

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

DIPARTIMENTO di
Ingegneria dell'Energia Elettrica e dell'Informazione
"Guglielmo Marconi"

CORSO DI LAUREA
in
Ingegneria dell'Automazione

TESI DI LAUREA
In
Geometria ed Algebra

Ellisoidi di Manipolabilità

CANDIDATO
Lorenzo Catacchini

RELATORE:
Prof. Massimo Ferri

Anno Accademico 2019/20

Sessione IV

Indice

Introduzione	5
Capitolo 1: Un problema reale	7
Storia	7
Perché usare i robot chirurgici?	10
Capitolo 2: Uno strumento matematico	11
Modello Matematico	11
Matrice Jacobiana	13
Jacobiana Analitica	14
Jacobiana Geometrica	16
Calcolo dell'inversa della Jacobiana	17
Autovalori, Autovettori e Decomposizione ai Valori Singolari	20
Autovalori ed autovettori	20
Decomposizione ai valori singolari (SVD)	20
Ellissoidi di Manipolabilità	21
Ellissoide di Velocità	21
Ellissoide di Forza	22
Misure di manipolabilità	23
Capitolo 3: Applicazione al caso reale del modello matematico	25
Controllo di sistemi teleoperati in chirurgia robotica	25
Manipolabilità per sistemi chirurgici teleoperati	26
Controllo ottimale del Master Robot	27
Altri usi degli Ellissoidi di Manipolabilità	29
Appendice	31
Null Space Controllers	31
Conclusioni	33
Bibliografia	35

Introduzione

Il controllo efficace e preciso di un manipolatore è estremamente importante in ambito industriale, ma sicuramente lo è ancora di più in ambito chirurgico.

Quando un robot viene utilizzato per operare un paziente, esso deve essere estremamente preciso nei movimenti ed intuitivo da manovrare. Inoltre, è molto importante che il chirurgo riesca ad ottenere un feedback in termini di forza dal robot così che riesca a capire la forza che sta imprimendo. Il chirurgo deve quindi poter operare il paziente con la stessa confidenza e sicurezza che ha quando usa le sue mani.

In questa tesi illustreremo una metodologia di controllo sviluppata da Ali Torabi et al. per sistemi robotici teleoperati che sfrutta un concetto geometrico molto importante, quello degli Ellissoidi di Manipolabilità. Lo scopo che vogliamo raggiungere è quello di ottenere un sistema di controllo per il sistema teleoperato che massimizzi la somiglianza cinematica del robot master e del robot slave, rendendo gli ellissoidi di manipolabilità dei due robot il più simili possibile.

Nel Primo Capitolo analizzeremo cosa si intende con chirurgia robotica, cosa è un sistema teleoperato e quali sono le problematiche e le sfide della progettazione di un sistema robotico teleoperato. Nel Secondo Capitolo tratteremo la teoria alla base degli Ellissoidi di Manipolabilità e li definiremo. Nell'Ultimo Capitolo vedremo come sviluppare un nuovo indice di manipolabilità per i sistemi teleoperati e come gli ellissoidi vengono utilizzati per sviluppare un controllo efficace per un manipolatore teleoperato in campo chirurgico.

Capitolo 1: Un problema reale

Con il termine “chirurgia robotica” si indica l’utilizzo di sistemi robotici nelle procedure chirurgiche. La chirurgia robot-assistita è volta a superare i limiti delle metodiche preesistenti, per migliorare l’accuratezza degli interventi e/o per ridurre l’invasività della procedura sul paziente.

Un sistema teleoperato è un sistema nel quale il controllo è demandato completamente all’operatore. Questi sistemi permettono di aumentare le capacità dell’utente di lavorare a distanza, amplificando magari la sua destrezza, ma il loro livello di automatismo è nullo.

La maggiore destrezza e manipolabilità offerte dai sistemi chirurgici teleoperati master-slave hanno migliorato significativamente le prestazioni e la sicurezza degli interventi chirurgici minimamente invasivi.

Storia

Partendo dalle origini della teleoperazione, il primo sistema teleoperato fu costruito dopo la Seconda Guerra Mondiale (1948) da Ray Goertz, per proteggere i lavoratori dalle radiazioni, garantendo allo stesso tempo una precisa manipolazione dei materiali.

