^{-1} \in \rho(w, p^*)$ .  $\square$

**Teorema 3.1.7.** *Siano  $w_1$  e  $w_2$  due rivestimenti degli spazi  $R_1^*$  ed  $R_2^*$  sullo stesso spazio  $R$  connesso per archi e localmente connesso per archi. Sia  $p \in R$ ,  $p_1^* \in w_1^{-1}(p)$ ,  $p_2^* \in w_2^{-1}(p)$  e si supponga che  $\rho(w_1, p_1^*) \subset \rho(w_2, p_2^*)$ , allora esiste un rivestimento  $w$  di  $R_1^*$  su  $R_2^*$  tale che  $w_2 w = w_1$ . Nel caso in cui  $\rho(w_1, p_1^*) = \rho(w_2, p_2^*)$ , la mappa  $w$  è un omeomorfismo. Da questo segue, in particolare, che due rivestimenti  $w_1$  e  $w_2$  sono equivalenti se e solo se  $\sigma(w_1) = \sigma(w_2)$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $x_1^*$  un punto arbitrario di  $R_1^*$  e sia  $f_1^*$  un cammino arbitrario in  $R_1^*$  che porta  $x_1^*$  in  $p_1^*$ . Sia inoltre  $f = w_1 f_1^*$  la proiezione di questo cammino su  $R$  e sia  $f_2^*$  il cammino in  $R_2^*$  che riveste  $f$  e ha come punto iniziale  $p_2^*$ . Infine, sia  $x_2^*$  il punto finale di  $f_2^*$ . In questo modo associamo ad ogni  $x_1^* \in R_1^*$  un punto  $x_2^* \in R_2^*$ . La costruzione dipende solo dalla scelta di  $f_1^*$ . In generale, rimpiazzando  $f_1^*$  con un altro cammino che porta  $x_1^*$  in  $p_1^*$ , il punto  $x_2^*$  cambia; nel nostro caso tuttavia abbiamo  $\rho(w_1 p_1^*) \subset \rho(w_2, p_2^*)$  da cui segue da 3.1.3 che rimpiazzare il cammino  $f_1^*$  con un altro cammino avente gli stessi estremi, non ha effetti su  $x_2^*$ . Allora  $x_2^*$  è univocamente determinato dal punto  $x_1^*$  e definiamo  $x_2^* = w(x_1^*)$ . Ovviamente  $w_2 w = w_1$ . Inoltre, poiché la costruzione può essere fatta in ordine inverso, partendo da  $x_2^* \in R_2^*$ , per ottenere un punto  $x_1^* \in R_1^*$  per il quale  $w(x_1^*) = x_2^*$ , vediamo che  $w$  è suriettiva. Impiegando 3.1.3 ancora una volta, osservo che se  $\rho(w_1, p_1^*) = \rho(w_2, p_2^*)$ , allora  $w$  deve essere necessariamente iniettiva. Poiché un rivestimento iniettivo è necessariamente un omeomorfismo, la dimostrazione sarà completa una volta dimostrato che  $w$  è una proiezione di rivestimento.

