Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea in Matematica

TOPOLOGIA DEI COMPLESSI SIMPLICIALI CASUALI

Tesi di Laurea in Topologia Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
MASSIMO FERRI

Presentata da:
FEDERICO BERGAMI

II Sessione
Anno Accademico 2013/2014

Ai miei e a Lollo,
per il sostegno e l'esempio che ricevo
quotidianamente.

Penso che la matematica sia una delle manifestazioni più significative dell'amore per la sapienza e come tale la matematica è caratterizzata da un lato da una grande libertà e dall'altro da una intuizione che il mondo diciamo è grandissimo, è fatto di cose visibili e invisibili, e la matematica ha forse una capacità unica tra tutte le scienze di passare dalla osservazione delle cose visibili all'immaginazione delle cose invisibili. Questo forse è il segreto della forza della matematica.

Ennio de Giorgi

Indice

Elenco delle figure **iii**

Introduzione **1**

Premessa **3**

1 Grafi Casuali **5**

1.1 Introduzione storica 5

1.2 Teoria dei grafi casuali 6

1.2.1 Funzioni di soglia e transizione di fase 8

1.3 Esempi notevoli 9

1.3.1 Inclusione di K_4 10

1.3.2 Vertici isolati 13

1.3.3 Connessione 14

2 Complessi casuali **19**

2.1 Immersioni ed embedding simpliciali 21

3 Stato dell'arte **29**

3.1 Modello di Linial-Meshulam 29

3.2 Flag complexes casuali 31

3.2.1 Omologia e coomologia 31

3.2.2 Numeri di Betti 33

3.3 Direzioni di ricerca 34

Conclusione **37**

Bibliografia **39**

Elenco delle figure

1.1 *Random graph process* per G(12,20) 7
1.2 Esempi significativi di grafi casuali 18

2.1 *Random 2-complex process* per Y(12,15) 20

3.1 Andamento del primo gruppo di omologia a coefficienti razionali per un complesso $Y(n,p)$ 31
3.2 *Random flag complex process* per X(G(12,14)) 32
3.3 Andamento dei gruppi di omologia a coefficienti interi per un complesso $X(n,p)$ 33

Introduzione

La possibilità di attingere ad un serbatoio pressoché illimitato di dati ed il progresso in ambito tecnologico e computazionale hanno recente stimolato lo sviluppo di nuove branche della topologia algebrica applicata, il cui obiettivo è di teorizzare nuovi strumenti ed algoritmi per rendere efficace l'approccio topologico nelle applicazioni. Tali settori possono essere suddivisi a grandi linee nel seguente modo:

1. Topologia algebrica computazionale;
2. Robotica topologica;
3. Topologia stocastica;
4. Topologia algebrica combinatoria.

La teoria dei complessi casuali appartiene al filone della *topologia stocastica*, la quale nasce dall'idea che nelle moderne applicazioni che coinvolgono sistemi meccanici articolati il concetto classico di spazio delle configurazioni risulti spesso inadeguato a causa dell'incompletezza dei dati disponibili. Risulta quindi più realistico assumere che lo spazio dei possibili stati del sistema sia solo parzialmente noto ed integrare le informazioni a propria disposizione con fattori aleatori. Ciò che sorprende maggiormente nella teoria dei complessi casuali è la possibilità, attraverso l'utilizzo del metodo probabilistico, di conoscere con notevole precisione le proprietà topologiche dei nuovi spazi introdotti nonostante l'alto grado di casualità che li caratterizza.
Come poi spesso accade nella matematica, l'auspicio è di poter utilizzare

risultati e strumenti propri di questa nuova teoria per affrontare problemi classici della matematica pura, come nel caso della congettura di Whitehead.

La presente tesi si propone di fornire un breve compendio su questa recente teoria illustrandone i risultati principali. In particolare, si è voluto enfatizzare le modalità che permettono di affrontare con strumenti probabilistici lo studio delle proprietà topologiche ed algebriche dei complessi casuali.

Nel primo capitolo viene presentata la teoria dei grafi casuali ed i suoi concetti fondamentali, con lo scopo di porre in evidenza la forte connessione che intercorre fra queste due teorie.
Il secondo capitolo è costituito dall'introduzione del modello di Linial-Meshulam e dallo studio delle condizioni di inclusione di superfici triangolate in complessi simpliciali casuali.
L'ultimo capitolo è invece dedicato all'illustrazione dei risultati più significativi e all'esposizione di alcuni problemi ancora aperti.

Premessa

Il presente elaborato dà per acquisiti i seguenti risultati di Teoria della Probabilità, riconducibili in modo più o meno diretto alla *disuguaglianza di Markov*: sia X una variabile aleatoria, vale allora:

$$\mathbb{P}[X \geq \alpha] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{\alpha} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0.$$

Proposizione 0.0.1. *Se X_n è una successione di variabili aleatorie intere e non negative si ha che:*

$$\mathbb{P}[X_n > 0] \leq \mathbb{E}[X_n].$$

Proposizione 0.0.2 (First moment method)**.** *Se X_n è una successione di variabili aleatorie intere e non negative tale che $\mathbb{E}[X_n] \to 0$, allora:*

$$\mathbb{P}[X_n = 0] \to 1 \ \textit{per} \ \ n \to \infty.$$

Proposizione 0.0.3 (Second moment method)**.** *Sia X_n una successione di variabili aleatorie intere non negative tale che $\mathbb{E}[X] \to \infty$ e $Var[X_n] = o(\mathbb{E}[X_n]^2)$, allora:*

$$\mathbb{P}[X_n > 0] \to 1 \ \textit{per} \ \ n \to \infty.$$

Corollario 0.0.4. *Siano $\{A_i\}_{i=1,2...m}$ eventi aleatori con probabilità $p = p(n)$ e $X = X_1 + X_2 + ... + X_m$, con X_i variabile indicatrice dell'evento A_i. Posto*

$$\Delta = \sum_{i \sim j} \mathbb{P}[A_i \cap A_j]$$

dove $i \sim j$ *sta per* $i \neq j$ *e* A_i, A_j *non indipendenti, se* $\mathbb{E}[X] \to \infty$ *e* $\Delta = o(\mathbb{E}[X]^2)$ *allora:*

$$\mathbb{P}[X > 0] \to 1 \text{ } per \text{ } \text{ } n \to \infty.$$

Per una trattazione esaustiva di tali argomenti si rimanda a [10],[17].

Verranno inoltre utilizzate le seguenti notazioni:

- $p(n) \ll q(n)$ se e solo se $p(n) = o(q(n))$;
- $p(n) \gg q(n)$ se e solo se $p(n) = \omega(q(n))$;
- $p(n) \asymp q(n)$ se e solo se $p(n) = O(q(n))$ e $q(n) = O(p(n))$.

Capitolo 1

Grafi Casuali

In questo capitolo, in seguito ad un breve resoconto storico sulla teoria dei grafi casuali, vengono introdotti i concetti fondamentali che la caratterizzano. L'ultima sezione è dedicata ad alcuni esempi di ricerca di *funzioni di soglia*.

1.1 Introduzione storica

Lo studio della topologia dei 2-complessi simpliciali casuali non può prescindere da quello dei grafi casuali, di cui sono estensione bidimensionale. La teoria dei grafi casuali prese forma nella seconda metà del secolo scorso con la pubblicazione dell'articolo "*On Random Graphs*" (1959) per opera di Paul Erdős e Alfred Rényi, a cui si aggiunsero presto i contributi di Austin, Fagen, Penney e Riordan. Ciò che maggiormente caratterizza tale teoria è che fu la prima branca della matematica ad utilizzare come principale strumento di indagine il metodo probabilistico, anch'esso sviluppato da Erdős, che consiste in un metodo non costruttivo atto ad ottenere dimostrazioni di esistenza.
Più precisamente, fissata una classe $\mathcal{Q}$ di oggetti $\mathbf{G}$ ed una determinata proprietà $\mathbf{q}$, per provare l'esistenza di oggetti della classe che godono di tale proprietà il metodo probabilistico si propone di dimostrare che:

$$\mathbb{P}[\mathbf{G} \in \mathbf{q}] > 0.$$

Tale metodo è stato poi utilizzato in vari rami della matematica pura, come testimoniano alcuni risultati qui di seguito esemplificati:

- **Analisi**: l'impossibilità di estendere la disuguaglianza di Hausdorff-Young per $p < 2$, l'esistenza e la computabilità di numeri normali;
- **Algebra**: studio probabilistico dei gruppi, teorema fondamentale dell'algebra;
- **Geometria**: disuguaglianza del toro di Loewner.

I risultati conseguiti finora e le prospettive dei futuri impieghi del metodo probabilistico (in particolare nella *Topological data analysis*) permettono di considerare la teoria dei grafi casuali non solo come una valida teoria a se stante, ma anche come il primo esempio di un nuovo e fecondo *modus operandi*. Poiché i concetti generali introdotti e le tecniche utilizzate per lo studio dei 2-complessi casuali coincidono con quelli propri della teoria dei grafi casuali, è opportuno qui richiamare una sintetica introduzione di quest'ultima, atta ad evidenziare l'approccio sistematico che caratterizza questi due ambiti della topologia.