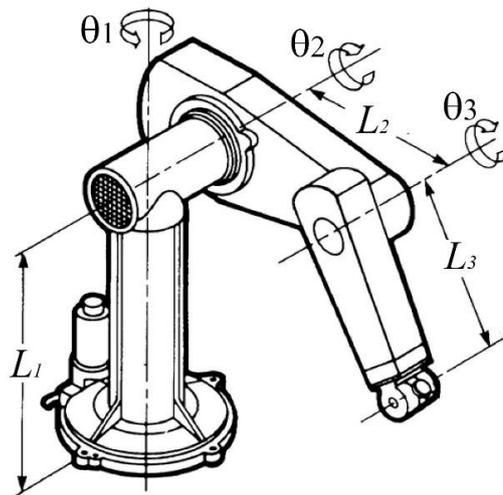


La storia della chirurgia robotica ha inizio alla fine degli anni Cinquanta con il dispositivo RAMS –Robotic Assisted Micro Surgery, messo a punto dal Pentagono, in grado di eseguire delle operazioni di microchirurgia da postazioni remote per i feriti di guerra. È proprio in questo periodo che siamo entrati nella vera e propria era robotica, in cui il chirurgo per la prima volta è stato in grado di compiere operazioni chirurgiche non più direttamente con le sue mani ma utilizzando bracci robotici, rimanendo seduto di fronte ad una consolle.

Il concetto di telechirurgia venne studiato negli anni Settanta dalla NASA, che era interessata alle applicazioni della chirurgia teleoperata per gli astronauti in orbita. L'idea di base era quella di avere un macchinario equipaggiato con strumenti chirurgici in una stazione spaziale, controllato da un chirurgo sulla Terra.

Intenzioni simili avevano i colleghi del dipartimento della DARPA (U.S. Defense Advanced Research Projects Agency), che volevano sviluppare una unità di chirurgia telerobotica, che potesse essere utilizzata per applicazioni chirurgiche da eseguire sui feriti sul campo di battaglia. [1]

Nel 1985 fu costruito il primo vero e proprio robot chirurgico Puma 560, utilizzato non in occasioni belliche, ma in un'operazione stereotassica, in cui la tomografia computerizzata è stata utilizzata per guidare il robot mentre inseriva un ago nel cervello per la biopsia, una procedura precedentemente soggetta a errori dovuti a tremori delle mani del chirurgo durante il posizionamento dell'ago.



Da allora sono stati fatti numerosissimi passi avanti in chirurgia robotica, fino ad arrivare nel nuovo secolo con tre nuove invenzioni di due aziende produttrici statunitensi, Computer Motion e Intuitive Surgical, che per anni si sono contese il mercato mondiale.

AESOP presentava un solo braccio robotico con annesso un endoscopio; attraverso dei pedali o la voce si poteva attivare un software che permetteva ai medici di controllare l'endoscopio lasciando loro le mani libere per eseguire l'operazione chirurgica. ZEUS invece più recente, rispetto al precedente, presentava, oltre all'endoscopio, anche due bracci per manovrare bisturi e strumenti chirurgici e comprendeva anche un display video e una postazione computer.



Il robot AESOP usato in chirurgia robotica



Il robot ZEUS della Computer Motion

La seconda azienda brevettò il famosissimo da Vinci, tutt'ora utilizzato in innumerevoli ospedali anche italiani. Questo robot chirurgico attualmente possiede quattro bracci: tre per gli strumenti chirurgici e uno per la telecamera con due lenti, che viene inserita all'interno del paziente per consentire al chirurgo di avere una visione completa in stereoscopia dalla console. Il chirurgo, in questo caso, rimane seduto nella propria postazione e guarda nei mirini per esaminare le immagini 3D, che sono proiettate dalla telecamera inserita all'interno del paziente, e controlla gli strumenti sorretti dai bracci robotici, i quali a loro volta sono manovrati in tempo reale da due pedali e un joystick. [2]



Perché usare i robot chirurgici?

Partiamo dai punti di forza. Pensiamo alla fase post-operatoria, spesso molto lunga per via di operazioni molto invasive; con l'utilizzo di un robot chirurgico si riduce grazie alla possibilità di eseguire delle microincisioni, limitando il trauma per i pazienti, il rischio di complicazioni, il tempo di ricovero e consentendo di ritornare prima alla vita quotidiana. Sono, inoltre, sistemi altamente versatili che permettono di eseguire operazioni a distanza; a questo proposito è senz'altro emblematico ricordare della storica operazione eseguita nel 2001 da Jacques Marescaux, che per la prima volta eseguì una operazione di colecistectomia a 6200 Km di distanza, il paziente si trovava a Strasburgo e il chirurgo a New York.

Infine, i robot chirurgici garantiscono una visione migliore delle strutture anatomiche garantendo un'immersione del chirurgo in uno spazio tridimensionale ad alta risoluzione, invece che utilizzare le immagini e video bidimensionali della tradizionale chirurgia invasiva, lo svantaggio è legato ai tempi operatori più lunghi, ed alla difficoltà di dosare la forza.

Il controllo efficace di un manipolatore è sempre stato un argomento centrale nella progettazione di un sistema robotico. A maggior ragione nel campo di chirurgia telerobotica.