Siano  $x_1^* \in R_1^*$ ,  $x_2^* = w(x_1^*)$ ,  $x = w_2(x_2^*)$ , e sia  $U$  un aperto connesso per archi in  $R$  che contiene  $x$  ed è propriamente rivestito sia da  $w_1$  che  $w_2$ . Denoto con  $V_i(x_i^*)$ ,  $i=1,2$ , quell'aperto in  $R_i^*$  rivestimento proprio di  $U$  che contiene  $x_i^*$ . Possiamo mostrare che  $w(V_1(x_1^*)) = V_2(x_2^*) = V_2(w(x_1^*))$  e che  $w$  è un omeomorfismo tra  $V_1(x_1^*)$  e  $V_2(x_2^*)$ . Siano  $f_1^*$ ,  $f$ ,  $f_2^*$  scelti come sopra, sia  $y_1^* \in V_1(x_1^*)$  e sia  $g_1^*$  un cammino in  $V_1(x_1^*)$  che porta  $y_1^*$  in  $x_1^*$ . Sia inoltre  $g = w_1 g_1^*$  e sia  $g_2^*$  un sollevamento in  $R_2^*$  di  $g$  avente come punto iniziale  $x_2^*$ . Chiaramente  $g_2^*$  è contenuto in  $V_2(x_2^*)$ . Inoltre  $f_2^* g_2^*$  è un sollevamento di  $fg$ . Allora  $w(y_1^*) \in V_2(x_2^*)$  e segue che  $w(V_1(x_1^*)) \subset V_2(x_2^*)$ . Inoltre questa mappa di  $V_1(x_1^*)$  in  $V_2(x_2^*)$  è data da  $w = w_2^{-1} w_1$  dove  $w_2^{-1}$  denota l'omomorfismo ben definito di  $U$  in  $V_2(x_2^*)$  inverso rispetto a  $w_2$ , ne segue che  $w$  è un omeomorfismo tra  $V_1(x_1^*)$  su  $V_2(x_2^*)$ . Suppongo ora che  $x_2^*$  sia un punto di  $R_2^*$ . Da quel che si è visto segue che l'immagine inversa  $w^{-1}(V_2(x_2^*))$  è l'unione di tutti gli insiemi del tipo  $V_1(x_1^*)$ ,  $x_1^* \in w^{-1}(x_2^*)$ . Allora  $V_2(x_2^*)$  è uniformemente rivestito da  $w$ . Ne segue, in particolare che  $w^{-1}(V_2(x_2^*))$  è aperto in  $R_1^*$ , e poiché  $V_2(x_2^*)$  costituisce una base nello spazio topologico  $R_2^*$ , l'argomento serve a mostrare che  $w$  è continua.  $\square$

**Teorema 3.1.8.** *Sia  $R$  uno spazio di Hausdorff connesso per archi, localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso. Sia  $p \in R$  e sia  $\rho$  un sottogruppo arbitrario del gruppo fondamentale  $\pi(R, p)$ . Allora esiste un rivestimento  $w$  di uno spazio connesso per archi  $R^*$  su  $R$  tale che  $\rho(w, p^*) = \rho$  per qualche  $p^* \in w^{-1}(p)$ .*

I due precedenti teoremi mi permettono di definire il rivestimento universale.

**Definizione 3.3.** Un rivestimento  $\tilde{w}$  di uno spazio connesso per archi  $\underline{R}$  su di uno spazio connesso per archi  $R$  è detto rivestimento universale ed  $\underline{R}$  è detto lo spazio totale universale di  $R$  se  $\underline{R}$  è semplicemente connesso. Segue dai teoremi 3.1.5 e 3.1.7 che se  $R$  è localmente connesso per archi e se  $w^*$  è un qualche rivestimento di uno spazio connesso per archi  $R^*$  su  $R$  allora esiste un rivestimento  $w$  di  $\underline{R}$  su  $R^*$  tale che  $w * w = \tilde{w}$ . E' per questa ragione che il rivestimento è detto universale.

Segue anche che il rivestimento universale è unico a meno di omeomorfismi. Infine il teorema 3.1.6 implica l'esistenza di un rivestimento universale per un arbitrario spazio  $R$  connesso per archi, localmente connesso per archi e localmente semplicemente connesso.

Sfruttiamo la teoria dei rivestimenti per un risultato relativo ai gruppi topologici.

**Teorema 3.1.9.** *Sia  $G$  un gruppo topologico connesso per archi, e sia  $D$  un qualsiasi sottogruppo discreto di  $G$ . Sia  $M = G/D$  lo spazio dei laterali (ad esempio destri). E' facile verificare che la proiezione  $w$  di  $G$  su  $M$  è un rivestimento. In questa situazione il sottogruppo  $\rho(w, e)$  del gruppo fondamentale  $\pi(M, w(e))$  è un sottogruppo normale centrale e il gruppo quoziente  $\pi(M, w(e))/\rho(w, e)$  è isomorfo con  $D$ . In particolare, se  $G$  è semplicemente connesso allora mi riconduco al teorema 3.1.4*