1.2 Teoria dei grafi casuali

Definizione 1.1. Per ogni numero naturale n e per p reale, con $0 \leq p \leq 1$, un grafo di Erdős-Rényi $G(n, p)$ è definito come il grafo di n vertici $[n] = \{1, ...n\}$ i cui spigoli appaiono indipendentemente con probabilità p.

Possiamo notare che se G è un grafo fissato di n vertici, indicando con e_G il numero dei suoi lati, la probabilità di ottenere G come grafo casuale $G(n, p)$ è $p^{e_G}(1-p)^{\binom{n}{2}-e_G}$.
Talvolta è preferibile lavorare con un altra tipologia di grafi casuali strettamente collegati a quelli appena introdotti:

Definizione 1.2. Per $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$, il grafo di Erdős-Rényi $G(n, m)$ è il grafo di n vertici con m spigoli, scelto uniformemente fra tutti gli $\binom{\binom{n}{2}}{m}$ grafi con tali proprietà.

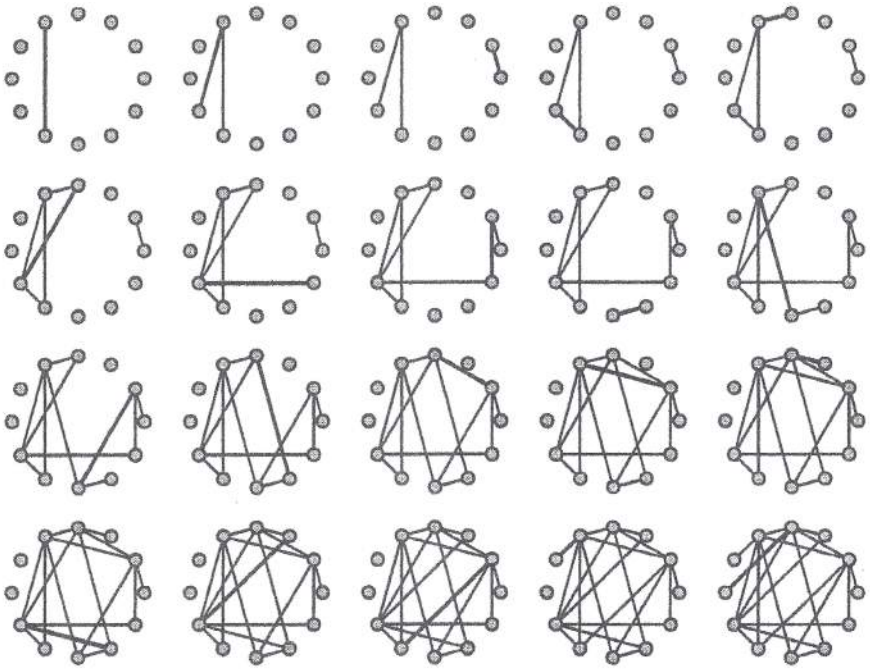


Figura 1.1: *Random graph process* per G(12,20)

Uno dei vantaggi di quest'ultimo modello consiste nella possibilità di introdurre il '*random graph process*', rappresentato nella figura (1.1), che permette di dare una definizione operativa di grafo casuale: $G(n, m)$ si può ottenere mediante il processo

$$\{G(n, m)\}_{i=1}^{m}$$

in cui l' i-esimo lato è scelto uniformemente fra i rimanenti $\binom{n}{2} - (i-1)$. Osserviamo che è possibile passare da una definizione all'altra in modo quasi immediato: un grafo $G(n, m)$ può esser visto come $G(n, p)$ con $p = \frac{m}{\binom{n}{2}}$ e viceversa $G(n, p)$ è analogo a $G(n, m)$ con $m = p \cdot \binom{n}{2}$.

Generalmente si è interessati allo studio delle proprietà topologiche dei grafi casuali nel caso in cui il numero dei loro vertici tende a più infinito. A tal proposito si introduce la seguente notazione: se $\mathcal{Q}$ è una proprietà si dice che $G(n, p)$ ha la proprietà $\mathcal{Q}$ *w.h.p.* (dall'inglese *with high probability*) se $\mathbb{P}[G(n, p) \in \mathcal{Q}] \to 1$ per $n \to \infty$.

In tal caso anche il valore di probabilità p dipende dal numero dei vertici, cioè $p = p(n)$, e l'oggetto di studio è quindi il grafo casuale $G(n, p(n))$ che, con abuso di notazione, viene sempre indicato con $G(n, p)$.

Definizione 1.3. Siano G e H grafi con n vertici tali che $G \subseteq H$, allora una proprietà $\mathcal{Q}$ si dice *monotòna crescente* se $G \in \mathcal{Q}$ implica $H \in \mathcal{Q}$ (es. connessione, contenere un ciclo). Allo stesso modo, $\mathcal{Q}$ è *monotòna decrescente* se $H \in \mathcal{Q}$ implica $G \in \mathcal{Q}$ (es. k-colorabile).

Si dirà poi che una proprietà è *banale* se ne godono tutti i grafi (avere un numero di vertici > 0) o nessuno grafo (contenere un 2-simplesso), *non banale* altrimenti.

1.2.1 Funzioni di soglia e transizione di fase

Le proprietà monotòne e non banali dei grafi casuali $G(n, p)$ sono sottoposte a cambiamenti strutturali in corrispondenza del passaggio di p da particolari valori di '*soglia*'. Questo fenomeno, che talvolta avviene in modo improvviso, prende il nome di *transizione di fase* essendo simile a quella che si verifica in ambiti fisici quando la temperatura o la pressione aumentano.

Definizione 1.4. Sia $\mathcal{Q}$ una proprietà monotòna crescente di un grafo e $\hat{p} = \hat{p}(n)$ una successione di probabilità, allora $\hat{p}$ è una *funzione di soglia* per $\mathcal{Q}$ se:

$$\mathbb{P}[G(n, p) \in \mathcal{Q}] \to \begin{cases} 1 & \text{se } p \gg \hat{p} \\ 0 & \text{se } p \ll \hat{p} \end{cases}$$

Se $\hat{p}$ è una funzione di soglia diremo che in corrispondenza di essa avviene una *transizione di fase*. Il seguente teorema, ampiamente approfondito in [4], fornisce una prima caratterizzazione delle proprietà che ammettono funzioni di soglia:

Teorema 1.2.1 (Bollobás et Thomason, 1987)**.** *Ogni proprietà monotòna non banale ammette una funzione di soglia.*

Si introduce anche un concetto più restrittivo di funzione di soglia che formalizza il cambiamento improvviso a cui abbiam fatto prima riferimento.

Definizione 1.5. $\hat{p}$ è *funzione di soglia stretta* per $\mathcal{Q}$ se esiste una funzione $g = o(\hat{p})$ tale che

$$\mathbb{P}[G(n,p) \in \mathcal{Q}] \to \begin{cases} 1 & \text{se } \ p \geq \hat{p} + g \\ 0 & \text{se } \ p \leq \hat{p} - g \end{cases}$$

o, equivalentemente, se

$$\mathbb{P}[G(n,p) \in \mathcal{Q}] \to \begin{cases} 1 & \text{se } \ p = c \cdot \hat{p}, \ \ c > 1 \\ 0 & \text{se } \ p = c \cdot \hat{p}, \ \ c < 1 \end{cases}$$

La peculiarità delle funzioni di soglia strette è che, a differenza del caso generale, la transizione di fase dalla probabilità 0 alla probabilità 1, cioè dal caso certo in cui $G(n,p) \notin \mathcal{Q}$ a quello certo ove $G(n,p) \in \mathcal{Q}$, avviene in modo molto rapido.
A seguito del risultato ottenuto da Bollobás e Thomason si discusse ampiamente la possibilità di individuare le caratteristiche delle proprietà che ammettessero funzioni di soglia strette. Il quesito venne risolto da Friedgut che nel 1999 ne individuò le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza in [8].
In generale, la ricerca di funzioni di soglia, strette o meno, per le proprietà topologiche rappresenta il principale argomento trattato nelle teorie dei grafi e dei 2-complessi casuali. Per questa ragione, vengono proposti qui di seguito alcuni esempi di come sia possibile ottenere tali valori.

1.3 Esempi notevoli

Nella sezione seguente individueremo le funzioni di soglia per tre proprietà monotòne e non banali dei grafi: l'inclusione del grafo completo K_4, l'esistenza di vertici isolati e la connessione. In particolare, quest'ultimo è noto come *Teorema di Erdős-Rényi* ed è il risultato principale esposto nell'articolo "*On random graphs*".

Questo è il metodo scelto per determinare le funzioni di soglia: studiamo l'andamento asintotico del valore di aspettazione di una variabile aleatoria che rappresenti la proprietà $\mathcal{Q}$ ed utilizziamo successivamente i risultati enunciati nella **Premessa**.

1.3.1 Inclusione di K_4

Fissato un grafo G diciamo che $G \in Q_m$ se e solo se G contiene un sottografo isomorfo a K_m. Chiamando con X_m la variabile casuale che conta il numero dei K_m presenti in G, si ha che $G \in Q_m$ se e solo se $X_m(G) > 0$. Facciamo ora due osservazioni di carattere generale che ci consentono di enunciare un teorema che dimostreremo nel caso particolare di K_4.

Osservazione 1. Fissato n e considerando l'aspettazione matematica sull'insieme dei grafi $G(n,p)$, si ha che:

$$\mathbb{E}(X_m) = \binom{n}{m} p^{\binom{m}{2}}.$$

Dimostrazione. Per ogni n fissato esistono $\binom{n}{m}$ m-uple distinte di vertici che possono generare K_m e sia quindi, per ogni $i \in \binom{[n]}{m}$, A_i il grafo K_m avente come vertici la m-upla i. Siccome ogni lato esiste indipendentemente con probabilità p e poiché $\binom{m}{2}$ è il numero dei lati che devono apparire, se indichiamo con $Y_i = \chi_{A_i}$ la variabile indicatrice si ha che $\forall i \quad \mathbb{P}(A_i) = p^{\binom{m}{2}}$.
Per quanto osservato finora, X_m è la somma delle variabili indicatrici Y_i, cioè $X_m = \sum_{i \in \binom{[n]}{m}} Y_i$ da cui, per linearità del valore atteso:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_m) &= \mathbb{E}\left[\sum_{i \in \binom{[n]}{m}} Y_i\right] \\ &= \sum_{i \in \binom{[n]}{m}} \mathbb{E}(Y_i) \\ &= \sum_{i \in \binom{[n]}{m}} p^{\binom{m}{2}} = \binom{n}{m} p^{\binom{m}{2}} \end{aligned}$$

□

Osservazione 2. Se m è fissato, per la formula di Stirling [1] si osserva che

$$\mathbb{E}(X_m) = \binom{n}{m} p^{\binom{m}{2}} \asymp n^m p^{\binom{m}{2}}.$$

Scegliendo quindi $p = p(n) = n^{\frac{-2}{(m-1)}}$, si ottiene:

$$n^m p^{\binom{m}{2}} = n^m n^{-\frac{2}{m-1} \cdot \frac{m(m-1)}{2}} = n^{m-m} = 1.$$

E' quindi possibile dimostrare [2] che

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_n] \to \infty & \text{se } p \gg n^{\frac{-2}{(m-1)}} \\ \mathbb{E}[X_n] \to 0 & \text{se } p \ll^{\frac{-2}{(m-1)}} \end{cases}$$

La stima dell'andamento asintotico dell' aspettazione appena ottenuta e gli strumenti probabilistici enunciati nella **Premessa** ci permettono di ipotizzare la validità del seguente teorema, che ci limitiamo a dimostrare nel caso $m = 4$.

Teorema 1.3.1. *Per un grafo casuale $G(n,p)$ valgono le seguenti:*

1. *se $p \ll n^{\frac{-2}{(m-1)}}$, allora $\mathbb{P}[G(n,p) \supseteq K_m] \to 0$ per $n \to \infty$*
2. *se $p \gg n^{\frac{-2}{(m-1)}}$, allora $\mathbb{P}[G(n,p) \supseteq K_m] \to 1$ per $n \to \infty$*

Teorema 1.3.2. *$n^{-\frac{2}{3}}$ è una funzione di soglia per $G(n,p) \supseteq K_4$.*

Dimostrazione. Sia $X := X_n$ il numero di K_4 presenti in $G(n,p)$; già sappiamo che $\mathbb{E}[X] = \binom{n}{4} p^6 \asymp n^4 p^6$. Abbiamo quindi che:

1. $p \ll n^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \mathbb{E}[X_n] \to 0$, da cui per il *first moment method* $X = 0$ *w.h.p.*

[1] Per m fissato e n sufficientemente grande valgono le disuguaglianze $\binom{n}{m} \leq (\frac{1}{m!}) n^m$ e $n^m \leq (m^m)\binom{n}{m}$

[2] Per esempio, $p >> n^{\frac{-2}{(m-1)}} \Rightarrow p n^{\frac{2}{m-1}} \to \infty$ e per $m \geq 2$ $\mathbb{E}[X_n] \asymp n^m p^{\binom{m}{2}} \geq p n^{\frac{2}{m-1}}$

2. $p \gg n^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow \mathbb{E}[X_n] \to \infty$ e per poter concludere che $X > 0$ *w.h.p.* cerchiamo di applicare il **Corollario** 0.0.4 . Calcoliamo quindi preliminarmente Δ.
Per ogni $i \in \binom{[n]}{4}$ sia A_i l'evento "i vertici i generano un grafo completo" e poiché in tal caso devono apparire esattamente 6 spigoli

$$\mathbb{P}[A_i] = p^6.$$

Gli eventi A_i e A_j sono distinti e non indipendenti se e solo se $|i \cap j| = 2$ o 3, cioè se i e j hanno 2 o 3 elementi in comune. Possiamo quindi scrivere $\Delta = \Delta_2 + \Delta_3$ ove Δ_2 è il contributo delle coppie (i, j) con $|i \cap j| = 2$ e Δ_3 è quello dato dalle coppie con $|i \cap j| = 3$.
Abbiamo dunque:

$$\Delta_2 = \sum_{i \sim j} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] \qquad con\ |i \cap j| = 2$$

ma siccome sono 11 i lati che devono apparire e 6 i vertici necessari:

$$\Delta_2 = \sum_{i \in \binom{[n]}{6}} p^{11}.$$

Utilizzando nuovamente la formula di Stirling si trova

$$\Delta_2 = \binom{n}{6} p^{11} \asymp n^6 p^{11}$$

e con le stesse argomentazioni si ottiene

$$\Delta_3 \asymp n^5 p^9.$$

D'altra parte

$$\mathbb{E}[X]^2 \asymp n^8 p^{12}$$

e per $n \to \infty$

$$\frac{\Delta_2}{\mathbb{E}[X]^2} \asymp \frac{n^6 p^{11}}{n^8 p^{12}} = \frac{1}{n^2 p} \to 0$$

$$\frac{\Delta_3}{\mathbb{E}[X]^2} \asymp \frac{n^5 p^9}{n^8 p^{12}} = \frac{1}{n^3 p^3} \to 0$$

da cui, per il *second moment method*, possiamo concludere che $X > 0$ *w.h.p.*

□

1.3.2 Vertici isolati

Proposizione 1.3.3. *La proprietà monotòna crescente $\mathcal{Q}$ "$G(n,p)$ non ha vertici isolati" ha $\hat{p} = \frac{\log n}{n}$ come funzione di soglia stretta.*

Dimostrazione. Per provare tale asserto dimostriamo che

$$\mathbb{P}[G(n,p) \in \mathcal{Q}] \to \begin{cases} 1 & \text{se } p = c \cdot \frac{\log n}{n},\ c > 1 \\ 0 & \text{se } p = c \cdot \frac{\log n}{n},\ c < 1 \end{cases}$$

Per ogni $i = 1, \cdots, n$ sia Y_i la variabile indicatrice dell'evento "l' i-esimo vertice è isolato" e $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ la variabile che conta il numero di vertici isolati; allora per linearità del valore atteso:

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{i=1}^{n} (1-p)^{n-1} = n(1-p)^{n-1}.$$

Ne segue che, per $p = c \cdot \frac{\log n}{n}$ si ha:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[X_n] = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - c\,\frac{\log n}{n}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} ne^{-c\log n} = \lim_{n\to\infty} n^{1-c}$$

e tale uguaglianza ci permette di ottenere la seguente stima:

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_n] \to \infty & \text{se } p = c \cdot \frac{\log n}{n},\ c > 1 \qquad (1.1) \\ \mathbb{E}[X_n] \to 0 & \text{se } p = c \cdot \frac{\log n}{n},\ c < 1 \qquad (1.2) \end{cases}$$

Dalla (1.2), utilizzando il *first moment method*, possiamo concludere che $X_n = 0$ *w.h.p* mentre per mostrare che (1.1) $\Rightarrow X_n > 0$ *w.h.p.* è necessario utilizzare il *second moment method*. Verifichiamo quindi che

$Var[X_n] = \mathbb{E}[X_n^2] - (\mathbb{E}[X_n])^2 \to 0$, da cui seguirà $Var[X_n] = o(\mathbb{E}[X_n]^2)$.
Per linearità:

$$\mathbb{E}[X_n^2] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Y_i^2] \;+\; \sum_{i \neq j} \mathbb{E}[Y_i Y_j]$$

e poiché $Y_i \in \{0,1\}$ si ha $Y_i^2 = Y_i$.

D'altra parte, giacché i termini della seconda sommatoria sono uguali, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_n^2] &= \mathbb{E}[X_n] \;+\; n(n-1)\mathbb{E}[Y_1 Y_2] \\ &= \mathbb{E}[X_n] \;+\; n(n-1)(1-p)^{2(n-1)-1} \end{aligned}$$

dove il -1 nell'esponente $2(n-1)-1$ permette di contare una volta sola il lato avente come estremi i vertici 1 e 2. Abbiamo quindi:

$$\frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{\mathbb{E}[X_n]^2} = \frac{n(1-p)^{n-1} \;+\; n(n-1)(1-p)^{2(n-1)-1}}{n^2(1-p)^{2n-1}} = \frac{1}{n(1-p)^{n-1}} + \frac{1}{1-p} - \frac{1}{n(1-p)}$$

e per $p = c \cdot \frac{\log n}{n}$, $c < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{\mathbb{E}[X_n]^2} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n^{1-c}} \;+\; \frac{1}{1 - c \cdot \frac{\log n}{n}} \;-\; \frac{1}{1 + c \cdot \log n} \right] = 1$$

che ci permette di concludere che $Var[X_n] = o(\mathbb{E}[X_n]^2)$. □

1.3.3 Connessione

Teorema 1.3.4 (Erdős-Rényi)**.** *La proprietà monotona crescente di connessione $\mathcal{Q}$ ha $\hat{p} = \frac{\log n}{n}$ come funzione di soglia stretta.*

Dimostrazione. Come nel caso precedente, ci proponiamo di dimostrare che

$$\mathbb{P}[G(n,p) \in \mathcal{Q}] \to \begin{cases} 1 & \text{se } \; p = c \cdot \frac{\log n}{n}, \;\; c > 1 \qquad (1.3) \\ 0 & \text{se } \; p = c \cdot \frac{\log n}{n}, \;\; c < 1 \qquad (1.4) \end{cases}$$

Avendo già osservato che per $c < 1$ $G(n,p)$ ha vertici isolati *w.h.p.*, abbiamo già verificato la validità di (1.4).