*Dimostrazione.* Con il termine "fascio" si indica una classe di equivalenza di coppie di cammini omotopi aventi punto iniziale  $e$ , e punto finale nel sottogruppo  $D$ . Se  $\{f\}$  e  $\{g\}$  sono due di queste classi allora è chiaro che la classe  $\{f(f(1)g)\}$  dipende unicamente da  $f$  e  $g$  e non dalla particolare scelta dei cammini  $f$  e  $g$ ; possiamo dunque definire l'operazione  $\{f\}\{g\} = \{f(f(1)g)\}$ . E' quindi introdotta un'operazione nell'insieme  $P$  di tutti i fasci. Si osserva che la collezione di tutti i fasci determinati da cammini chiusi in  $e$  è data precisamente dagli elementi del gruppo fondamentale  $\pi(G, e)$  e per due classi di equivalenza l'operazione sopra coincide con il loro prodotto considerandole come classi di equivalenza del gruppo fondamentale. Se  $\{f\}$  è un fascio allora  $wf$  è un cammino chiuso in  $M$  nel punto  $w(e)$  e siccome la classe di equivalenza  $\{wf\}$  dipende solo dalla classe  $\{f\}$  e non dal cammino  $f$  possiamo scrivere  $\bar{w}(\{f\}) = \{wf\}$ ; pertanto viene definita una mappa di  $P$  nel gruppo fondamentale  $\pi(M, w(e))$ . Ne segue che  $\bar{w}$  è una funzione 1 - 1 di  $P$  sull'intero gruppo fondamentale. Infatti, se  $f'$  è un arbitrario cammino chiuso in  $M$  nel punto  $w(e)$  e se  $f$  è un sollevamento di  $f'$ , avente come punto iniziale  $e$ , allora  $f(1) \in D$ , cosicché  $\{f\} \in P$  e poiché  $\bar{w}(\{f\}) = \{f'\}$  segue che  $w$  è suriettivo. D'altra parte se  $\{f'\} = \{g'\}$  allora i sollevamenti  $f$  e  $g$  appartengono allo stesso fascio, quindi  $\bar{w}$  è 1 - 1. Infine, vediamo che  $\bar{w}$  mantiene le operazioni di moltiplicazione tra fasci. Infatti poiché  $f(1) \in D$  abbiamo che  $wf(1)g = wg$  e conseguentemente

$$\bar{w}(\{f\}\{g\}) = \{w(f(f(1)g))\} = \{wf\}\{wg\} = \bar{w}(\{f\})\bar{w}(\{g\}). \quad (3.4)$$

ne segue che  $P$  forma un gruppo rispetto alle operazioni di moltiplicazione tra fasci e che  $w$  è un isomorfismo tra  $P$  e il gruppo fondamentale  $\pi(M, w(e))$ .

Dunque, dimostrare che  $\pi(M, w(e))/\rho(w, e)$  è isomorfo a  $D$  è equivalente a dimostrare che  $P/N$  è isomorfo a  $D$ . Un isomorfismo tra questi ultimi due è dato

da  $\{f\} \longrightarrow f(1)$ . Come è stato osservato, il gruppo fondamentale  $\pi(G, e) = N$  è un sottogruppo di  $P$ . Manca solo da dimostrare che  $N$  è un sottogruppo centrale. A questo fine, sia  $f$  un qualche cammino chiuso in  $e$  e sia  $g$  un cammino con punto iniziale  $e$  e punto finale in  $D$ . Siccome  $g^{-1}$  è un sollevamento dell'inverso di  $wg$  abbiamo che  $\{g\}^{-1} = \{g(1)^{-1}g^{-1}\}$ , e siccome il prodotto  $gg(1)f$  ha punto finale  $g(1)$  segue che  $\{g\}\{f\}\{g\}^{-1} = \{g(g(1)f)g^{-1}\}$ , ma si ha anche che  $g(g(1)f) \sim fg$ . Ne segue che  $\{g\}\{f\}\{g\}^{-1} = \{f\}$  e conseguentemente  $N$  appartiene al centro di  $P$ . □

Come applicazione di questo risultato costruisco il rivestimento universale e calcolo il gruppo fondamentale del toro  $n$ -dimensionale.

**Definizione 3.4.** Un insieme numerabile  $M$  di elementi di un gruppo  $G$  è un sistema di generatori per quel gruppo se ogni  $g \in G$  ammette un'espressione della forma  $g = a_1g_1 + \dots + a_kg_k$  dove  $g \in M$  e  $a_i$  è un intero.

Sia  $R$  il gruppo additivo dello spazio vettoriale reale di dimensione  $n$  e siano  $e_1, \dots, e_n$  una base in  $R$ . Denoto con  $D$  il sottogruppo discreto che consiste di tutte le combinazioni lineari a valori interi dei vettori  $e_1, \dots, e_n$  e sia  $w$  la proiezione naturale di  $R$  su  $R/D = T^n$ . Lo spazio  $T^n$  è omeomorfo ad un toro  $n$ -dimensionale per  $n \geq 2$  ed è una circonferenza se  $n = 1$ . Chiaramente  $w$  è il rivestimento universale di  $T^n$ . Sia  $f_i * (t) = te_i$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Allora il cammino  $wf_i * = f_i$  è chiuso in  $T^n$  e, segue facilmente dalla proposizione precedente che  $f_1, \dots, f_n$  costituisce un insieme di generatori per il gruppo fondamentale  $\pi(T^n, 0)$ . Allora  $\pi(T^n, 0)$  è un gruppo abeliano di rango  $n$ .

## 3.2 automorfismi di rivestimento

Sia  $w : R^* \rightarrow R$  un rivestimento, e sia  $e_0 \in w^{-1}(b_0)$ . Allora per la prop 3.1.6 esiste una corrispondenza biunivoca tra la fibra  $w^{-1}(b_0)$  e le classi laterali di  $\rho(w, e_0)$  in  $\pi(R, b_0)$  (la cardinalità delle fibre è uguale all'indice di  $\rho(w, e_0)$  in  $\pi(R, b_0)$ ). Inoltre per il teorema 3.1.5, se  $e, e'$  sono due punti di  $w^{-1}(b_0)$  allora  $\rho(w, e')$  e  $\rho(w, e'')$  sono sottogruppi coniugati di  $\pi(R, b_0)$ .

**Definizione 3.5.** Se  $w : R^* \rightarrow R$  è un rivestimento si definisce automorfismo di rivestimento di  $w$  ogni omeomorfismo  $\phi : R^* \rightarrow R^*$  tale che  $w \circ \phi = w$ . Ogni automorfismo di rivestimento lascia invarianti le fibre, cioè  $\phi(w^{-1}(x)) = w^{-1}(x)$  per ogni  $x \in R$ , operando ovviamente un permutazione sui punti della fibra. E' facile verificare che l'insieme  $Aut(w)$  degli automorfismi di rivestimento è un gruppo rispetto alla composizione.

I seguenti teoremi (senza dimostrazione) mi danno criteri di esistenza ed unicità per gli automorfismi di rivestimento.

**Teorema 3.2.1.** Sia  $e \in w^{-1}(b_0)$ , allora esiste al più un  $\phi \in Aut(w)$  tale che  $\phi(e_0) = e$ .

**Teorema 3.2.2.** Sia  $e \in w^{-1}(b_0)$ , allora esiste un  $\phi \in Aut(w)$  tale che  $\phi(e_0) = e$  se e solo se  $\rho(w, e_0) = \rho(w, e)$ .

Ne segue che la cardinalità di  $Aut(w)$  è minore o uguale al numero dei fogli del rivestimento. Il seguente teorema lega  $Aut(w)$  con il gruppo fondamentale dello spazio base  $R$ .

**Definizione 3.6.** Dato un sottogruppo  $H$  in un gruppo  $G$ , il normalizzatore di  $H$  ( $N(H)$ ) è così definito:

$$N(H) = \{a \in G / aHa^{-1} = H\} \quad (3.5)$$

**Teorema 3.2.3.** Sia  $w : R^* \rightarrow R$  un rivestimento allora si ha che

$$Aut(w) \cong N(H)/H \quad (3.6)$$

dove  $H = \rho(w, e_0)$  ed  $N(H)$  è il normalizzatore di  $H$  nel gruppo  $\pi(R, b_0)$ .

Se  $H$  è un sottogruppo normale, allora  $N(H)$  coincide con il gruppo fondamentale di  $B$ .

**Definizione 3.7.** Un rivestimento  $w : R^* \rightarrow R$  si dice regolare se  $\rho(w, e_0)$  è un sottogruppo normale di  $\pi(R, b_0)$  (dove  $e_0 \in w^{-1}(b_0)$ ).