Rimane quindi da dimostrare che per $p = c \cdot \frac{\log n}{n}$, $c > 1$, *w.h.p* non ci sono *k-componenti connesse*, con $2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Tale risultato, assieme al fatto noto che per $c > 1$ non esistono vertici isolati, ci permetterà di inferire la connessione del grafo.
La probabilità $\bar{p}$ che un insieme A di k vertici formi una componente connessa è data dal prodotto di due probabilità p_1 e p_2: più precisamente indichiamo con

- p_1: probabilità che i k vertici siano connessi fra loro;
- p_2: probabilità che non vi sia alcun lato avente come estremi uno dei vertici $\in A$ ed uno qualsiasi dei vertici $\notin A$.

Osseviamo inoltre che, fissato un insieme di vertici A, p_1 è necessariamente minore della somma delle probabilità che gli alberi massimali di tali vertici appaiano. Siccome i k-alberi massimali di un grafo sono k^{k-2} si ha:

$$p_1 \leq \sum_{j=1}^{k^{k-2}} p^{k-1} = k^{k-2} p^{k-1}$$

e l'uguaglianza $p_2 = (1-p)^{k(n-k)}$ ci permette di concludere che:

$$\bar{p} \leq k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{k(n-k)}.$$

Indicando ora con X_k il numero di *k-componenti connesse*, per linearità del valore atteso si ha:

$$\mathbb{E}[X_k] \leq \binom{n}{k} k^{k-2} p^{k-1} (1-p)^{kn-k^2}.$$

Sostituiamo quindi nella formula precedente $p = c \cdot \frac{\log n}{n}$, $\alpha = e^{\log \alpha}$ ed utilizziamo le disuguaglianze $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{en}{k}\right)^k$, $1 - p \leq e^{-p}$, $k - 1 < k$ fino ad ottenere:

$$\mathbb{E}[X_k] \leq \exp\left(\log n + k + k \log\log n - 2\log k + k \log c - ck \log n + ck^2 \frac{\log n}{n}\right) \quad (1.5)$$

Poniamo ora, per $2 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$:

$$f(k) := \log n + k + k \log\log n - 2\log k + k \log c - ck \log n + ck^2 \frac{\log n}{n}$$

e cerchiamone il massimo. Effettuando le derivate si ottiene:

$$\begin{aligned} f^{'}(k) &= 1 + \log\log n - \frac{2}{k} + \log c - c\log n + \frac{2ck\log n}{n} \\ f^{''}(k) &= \frac{2}{k^2} + \frac{2c\log n}{n} \end{aligned}$$

ed essendo $f^{''}(k) > 0$ possiamo concludere che il punto di massimo si avrà in corrispondenza di uno degli estremi.
Si verifica inoltre che $f(2) > f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ per $n \to \infty$, da cui si ha:

$$\max_{2\le k\le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} f(k) = f(2) = \log(n)+2+2\log(\log(n))-2\log(2)+\log(c)-2c\log(n)+\frac{4c\log(n)}{n}.$$

Altresì:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1-2c)\log(n)}{\log(n)+2+2\log(\log(n))-2\log(2)+\log(c)-2c\log(n)+\frac{4c\log(n)}{n}} = 1$$

cioè $(1-2c)\log(n) \approx f(2)$, quindi:

$$(1.5) \Rightarrow \mathbb{E}[X_k] \le e^{(1-2c)\log(n)} = n^{1-2c}$$

e da ciò si ottiene per linearità:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=2}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} X_k\right] \le \frac{n}{2}\, n^{1-2c} \le n^{2-2c} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad per\ c > 1.$$

Utilizzando ora il *first moment method* possiamo concludere che

$$\mathbb{P}\left[\sum_{k=2}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} > 0\right] = 0 \ \ w.h.p.$$

□

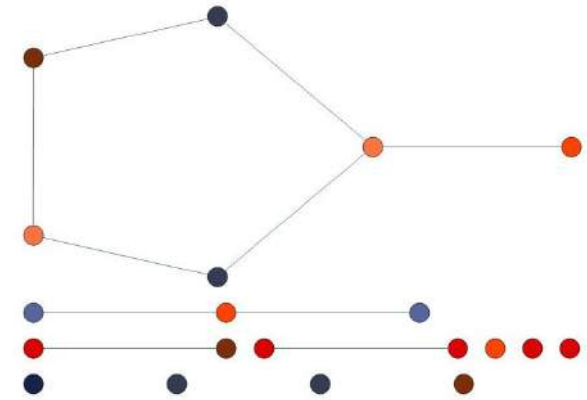
Osservazione 3. E' certamente di ampio interesse il fatto che la l'assenza di vertici isolati e la connessione abbiano la stessa funzione di soglia stretta. Questo risultato ha portato allo studio dettagliato dell'evoluzione delle componenti connesse di un grafo casuale per $0 < p < \frac{\log(n)}{n}$, cioè prima che esso diventi connesso. Tali approfondimenti, che vanno oltre le finalità del presente elaborato, permettono di illustrare schematicamente l'evoluzione di un grafo $G(n,p)$ nel seguente modo:

1. per $0 \leq p \leq \frac{1}{n}$ il grafo è composto da piccole componenti connesse e vertici isolati;

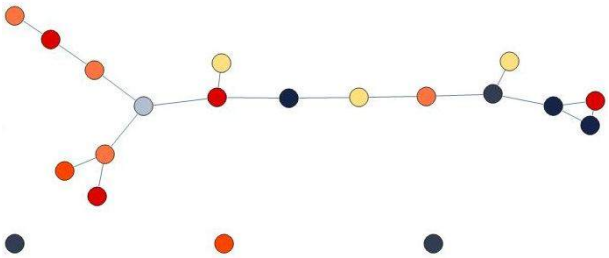
2. per $\frac{1}{n} \leq p \leq \frac{\log(n)}{n}$ le piccole componenti connesse si uniscono fra loro fintanto che il grafo si articola in una grande componente connessa (*giant component*) e in vertici isolati;

3. per $\frac{\log(n)}{n} \leq p \leq 1$ i vertici isolati vengono inglobati nella *giant component* rendendo connesso il grafo.

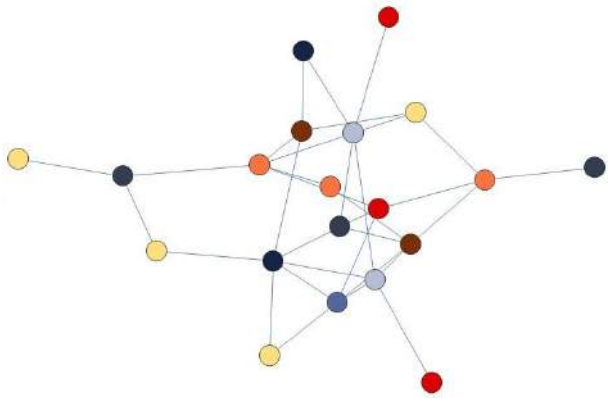
Nelle figure seguenti presentiamo un esempio di ciascuno dei 3 casi per un grafo casuale di 20 vertici. In tal caso si ricorda che le funzioni di soglia assumono i valori $\frac{1}{n} = 0.050$ e $\frac{\log(n)}{n} = 0.150$.



(a) Grafo casuale G(20,0.042): piccole componenti connesse e vertici isolati



(b) Grafo casuale G(20,0.123): *giant component* e vertici isolati



(c) Grafo casuale G(20,0.152): connessione

Figura 1.2: Esempi significativi di grafi casuali

Capitolo 2

Complessi casuali

In questo capitolo viene preliminarmente definito il modello di complessi casuali introdotto da Linial e Meshulam nell'articolo "*Homological connectivity of random 2-complexes*" (2006). Successivamente esponiamo ed analizziamo il teorema da essi dimostrato ed infine ci dedichiamo allo studio dell' inclusione di superfici in complessi casuali.

Definizione 2.1. Per ogni numero naturale n e per p reale, con $0 \leq p \leq 1$, si indica con $Y(n,p)$ il 2-complesso simpliciale composto da n vertici, $\binom{n}{2}$ spigoli (i.e. l'1-scheletro del complesso è il grafo completo su n vertici) e tale che ciascuna delle $\binom{n}{3}$ facce è inclusa indipendentemente con probabilità p.

Come nel caso dei grafi casuali è possibile definire un modello alternativo $Y = Y(n,m)$, dove con m indichiamo il numero dei 2-simplessi, che permette di introdurre il '*random 2-complex process*' in cui ciascuna faccia $\{\Delta_i\}_{i=1}^{m}$ è scelta uniformemente fra le restanti $\binom{n}{3} - (i-1)$.

Così come lo studio della connessione può esser considerato il risultato antesignano dei grafi casuali, analogamente il teorema di Linial e Meshulam, dimostrato in [13], costituisce il primo esempio di analisi topologica dei complessi casuali.

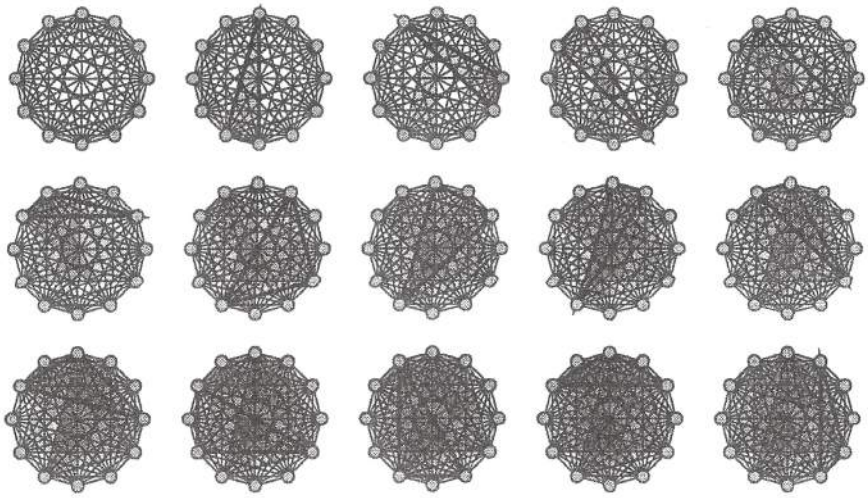


Figura 2.1: *Random 2-complex process* per Y(12,15)

Teorema 2.0.5 (Linial-Meshulam, 2006)**.** *Sia* $Y = Y(n,p)$ *un complesso casuale, si ha:*

$$\mathbb{P}[H^1(Y,\mathbb{Z}_2) = 0] \to \begin{cases} 1 & se \;\; p \geq \frac{2\log n + \omega(1)}{n} \\ 0 & se \;\; p \leq \frac{2\log n - \omega(1)}{n} \end{cases}$$

cioè $\frac{2\log n}{n}$ *è una funzione di soglia stretta per* $H^1(Y,\mathbb{Z}_2) = 0$.

Osservazione 4. Le similitudini fra il teorema di Erdős-Rényi e quello di Linial-Meshulam non riguardano solo la funzione di soglia stretta (nel caso della connessione era $\frac{\log(n)}{n}$) ma anche in parte della dimostrazione. Inoltre, così come nei grafi casuali connessione ed esistenza di vertici isolati condividono la stessa funzione di soglia, il valore trovato da Linial e Meshulam coincide con la funzione di soglia per l'esistenza di lati isolati (i.e. privi di triangoli adiacenti).

Una generalizzazione di tale risultato è stata poi ottenuta da Meshulam e Wallach, i quali hanno mostrato in [16] che la validità dell' asserto persiste per qualsiasi gruppo di coefficienti $\mathbb{Z}_l$, con l fissato, e in generale per ogni

complesso casuale d-dimensionale che sia estensione del modello di Linial e Meshulam. [1].

Osservazione 5. Il **Teorema** 2.0.5 è enunciato per la coomologia ma i teoremi dei coefficienti universali di omologia e coomologia permettono di ottenere un risultato equivalente per l'omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}_2$ ed a coefficienti razionali .

2.1 Immersioni ed embedding simpliciali

L'obiettivo di questa sezione è quello di trovare funzioni di soglia per l'inclusione di superfici triangolate all'interno di complessi simpliciali casuali. A tal proposito, è preliminarmente necessario affrontare il problema dal punto di vista simpliciale, cioè studiare le condizioni per l'inclusione di generici sottocomplessi.
Sia quindi S un fissato complesso simpliciale bidimensionale finito; indichiamo con $v = v_s$ e $f = f_s$ il numero rispettivamente dei suoi vertici e delle sue facce e con $V(S)$ l'insieme dei suoi vertici.
Introduciamo ora due tipologie di inclusione che ci serviranno nel corso della breve dissertazione.

Definizione 2.2. Una *embedding simpliciale* $g : S \hookrightarrow Y$, ove $Y = Y(n,p)$ è un complesso simpliciale casuale, è una mappa iniettiva dall'insieme dei vertici $V(S)$ di S a quello dei vertici $\{1, 2, ...n\}$ di Y tale che, per ogni tripla di vertici distinta u_1, u_2, $u_3 \in V(S)$ che genera un simplesso in S le immagini corrispondenti $g(u_1)$, $g(u_2)$, $g(u_3)$ generano una faccia di Y.

Definizione 2.3. Una *immersione simpliciale* $g : S \looparrowright Y$ è una mappa dall'insieme $V(S)$ dei vertici di S a quello dei vertici $\{1, 2, ...n\}$ di Y tale che:

[1] i.e. complesso d-dimensionale $Y_d(n,p)$ costituito da n vertici in cui appaiono tutte le i-facce per $i = 1,\ 2, \cdots,\ d-1$ mentre ciascuna d-faccia appare con probabilità p

1. per ogni tripla distinta u_1, u_2, $u_3 \in V(S)$ che genera un 2-simplesso i vertici corrispondenti $g(u_1)$, $g(u_2)$, $g(u_3)$ sono distinti e generano una faccia di Y;

2. coppie di 2-simplessi distinti σ,ϑ hanno immagini $g(\sigma)$,$g(\vartheta)$ in Y distinte.

Possiamo osservare che il concetto di embedding simpliciale è un caso particolare di immersione, in quanto l'iniettività sull'insieme dei vertici implica quella dei 2-simplessi. Notiamo inoltre che condizione necessaria e sufficiente affinché $Y(n,p)$ contenga un sottocomplesso isomorfo a S è la possibilità di definire una embedding simpliciale $S \hookrightarrow Y$.
Infine, se $g : S \looparrowright Y$ è una immersione simpliciale allora lo è anche $g_{|_{S'}}$ per ogni $S' \subset S$ con S' sottocomplesso.

Lemma 2.1.1. *Per ogni complesso simpliciale S con v vertici e f facce vale:*

$$\mathbb{P}[S \looparrowright Y] \leq n^v p^f$$

cioè la probabilità che S ammetta una immersione simpliciale in un complesso casuale $Y(n,p)$ è minore o uguale a $n^v p^f$.

Dimostrazione. Per ogni mappa $g : V(S) \to \{1, 2, ...n\}$ sia J_g la variabile indicatrice dell'evento casuale "g è una immersione simpliciale". Risulta inoltre $\mathbb{E}[S \looparrowright Y] = p^f$. Definiamo ora $X_s = \sum_g J_g$ la variabile che conta il numero di immersioni simpliciali $S \looparrowright Y$, con g che indicizza le mappe $V(S) \to \{1, 2, ...n\}$; allora per linearità del valore atteso:

$$\mathbb{E}[X_s] = \sum_g \mathbb{E}[J_g] \leq \sum_{i=1}^{n^v} p^f = n^v p^f$$

da cui per la **Proposizione** 0.0.1 :

$$\mathbb{P}[S \looparrowright Y] = \mathbb{P}[X_s > 0] \leq \mathbb{E}[X_s] \leq n^v p^f.$$

□

Definiamo ora il seguente coefficiente numerico che si rivelerà di importanza cruciale per caratterizzare le superfici triangolate.

Definizione 2.4. Per ogni complesso simpliciale S si indica con $\mu(S)$

$$\mu(S) = \frac{v}{f} \in \mathbb{Q}$$

dove v ed f sono il numero di vertici e di facce di S.

Corollario 2.1.2. *Se $p \ll n^{-\mu(S)}$ allora S non ammette alcuna immersione simpliciale nel complesso Y(n,p) w.h.p.*

Dimostrazione. $p \ll n^{-\mu(S)} \Rightarrow pn^{\mu(S)} \to 0$ per $n \to \infty$. Elevando alla f-esima potenza si ottiene quindi $n^v p^f \to 0$ e si conclude con il **Lemma** 2.1.1. □

Definizione 2.5. Per ogni complesso simpliciale S si definisce

$$\tilde{\mu}(S) = \min_{S' \subseteq S} \mu(S)$$

cioè il minimo su tutti gli S' sottocomplessi di S.

Teorema 2.1.3. *Sia S un complesso simpliciale, valgono allora le seguenti:*

1. $p \ll n^{-\tilde{\mu}(S)} \Rightarrow \mathbb{P}[S \not\hookrightarrow Y] \to 0$ *per* $n \to \infty$.

2. $p \gg n^{-\tilde{\mu}(S)} \Rightarrow \mathbb{P}[S \hookrightarrow Y] \to 1$ *per* $n \to \infty$.