Quindi, se  $R$  è un gruppo topologico il rivestimento è regolare (per un gruppo topologico il gruppo fondamentale è abeliano). Se  $p$  è regolare esiste una biiezione tra  $Aut(w)$  e la fibra  $w^{-1}(b_0)$  quindi la cardinalità di  $Aut(w)$  coincide con il numero di fogli del rivestimento.

Vale il seguente teorema:

**Teorema 3.2.4.** Se  $w : R^* \rightarrow R$  è un rivestimento regolare allora:

$$Aut(w) \cong \pi(R, b_0) / \rho(w, e_0) \quad (3.7)$$

dove, al solito  $e_0 \in w^{-1}(b_0)$

Si noti che nelle ipotesi di 3.1.9 si ha  $Aut(w) \cong D$ .

### 3.3 rivestimenti di gruppi topologici

In questo paragrafo verrà mostrato come un rivestimento in cui lo spazio totale è connesso per archi possa essere dotato, in modo naturale, della struttura di gruppo topologico. Nel caso del rivestimento universale otteniamo il gruppo di rivestimento universale. Segue dal teorema che il gruppo rivestimento universale è unico.

**Teorema 3.3.1.** Sia  $w$  un rivestimento di un gruppo topologico connesso per archi con spazio totale  $G^*$  su di uno spazio base  $G$ , connesso per archi e localmente connesso per archi. Allora è possibile definire in  $G^*$  un'operazione di moltiplicazione in modo tale che  $G^*$  diventi un gruppo topologico e  $w$  un omomorfismo di  $G^*$  su  $G$ . Chiaramente  $w$  è aperto e ha nucleo discreto.

*Dimostrazione.* Come identità  $e^*$  in  $G^*$  selezioniamo un arbitrario elemento dell'insieme  $w^{-1}(e)$ . Siano  $a^*$  e  $b^*$  due punti di  $G^*$  e siano  $f^*$  e  $g^*$  due cammini in  $G^*$  che connettono  $e^*$  ai due punti e scriviamo  $a = w(a^*)$ ,  $b = w(b^*)$ ,  $f = wf^*$ ,  $g = wg^*$ . Infine costruiamo il cammino  $h = f(ag)$ , sia  $h^*$  un altro cammino in  $G^*$  che solleva  $h$  ed ha come punto iniziale  $e^*$ , denotiamo con  $c^*$  il punto finale

di  $h_*$ . Possiamo mostrare che  $c_*$  dipende solo da  $a_*$  e da  $b_*$  e non dalla scelta dei cammini  $f_*$  e  $g_*$ . Supponiamo  $f_{1*}$  e  $g_{1*}$  siano due cammini che portano  $e_*$  in  $a_*$  e  $b_*$  e scriviamo  $f_1 = wf_{1*}$ ,  $g_1 = wg_{1*}$ . Se  $h_1 = f_1(ag_1)$  e  $h_{1*}$  denota il sollevamento in  $G_*$  di  $h_1$  e ha come punto iniziale  $e_*$ , mostriamo che  $h_*$  e  $h_{1*}$  hanno un comune punto finale. Per quanto visto nella proposizione 3.1.4 è sufficiente dimostrare che  $h_1h^{-1} \in \rho(w, e_*)$ . Ma allora

$$(3.8) \quad h_1h^{-1} = f_1(ag_1)(ag^{-1})f^{-1} = f_1(a(g_1g^{-1}))f^{-1} \sim (g_1g^{-1})(f_1f^{-1})$$

e, poiché  $f_1f^{-1} \in \rho(w, e_*)$ ,  $g_1g^{-1} \in \rho(w, e_*)$ , segue che

$$(3.9) \quad h_1h^{-1} \in \rho(w, e_*)$$

Allora  $c_*$  è univocamente determinato da  $a_*$  e da  $b_*$ . Quindi definiamo