Dimostrazione. 1. Sia $S' \subset S$ un sottocomplesso tale che $\mu(S') = \tilde{\mu}(S)$. Ora, poiché $S \not\hookrightarrow Y \Rightarrow S' \not\hookrightarrow Y$ concludiamo che

$$\mathbb{P}[S \not\hookrightarrow Y] \leq \mathbb{P}[S' \not\hookrightarrow Y].$$

D'altro canto, se $p \ll n^{-\mu(S')} = n^{-\tilde{\mu}(S)}$ dal **Corollario** 2.1.2 si ottiene

$$\mathbb{P}[S' \not\hookrightarrow Y] \to 0.$$

2. Sia $X_s = \sum_g J_g$ ove J_g rappresenta la variabile indicatrice dell'evento "la mappa g è un embedding simpliciale" con g che varia fra tutte le mappe iniettive $V(S) \to \{1, \cdots, n\}$. Per ogni coppia di mappe iniettive g,$g' : V(S) \to \{1, \cdots, n\}$ consideriamo il sottocomplesso puro $H = H(g, g') \subset S$ definito come l'unione di tutti i 2-simplessi $\sigma \subset S$ tali che $g(\sigma) \subset g'(S)$. Osserviamo dunque che la variabile casuale $J_g J_{g'}$ ha valore atteso:

$$\mathbb{E}[J_g J_{g'}] = p^{2f - f_H}$$

ove $f = f_s$ è il numero di facce di S mentre f_H rappresenta il numero di 2-simplessi in H.
Fissiamo ora $H \subset S$ sottocomplesso puro e consideriamo le coppie di mappe iniettive g,$g' : V(S) \to \{1, \cdots, n\}$ tali che $H(g, g') = H$. Indicando con N il numero di tali coppie si ha:

$$N \leq C_H n^{2v - v_H}$$

per $C_H > 0$ costante dipendente da H. Calcoliamo ora la varianza di X_S:

$$\begin{aligned} Var[X_S] &= \mathbb{E}[X_S^2] - \mathbb{E}[X_S]^2 \\ &= \sum_{g,g'} \left[\mathbb{E}[J_g J_{g'}] - \mathbb{E}[J_g]\mathbb{E}[J_g']\right] \\ &\leq \sum_{H \subset S} C_H n^{2v - v_H} [p^{2f - f_H} - p^{2f}] \\ &= \sum_{H \subset S} C_H n^{2v - v_H} p^{2f - f_H} [1 - p^{f_H}]. \end{aligned}$$

Poiché per n sufficientemente grande vale:

$$\mathbb{E}[X_S] = \sum_{g \; iniettive} \mathbb{E}[J_g] = \binom{n}{v} v! \cdot p^f \geq \frac{1}{2} \cdot n^v p^f$$

possiamo asserire che

$$\frac{Var[X_S]}{\mathbb{E}[X_S]^2} \leq 4 \cdot (1 - p) \cdot \sum_{H \subset S} (f_H C_H) \cdot (n^{v_H} p^{f_H})^{-1}.$$

Ora, se $p \ll n^{-\tilde{\mu}(S)}$ si ha $n^{v_H} p^{f_H} \to \infty$ per ogni sottocomplesso puro $H \subset S$, quindi la sommatoria precedente è infinitesima. Utilizzando la *disuguaglianza di Chebyshev*

$$\mathbb{P}[X_S = 0] \leq \frac{Var[X_S]^2}{\mathbb{E}[X_S]}$$

concludiamo che $\mathbb{P}[X_S = 0] \to 0$ per $n \to \infty$.

□

Per il conseguimento del nostro obiettivo la distinzione fra immersione ed embedding simpliciale non è più necessaria e nel seguito indicheremo con $S \subseteq Y$ l'inclusione di S come sottocomplesso di Y [2]. Possiamo inoltre osservare che, grazie all'equivalenza $S \subseteq Y \Leftrightarrow S \hookrightarrow Y$, il teorema precedente ci permette di ottenere le seguenti condizioni per l'inclusione simpliciale:

- se $p \ll n^{-\tilde{\mu}(S)}$ non è possibile definire un'immersione simpliciale $\Rightarrow$ non esiste un embedding $\Rightarrow S \not\subseteq Y(n,p)$;
- se $p \gg n^{-\tilde{\mu}(S)}$ esiste una embedding simpliciale $\Rightarrow S \subseteq Y(n,p)$.

Definizione 2.6. Un complesso simpliciale S si dice *bilanciato* se

$$\mu(S) = \tilde{\mu}(S)$$

cioè se $\mu(S) \leq \mu(S')$ per ogni sottocomplesso $S' \subset S$.

Terminate le premesse di carattere generale, cerchiamo ora di integrare le nozioni introdotte con quelle proprie delle superfici triangolate.

Osservazione 6. Sia Σ_g una superficie triangolata chiusa e orientabile di genere $g \geq 0$. Sappiamo che in tal caso $\chi(\Sigma_g) = 2 - 2g = v - e + f$, dove v, e, f indicano rispettivamente il numero di vertici, spigoli e facce di S. Date le ipotesi di forte connessione e purezza ogni lato è contenuto in due facce, cioè $3f = 2e$, da cui:

$$\mu(\Sigma_g) = \frac{v}{f} = \frac{2 - 2g + e - f}{f} = \frac{2 - 2g}{f} + \frac{e}{f} - 1 = \frac{1}{2} + \frac{2 - 2g}{f} \qquad (2.1)$$

[2] con abuso di notazione intendiamo l'esistenza di un sottocomplesso di Y isomorfo a S

Utilizzando le stesse argomentazioni, se Λ_g è una superficie triangolata chiusa e non orientabile di genere $g \geq 0$, dall'uguaglianza $\chi(S) = 2 - g$, si giunge a:

$$\mu(\Lambda_g) = \frac{1}{2} + \frac{2-g}{f} \tag{2.2}$$

Le formule (2.1) e (2.2) ci permettono di ottenere una preliminare caratterizzazione delle superfici:

Corollario 2.1.4. *L'invariante $\mu(\Sigma_g)$ di una superficie triangolata orientabile soddisfa le seguenti condizioni:*

1. $\frac{1}{2} < \mu(\Sigma_g) \leq 1$ *se* $g = 0$;
2. $\mu(\Sigma_g) = \frac{1}{2}$ *per* $g = 1$;
3. $\mu(\Sigma_g) < \frac{1}{2}$ *per* $g > 1$;
4. *se* $f \to \infty$, *cioè quando la la triangolazione è costituita da infiniti simplessi, allora* $\mu(\Sigma_g) \to \frac{1}{2}$.

Corollario 2.1.5. *L'invariante $\mu(\Lambda_g)$ di una superficie triangolata non orientabile soddisfa le seguenti condizioni*

1. $\frac{1}{2} < \mu(\Lambda_g) \leq \frac{3}{5}$ *se* $g = 1$;
2. $\mu(\Lambda_g) = \frac{1}{2}$ *se* $g = 2$;
3. $\mu(\Lambda_g) < \frac{1}{2}$ *se* $g > 2$;
4. *se* $f \to \infty$, *allora* $\mu(\Lambda_g) \to \frac{1}{2}$.

Osservazione 7. Nell'enunciare i casi *1.* di entrambi i corollari si è tenuto conto del fatto che ogni triangolazione di sfera e piano proiettivo è contraddistinta rispettivamente da $f \geq 4$ e $f \geq 10$.

Teorema 2.1.6. *Ogni superficie connessa e triangolata è bilanciata*

Sfruttando i corollari appena presentati ed i teoremi 2.1.3, 2.1.6 possiamo enunciare i seguenti risultati:

Corollario 2.1.7. *Per un complesso simpliciale $Y = Y(n,p)$ si ha:*

1. *se $p \ll n^{-1}$ allora Y non contiene* [3] *superfici piccole* [4] *chiuse w.h.p.*
2. *se $n^{-1} \ll p \ll n^{-\frac{3}{5}}$ allora Y contiene piccole sfere ma non superfici chiuse di altro tipo w.h.p*
3. *se $n^{-\frac{3}{5}} \ll p \ll n^{-\frac{1}{2}}$ allora Y contiene piccoli piani proiettivi e sfere ma non superfici chiuse di genere maggiore w.h.p*
4. *se $p \gg n^{-\frac{1}{2}}$ allora Y contiene piccoli piani proiettivi, tori, sfere, bottiglie di Klein w.h.p.*
5. *se $p \gg n^{-\frac{1}{2}+\epsilon}$ per qualche $\epsilon > 0$, allora Y contiene ogni tipo di superficie piccola orientabile o non orientabile di qualsiasi genere w.h.p.*

[3] i.e. contiene come sottocomplesso simpliciale

[4] i.e. superfici triangolate indipendenti da n

Capitolo 3

Stato dell'arte

Data la recente teorizzazione di questo campo di indagine, risulta improprio tracciarne una compiuta linea di sviluppo. Pertanto, in questo capitolo ci proponiamo di fornire una panoramica dei più significativi risultati ottenuti cercando, ove possibile, di evidenziare analogie o contrasti. Nel corso di tale *excursus* introduciamo un modello alternativo di complessi casuali, i *flag complexes casuali*, ed infine concludiamo presentando alcuni quesiti tuttora irrisolti.