$$(3.10) \quad c_* = a_* b_*$$

E' chiaro che  $w(a_* b_*) = w(a_*)w(b_*)$ . L'associatività del prodotto segue dall'associatività della moltiplicazione tra cammini. Inoltre  $e_*$  è l'elemento identità rispetto a questa. Infine, l'elemento inverso ad  $a_*$  è il punto finale del sollevamento del cammino  $a^{-1}f^{-1}$ . Allora  $G_*$  diventa un gruppo e  $w$  diventa un omomorfismo. Rimane da verificare che le operazioni di gruppo sono continue in  $G_*$ . Iniziamo mostrando che se  $f_*$  e  $g_*$  sono cammini in  $G_*$  allora il punto  $f_*(t)(g_*(t))^{-1}$  dipende in modo continuo dal parametro  $t$  cioè descrive un cammino in  $G_*$ . Poiché ogni cammino in  $G_*$  può essere visto come parte di un qualche cammino avente punto iniziale  $e_*$ , non c'è perdita di generalità nel supporre che  $f_*$  e  $g_*$  inizino entrambi in  $e_*$ . Siano

$$(3.11) \quad f = wf_*, g = wg_*, f_s(t) = f(st), g_s(t) = g(st)$$

Per definizione  $f_*(s)(g_*(s))^{-1}$  è il punto finale del cammino  $h_s^*$ , sollevamento di  $h_s$ , dove  $h_s$  è definito da  $h_s = f_s(f(s)(g(s))^{-1}g_s^{-1})$ . Da questa formula si vede che  $h_s$  dipende in modo continuo da  $s$ , ne segue che il sollevamento  $h_s^*$  dipende anch'esso in modo continuo da  $s$ . Ma allora così deve essere anche per  $f_*(s)(g_*(s))^{-1}$ . Siano ora  $a_*$  e  $b_*$  due punti di  $G_*$ . Sia  $c_* = a_*(b_*)^{-1}$ , scrivendo  $a = w(a_*)$ ,  $b = w(b_*)$ ,  $c = w(c_*)$  e prendendo un intorno  $W_*$  di  $c_*$  rivestimento proprio di qualche intorno  $W$  di  $c$ . Costruiamo gli intorni  $U_*, V_*$  di  $a_*$  e  $b_*$  rispettivamente, così che  $U_*V_*^{-1} \subset W_*$ . Poiché i rivestimenti propri  $W_*$  costituiscono una base in  $G_*$  questo completa la dimostrazione del teorema. Siano  $U$  e  $V$  due intorni uniformemente rivestiti di  $a$  e  $b$  tali che  $UV^{-1} \subset W$  e siano  $U_*$  e  $V_*$  due intorni di  $a_*$  e  $b_*$  che rivestono  $U$  e  $V$ . Se  $x_* \in U_*$  c'è un cammino  $f_*$  in  $U_*$  che porta  $x_*$  in  $a_*$ . Similmente, per ogni punto  $y_* \in V_*$  esiste un cammino  $g_*$  in  $V_*$  che porta  $y_*$  in  $b_*$ . Allora dal fatto che

$$(3.12) \quad w(f_*(s)(g_*(s))^{-1}) = wf_*(s)(wg_*(s))^{-1} \in UV^{-1} \subset W$$

e  $f_*(0)(g_*(0))^{-1} \in W_*$  e dal fatto che  $f_*(s)(g_*(s))^{-1}$  dipende in modo continuo da  $s$ , segue dalla proposizione 3.1.1 che  $f_*(s)(g_*(s))^{-1} \in W_*$ ,  $0 \leq s \leq 1$ . In particolare  $x_*(y_*)^{-1} = f_*(1)(g_*(1))^{-1} \in W_*$ . Allora  $U_* V_*^{-1} \subset W_*$  e la dimostrazione è completa.  $\square$

Vediamo una facile conseguenza: Sia  $w : G_* \rightarrow G$  un rivestimento universale dello spazio topologico  $G$ . Per il teorema precedente posso definire in  $G_*$  una struttura di gruppo in modo tale che  $G_*$  sia un gruppo topologico e  $w$  sia un omomorfismo aperto di  $G_*$  su  $G$  avente nucleo discreto. Quindi per il teorema 1.4.3 si ha che  $G_*/N$  isomorfo a  $G$  (dove  $N$  è il nucleo) e dunque (l'isomorfismo tra gruppi topologici è in particolare un omeomorfismo) segue  $\pi(G_*/N) \cong \pi(G)$ . D'altra parte, per il 3.1.4  $\pi(G/N) \cong N$  e dunque  $N \cong \pi(G)$ . Perciò, nel caso di un gruppo topologico, un metodo per ricavare il gruppo fondamentale di un gruppo topologico consiste nel trovare un gruppo di rivestimento universale e nel determinare il nucleo dell'omomorfismo di rivestimento.

**Teorema 3.3.2.** *Siano  $G$  e  $G'$  spazi topologici connessi per archi e supponiamo che  $G$  sia localmente connesso per archi e semplicemente connesso. Sia  $f$  un omomorfismo locale di  $G$  in  $G'$ . Allora è possibile estendere  $f$  in uno ed un solo modo ad un omomorfismo  $\varphi$  di  $G$  in  $G'$  che coincide con  $f$  in qualche intorno dell'identità in  $G$ . Se l'omomorfismo locale  $f$  è suriettivo allora  $\varphi$  è un omomorfismo di  $G$  in  $G'$ . Se  $f$  è aperto, allora così è anche  $\varphi$ . Se  $G'$  è anche localmente connesso per archi e semplicemente connesso e se  $f$  è un isomorfismo locale allora  $\varphi$  è un isomorfismo.*

Il precedente teorema ha due conseguenze: la prima è che il gruppo di rivestimento universale è unico, e la seconda è che, fissato un gruppo topologico  $G$  e considerata la classe di gruppi localmente isomorfi con  $G$  ogni gruppo ha lo stesso gruppo di rivestimento universale  $\tilde{G}$ .

Dimostro la prima: dato  $G$  gruppo topologico suppongo che  $G_*$  e  $\tilde{G}$  siano due gruppi di rivestimento universale di  $G$ . Allora vale

$$G_*/N \cong G \cong \tilde{G}/N' \quad (3.13)$$

Dove  $N$  ed  $N'$  sono i nuclei degli omomorfismi di rivestimento (che sono sottogruppi normali discreti) indicando con  $\sim$  la relazione di isomorfismo locale ho che, per la proposizione 1.6.1:

$$G_* \sim G_*/N \cong G \cong \tilde{G}/N' \sim \tilde{G} \quad (3.14)$$

Allora, per il teorema appena dimostrato, posso estendere l'isomorfismo locale tra  $G_*$  e  $\tilde{G}$  ad uno globale. Quindi vale l'unicità. Analogamente, sia  $G \sim G'$  con gruppi di rivestimento universali rispettivamente  $G_*$  e  $\tilde{G}'$ , tali che  $N$  ed  $N'$  siano i nuclei dell'omomorfismo di rivestimento, vale che:

$$G_* \sim G_*/N \cong G \sim G' \cong \tilde{G}'/N' \sim \tilde{G}' \quad (3.15)$$

Utilizzando nuovamente il teorema 3.3.2 segue la seconda implicazione. In particolare, se  $G \sim G'$  vale  $\pi(G) \cong N$  e  $\pi(G') \cong N'$  dove  $N$  ed  $N'$  sono sottogruppi discreti del gruppo di rivestimento universale comune a  $G$  e  $G'$ .

Si noti infine che se due gruppi topologici sono localmente isomorfi, i rispettivi

gruppi fondamentali non sono necessariamente isomorfi. Si prenda ad esempio  $\mathbf{R}$  ed  $\mathbf{R}/\mathbf{Z} = S^1$ , (con la proiezione data dall'esponenziale complesso) per la proposizione 1.6.1 i due gruppi risultano localmente isomorfi, ma  $\pi(S^1) \cong \mathbf{Z}$ , mentre  $\mathbf{R}$  risulta semplicemente connesso.

Nel seguente esempio utilizziamo alcuni dei risultati visti per determinare alcune proprietà dei gruppi delle rotazioni  $H_3$  ed  $H_4$ . Nel farlo utilizziamo i quaternioni e otteniamo, in particolare che i gruppi fondamentali  $\pi(H_3)$  e  $\pi(H_4)$  hanno ordine 2. Sia  $K$  l'anello dei quaternioni,  $D$  il campo dei numeri reali considerato come un sottocampo di  $K$ ,  $J$  l'insieme dei quaternioni immaginari, e  $G$  il gruppo moltiplicativo dei quaternioni che hanno modulo 1. Allora  $G$  è omeomorfo ad una sfera di dimensione 3 ed è quindi semplicemente connesso. Per ogni coppia di quaternioni  $x$  ed  $y$  appartenenti a  $G$  associamo una trasformazione lineare  $\varphi_{x,y}$  di  $K$  in sé, in accordo con la formula