3.1 Modello di Linial-Meshulam

Utilizzando argomentazioni analoghe a quelle impiegate nella sezione di embedding ed inclusioni simpliciali, in [5] sono presentati i seguenti teoremi:

Teorema 3.1.1. *Dato un complesso casuale $Y(n,p)$ con $p \ll n^{-1}$, allora esso è collassabile simplicialmente ad un grafo w.h.p. In particolare, $\pi_1(Y)$ è libero e per ogni gruppo di coefficienti G si ha $H_2(Y,G) = 0$ w.h.p.*

Teorema 3.1.2. *Sia fissato $\epsilon > 0$ e sia S un qualsiasi 2-complesso. Se $p \gg n^{-\frac{1}{2}+\epsilon}$ allora S ammette un embedding topologico[1] nel complesso casuale $Y(n,p)$ w.h.p.*

[1] i.e. esiste un suddivisione opportuna di S da cui è possibile definire un embedding simpliciale in Y(n,p)

Osservazione 8. Alla luce dei risultati appena enunciati siamo in grado di fornire un'interpretazione geometrica degli asserti *1.* e *5.* del **Corollario** 2.1.7:

- per $p \ll n^{-1}$ Y non contiene superfici perché è collassabile simplicialmente ad un grafo;
- per $p \gg n^{-\frac{1}{2}+\epsilon}$ Y contiene qualsiasi superficie chiusa *w.h.p.* in quanto ogni 2-complesso è incluso in esso.

Per quanto concerne invece lo studio degli invarianti algebrici i risultati principali vengono di seguito presentati.

Teorema 3.1.3. *Sia $p > \frac{c}{n}$, con $c > 3$ e indichiamo con Y il complesso casuale $Y(n,p)$. Allora $\pi_1(Y)$ contiene un sottogruppo libero di due generatori w.h.p.*

Teorema 3.1.4. *Sia $p > \frac{c}{n}$, con $c > 3$. Allora per il complesso simpliciale $Y = Y(n,p)$ si ha*

$$H_2(Y;\mathbb{Z}) \neq 0$$

ed in particolare $\beta_2(Y) \neq 0$ w.h.p.

Teorema 3.1.5 (Babson et al., 2011)**.** *Sia $\epsilon > 0$, allora per $Y = Y(n,p)$ vale*

$$\mathbb{P}[\pi_1(Y) = 0] \to \begin{cases} 1 & se \;\; p \geq n^{-\frac{1}{2}+\epsilon} \\ 0 & se \;\; p \leq n^{-\frac{1}{2}-\epsilon} \end{cases}$$

Teorema 3.1.6 (Versione omologica del teorema di Linial e Meshulam)**.** *Sia fissato $\epsilon > 0$, allora si ha*

$$\mathbb{P}[H_1(Y,\mathbb{Q}) = 0] \to \begin{cases} 1 & se \;\; p \geq \frac{2\log n + \omega(1)}{n} \\ 0 & se \;\; p \leq \frac{2\log n - \omega(1)}{n} \end{cases}$$

Osservazione 9. Possiamo notare che la 1-connessione e la scomparsa del primo gruppo di omologia sono proprietà monotòne crescenti, cioè si verificano in seguito ad un singolo passaggio di fase in corrispondenza dell'incremento della probabilità p. Tale fenomeno è schematizzato nella figura (3.1) nel caso di H_1.

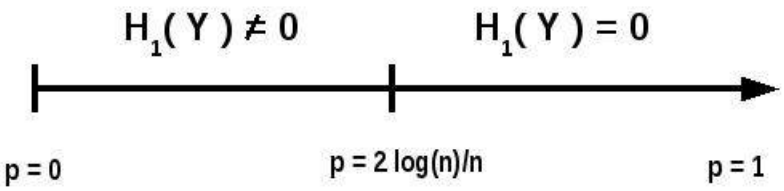


Figura 3.1: Andamento del primo gruppo di omologia a coefficienti razionali per un complesso $Y(n,p)$

3.2 Flag complexes casuali

Un modello diverso da quello introdotto da Linial e Meshulam e maggiormente legato al concetto di grafo casuale è costituito dai *flag complexes casuali*, ampiamente approfonditi in [11], [12] e [14].

Definizione 3.1. Dato un grafo H si definisce *flag complex* $X(H)$ il più grande complesso simpliciale compatibile con l'1-scheletro H. In altri termini, $X(H)$ è il complesso avente come 1-scheletro H ed i cui 2-simplessi appaiono in corrispondenza delle cricche a 3 vertici di H.

Definizione 3.2. Si definisce *flag complex casuale* $X(n,p)$ il flag complex del grafo casuale $G(n,p)$.

Osservazione 10. In letteratura i flag complex casuali sono anche noti come *clique complexes casuali*.

Come nei casi precedenti, è possibile definire il '*random flag complexes process*' rappresentato nella figura (3.2).

3.2.1 Omologia e coomologia

Teorema 3.2.1. *Siano fissati $k \geq 1$ e $\alpha > 0$ e indichiamo con X il flag complex casuale $X(n,p)$. Allora per $p = n^{-\alpha}$ si ha*

1. *se $\alpha > \frac{1}{k}$, allora $H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ w.h.p.*

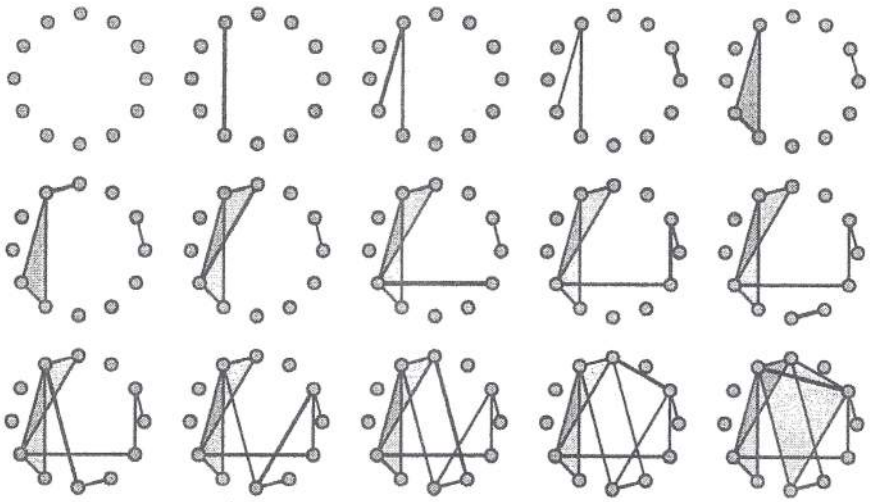


Figura 3.2: *Random flag complex process* per X(G(12,14))

2. *se* $\alpha < \frac{1}{2k+1}$, *allora* $H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ *w.h.p*

3. *se* $\frac{1}{k+1} < \alpha < \frac{1}{k}$, *allora* $H_k(X;\mathbb{Z}) \neq 0$ *w.h.p.*

In particolare, l'asserto *3.* è dimostrabile mediante argomentazioni di algebra lineare di seguito riassunte: se f_i denota il numero di facce i-dimensionali di X e $f_k > f_{k-1} + f_{k+1}$, allora necessariamente $\beta_k \neq 0$ in quanto:

$$\beta_k = f_k - \gamma^k - \gamma^{k-1} \geq f_k - f_{k+1} - f_{k-1}$$

dove con γ^i indichiamo il rango della i-esima matrice di incidenza.

Osservazione 11. Quest'ultimo risultato, semplificato nella figura (3.3), ci permette di rilevare che, contrariamente a quanto accade nel caso dei complessi $Y(n,p)$, la scomparsa dell'omologia dei flag complexes casuali non è una poprietà monotòna in quanto caratterizzata da almeno due distinti passaggi di fase.

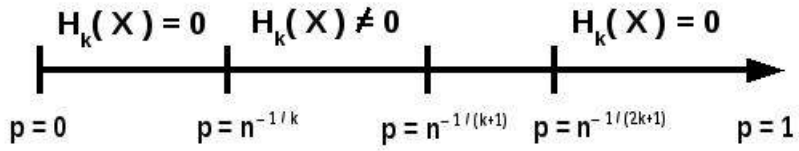


Figura 3.3: Andamento dei gruppi di omologia a coefficienti interi per un complesso $X(n,p)$

Teorema 3.2.2. *Siano fissati $k \geq 1$, $\epsilon > 0$ e sia $X = X(n,p)$:*

1. *Se*
$$p \geq \left(\frac{(k/2+1+\epsilon)\log(n)}{n}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$
allora $H^k(X,\mathbb{Q}) = 0$ w.h.p.

2. *Se*
$$n^{-\frac{1}{k}+\epsilon} \leq p \leq \left(\frac{(k/2+1+\epsilon)\log(n)}{n}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$
allora $H^k(X,\mathbb{Q}) = 0$ w.h.p.

3.2.2 Numeri di Betti

Nel caso dei flag complexes casuali sono note anche stime asintotiche del valore atteso dei numeri di Betti. Per mezzo dell'approccio algebrico esposto in precedenza si ottengono i seguenti teoremi.

Teorema 3.2.3. *Sia fissato $\alpha > 0$, $p = n^{-\alpha}$ e sia $X = X(n,p)$. Se $\frac{1}{k+1} < \alpha < \frac{1}{k}$, allora:*
$$\frac{\mathbb{E}[\beta_k]}{\binom{n}{k+1}p^{\binom{k+1}{2}}} \to 1 \quad per\ n \to \infty.$$

Teorema 3.2.4 (Kahle-Meckes)**.** *Sia $\alpha > 0$, $p = n^{-\alpha}$. Se $\frac{1}{k+1} < \alpha < \frac{1}{k}$ si ha che:*
$$\frac{\beta_k - \mathbb{E}[\beta_k]}{\sqrt{Var[\beta_k]}} \to \mathcal{N}(0,1) \quad per\ n \to \infty.$$

ove $\mathcal{N}(0,1)$ *è la distribuzione normale con media 0 e varianza 1.*

3.3 Direzioni di ricerca

Come anticipato, la natura in divenire di tale branca della topologia fa sì che siano molteplici le questioni tuttora aperte. Qui di seguito presentiamo le più note.