$$\varphi_{x,y}(u) = xuy^{-1}, u \in K \quad (3.16)$$

Poiché  $|xuy^{-1}| = |u|$  segue che  $\varphi_{x,y}$  è una rotazione dello spazio euclideo  $K$ . Dunque, associando ad ogni elemento  $(x, y)$  di  $G \times G$  la rotazione  $\lambda(x, y) = \varphi_{x,y}$  otteniamo un omomorfismo  $\lambda$  di  $G \times G$  sul gruppo  $H_4$  di tutte le rotazioni dello spazio di dimensione 4,  $K$ . Il nucleo di  $\lambda$  consiste dei due elementi  $(1, 1)$  e  $(-1, -1)$ . Poiché  $G \times G$  è semplicemente connesso, risulta essere un gruppo di rivestimento universale e dunque il gruppo fondamentale  $\pi(H_4)$  ha ordine 2. Inoltre la trasformazione  $\psi_x = \varphi_{x,x}$  lascia fissata la retta  $D$  e manda  $J$  in sé. Allora  $\psi_x$  si può vedere come una rotazione dello spazio  $J$  e si può definire  $\mu(x) = \psi_x$ , otteniamo un altro omomorfismo  $\mu$  di  $G$  sul gruppo  $H_3$  delle rotazioni dello spazio  $J$ . Il nucleo di  $\mu$  coincide con il centro di  $G$  e consiste degli elementi 1 e  $-1$ . Allora  $H_3$  ha centro triviale e il suo gruppo fondamentale è di ordine 2.

## Capitolo 4

# conclusioni

Dovendo sintetizzare i principali risultati visti relativi al gruppo fondamentale di uno spazio topologico, si potrebbero così elencare: il gruppo fondamentale di un gruppo topologico è abeliano (risultato che ho esteso alla fine del secondo capitolo, vedi 2.2.9 e 2.2.10); il gruppo fondamentale del quoziente di un gruppo topologico  $G$  per un sottogruppo discreto  $D$  è in relazione (se non addirittura isomorfo) con  $D$  (risultati 3.1.4 e 3.1.9); ed infine il gruppo fondamentale di un gruppo topologico può essere calcolato determinando il gruppo di rivestimento universale (che sotto certe condizioni esiste ed è unico) e calcolando il nucleo della proiezione associata; quest'ultimo risultato è particolarmente importante e non possiede un analogo nel caso di uno spazio topologico generico; ovviamente il limite principale di questo metodo consiste nella difficoltà nel trovare un rivestimento universale di un gruppo topologico (e di uno spazio in generale).

# Bibliografia

- [1] Marvin Greenberg, *Lectures on Algebraic Topology*, W.A Benjamin, Inc, 1967
- [2] Czes Kosniowski, *introduzione alla topologia algebrica*, Zanichelli, 2004
- [3] L.S.Pontryagin, *Topological groups*, Gordon and Breach,1966
  - *Sur les groupes abéliens continus*, Comptes Rendus, Paris,(1934)
  - *The theory of topological commutative groups*, Ann.Math.,35(1934)
- [4] J.H.Poincarè, *Analysis situs*, J.de l'Ecole Polytechnique,1895
- [5] S.T Hu,*Homotopy Theory*, Academic Press, 1959
- [6] Cartan,E, *Sur la structure des groupes de transformations finis et continus*, Thèse,1894
- [7] Cartan,E.,*La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs*, Mém.Sci.Math,Paris,1930
- [8] Hamilton,William Rowan, *Elements of quaternions*, Longman,Green, 1899

# ringraziamenti

Ringrazio il professor Massimo Ferri per la disponibilità fornita in questi mesi. Ringrazio inoltre tutte le persone alle quali devo questo importante risultato. I miei genitori ed i miei nonni, e tutte i miei compagni di corso che in questi anni mi hanno sostenuto moralmente e logisticamente, : Elisa, Agnese, Francesca, Cristina, Francesco, Marco, Eleonora, Monica, Stefania, Claudia, Sara e tanti altri. Ringrazio inoltre l'ingegner Paolo Borghi per aver avere anticipato il contenuto della mia tesi al professor Ferri. Nella speranza che nel frontespizio della prossima non appaia la scritta "2013/14".