Congettura 3.3.1. Sia $X = X(n,p)$ un flag complex casuale e sia fissato α tale che

$$\frac{1}{d+1} < \alpha < \frac{1}{d}$$

Se $p = n^{-\alpha}$ allora X è omotopicamente equivalente ad un bouquet di sfere d-dimensionali.

Tale congettura nasce dall'idea che esista un intervallo di probabilità, eventualmente anche molto piccolo, in cui $H_i(X,\mathbb{Z}) \neq 0$ mentre $H_i(X,\mathbb{K}) = 0$ per ogni campo $\mathbb{K}$.
Un'altra ipotesi non ancora verificata riguarda la possibilità di estendere a qualsiasi dimensione d il **Teorema** 3.1.1.

Congettura 3.3.2. , Sia $p \ll n^{-1}$, allora un d-complesso casuale $Y_d(n,p)$ è collassabile simplicialmente ad un $(d-1)$-complesso *w.h.p.*

Ci preme porre in evidenza quale spunto di riflessione che alcuni teoremi enunciati finora presentano nelle ipotesi stime numeriche "provvisorie" in quanto migliorabili. Per esempio, le condizioni di validità del **Teorema** 3.1.4 sono state recentemente rese meno restrittive.

Teorema 3.3.3 (Aronshtam-Linial, 2012)**.** *Sia* $Y = Y(n,p)$ *con* $p = \frac{c}{n}$ *e* $c > 0$ *costante. Allora se* $c > 2.75381...$ *si ha che* $H_2(Y) \neq 0$ *w.h.p.*

Tale costante numerica è stata trovata come unica soluzione positiva di una complicata equazione in [2] ma non è detto che rappresenti il valore ottimale. A seguito di numerose prove mediante calcolatori, Aronshtam e Linial hanno avanzato l'ipotesi che la funzione p da essi individuata coincida con la funzione di soglia ma tuttora ciò non è stato provato.

Osservazione 12. Un discorso a parte lo dedichiamo all'analisi delle componenti di torsione dei gruppi di omologia. Come si può infatti notare i risultati esposti finora sull'omologia utilizzano come principale strumento di indagine i numeri di Betti, i quali sono esclusivamente correlati alla parte libera dei gruppi. Tale approccio monodirezionale è causato dalla mancanza di metodi atti a comprendere il comportamento delle componenti di torsione. Questo è tuttora uno dei principali problemi aperti nella *random topology*, nonché il maggiore ostacolo nella ricerca di funzioni di soglia per l'omologia a coefficienti interi di un complesso casuale $Y(n,p)$.
Un'ulteriore congettura, che segue dalle osservazioni di Meshulam e Wallach già esposte in precedenza[2], consiste infatti nell'ipotesi che la funzione di soglia per il primo gruppo di omologia a coefficienti interi coincida con quella trovata da Linial e Meshulam nel caso di coefficienti in $\mathbb{Z}_2$.

Concludiamo, infine, esponendo un problema classico della topologia algebrica che è stato recentemente affrontato da Michael Farber ed Armindo Costa in [6] con strumenti propri della topologia stocastica.

Congettura 3.3.4 (Whitehead, 1941). Ogni sottocomplesso connesso di un CW complesso asferico è asferico.

Il risultato da essi ottenuto mediante l'impiego del metodo probabilistico è il seguente:

Teorema 3.3.5 (Costa e Farber, 2012)**.** *Sia $\alpha < -\frac{1}{2}$ e $p = n^{-\alpha}$. Allora $Y = Y(n,p)$ gode w.h.p. della seguente proprietà: ogni sottocomplesso asferico $Y' \subset Y$ soddisfa la congettura di Whitehead.*

[2]Cap. 2, oss. 4

Conclusioni

La presente tesi ha esplorato uno dei molteplici rami della topologia algebrica applicata sviluppatisi in tempi recenti. Abbiamo, inoltre, avuto modo di constatare l'efficacia del metodo probabilistico e di osservare i risultati principali ottenuti finora nello studio del modello di Linial-Meshulam e nei flag complexes casuali . Ampio spazio è stato dedicato alla ricerca delle funzioni di soglia per l'inclusione di superfici triangolate ed all'esposizione di problemi ancora aperti.

Bibliografia

[1] Applied and computational Algebraic Topology (ACAT), *Proposal for an ESF Research Networking Programme*. Disponibile online sul sito *acat.lix.polytechnique.fr*.

[2] Lior Aronshtam e Nathan Linial. *When does the top homology of a random simplicial complex vanish?*. Preprint, 2012, *arXiv:1203.3312v1 [math.CO]*

[3] Eric Babson, Christopher Hoffman e Matthew Kahle. *The fundamental group of random 2-complexes*. Preprint, 2011, *arXiv:0711.2704v4 [math.CO]*.

[4] Béla Bollobás. *Random Graphs,Second Edition*. Cambridge University Press, Cambridge 2001.

[5] Armindo Costa, Michael Farber, Thomas Kappeler. *Topology of random 2-complexes*. Preprint, 2010, *arXiv:1006.4229v2 [math.AT]*.

[6] Armindo Costa, Michael Farber. *The asphericity of random 2-dimensional complexes*. Preprint 2012, *arXiv:1211.3653v1 [math.AT]*.

[7] Paul Erdős, Alfred Rényi. *On Random Graphs I*, 1959. Publicationes Mathematicae Debrecen no. 6, p. 290 – 297.

[8] Ehud Friedgut. *Sharp thresholds of graph properties, and the k-sat problem*, 1999. J.Amer.Math.Soc. 12, no.4, 1017-1054, con appendice di Jean Bourgain. MR 1678031 (2000a:05183).

[9] John Hopcroft e Ravi Kannan. *Computer Science Theory for the Information Age*, 2012. Disponibile online sul sito *www.cs.cmu.edu/∼venkatg/teaching/CStheory-infoage/hopcroft-kannan-feb2012.pdf*.

[10] Matthew Kahle. *Lecture notes : random graphs and percolation theory*. Disponibile sul sito dell'autore *www.matthewkahle.org/node/47*.

[11] Matthew Kahle. *Sharp vanishing thresholds for cohomology of random flag complexes*. Preprint, 2012, *arXiv:1207.0149v3 [math.AT]*.

[12] Matthew Kahle. *Topology of random clique complexes*, 2009. Discrete Math. 309, no.6, 1658-1671. MR. MR2510573.

[13] Matthew Kahle. *Topology of random simplicial complexes: a survey*. Preprint 2013, *arXiv:1301.7165v2 [math.AT]*.

[14] Matthew Kahle e Elizabeth Meckes. *Limit theorems for Betti numbers of random k-complexes*, 2013. Homology, Homotopy and Applications 15, no. 1, 343-374.

[15] Nathan Linial e Roy Meshulam. *Homological connectivity of random 2-complexes*, 2006. Combinatorica, 26(4): p. 475 − 487.

[16] Roy Meshulam e Nolan Wallach. *Homological connectivity of random k-dimensional complexes*, 2009. Random Structure Algorithms 34, no.3, 408-417. MR 2504405 (2010g:60015).

[17] Hung Q.Ngo, *First and second moment method*. Appunti del corso *Probabilistic Analysis and Randomized Algorithms*, University of Computer Science and Engineering, Buffalo, 2011. Disponibile sul sito dell'autore *www.cse.buffalo.edu/∼hungngo/classes/2011/Spring-694/lectures/sm.pdf*.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare i miei genitori e Lollo per l'inestimabile supporto che non mi fanno mai mancare e per la grande fiducia che ripongono in me. Un ringraziamento sincero lo dedico anche a tutto il resto della mia famiglia, in particolare a tutti i miei cugini e alla mia nonna.
Desidero ringraziare il Professor Ferri per il sostegno che mi ha dato nel redigere la tesi e soprattutto per l'entusiasmo contagioso che lo contraddistingue. Rivolgo inoltre un grato pensiero a tutti i docenti stimolanti e preparati, di scuola e università, che ho avuto la fortuna di incontrare lungo il mio percorso.
Un Grazie enorme va' ai miei "regaz della balotta": Mazzol, Fra, Miki, Pippo, Sasso, Polaz, la Vitto e la Chichi, Kacko, Nico, Polloian, Towerz, Gube, Lens, Bernins, Bueko, Shippo e Benz. Il tempo passato con voi, le ghigne, i pomeriggi al curvone e le sere in giro sono per me momenti di grande serenità e spensieratezza davvero indispensabili.
Ringrazio poi i componenti del nostro "gruppetto affiatato": l'Ali, la Fra, la Simo e Ludo con cui ho condiviso tanto studio e tante risate, che hanno certamente reso meno faticoso il percorso fatto assieme.
Vorrei infine dedicare un ringraziamento speciale alla Marti, che mi è stata accanto in questi anni e che spero ci sarà anche nei prossimi a venire.