Infatti, il chirurgo che deve operare un paziente sfruttando un robot chirurgico deve poter manovrare il robot master con semplicità ed intuitività, come se fosse lui stesso con le sue mani ad effettuare l'operazione.

Un'altra sfida importante è quella di fornire al chirurgo un feedback sensoriale che corrisponda il più possibile a quello che lui stesso proverebbe.

Quindi la sfida più importante è quella di fornire all'utilizzatore una esperienza che sia il più possibile aderente a quella reale, in termini di area di lavoro, di manovrabilità, e di sensazioni.

I robot master attualmente utilizzati in chirurgia presentano diversi inconvenienti, come la mancata corrispondenza cinematica tra robot slave e master, che limita la capacità del sistema di trasferire la destrezza e i limiti articolari dello slave all'utente.

Capitolo 2: Uno strumento matematico

In questo capitolo affronteremo la teoria alla base degli ellissoidi di manipolabilità partendo dal modello del manipolatore. Procederemo poi nello studio della matrice Jacobiana nelle sue due possibili forme (Analitica e Geometrica) e nello studio dei possibili metodi di inversione. A seguire affronteremo il concetto di autovalori, autovettori e SVD per concludere poi con l'argomento chiave di questo capitolo, gli (iper)ellissoidi di manipolabilità (di velocità e forza) e lo studio delle varie misure di manipolabilità.

Modello Matematico

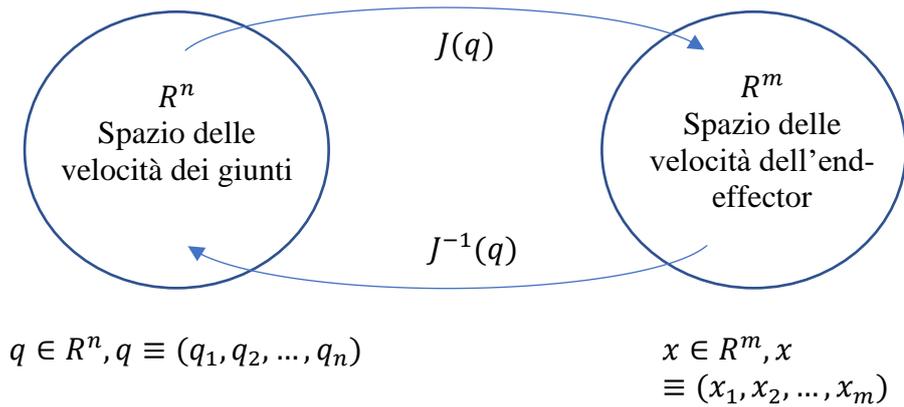
Per comprendere l'argomento trattato in questo capitolo dobbiamo innanzitutto analizzare il modello matematico alla base del manipolatore.

Il manipolatore è composto da dei corpi rigidi, i membri, che sono collegati fra loro da giunti prismatici e rotoidali (i giunti più complessi possono essere visti come una combinazione di questi due).

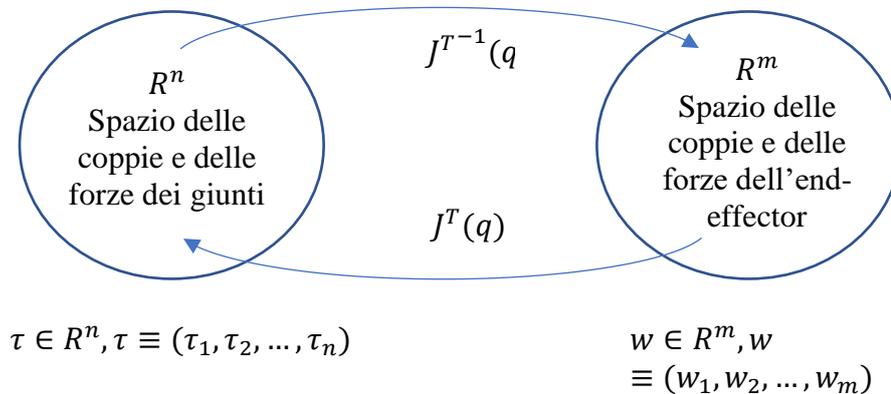
Ci sono infatti due possibili velocità: la velocità di rotazione dei giunti e la velocità dell'end-effector nello spazio di lavoro. Sono entrambe di interesse di studio e sono collegate fra loro. Vedremo fra poco la relazione che le collega.

Come per la velocità anche per la forza ci sono due possibilità: le coppie applicate ai giunti e le forze applicate dall'end-effector nello spazio di lavoro. Ovviamente anche esse sono collegate fra loro. Come per le velocità vedremo fra poco la relazione che le lega.

Abbiamo due spazi vettoriali, uno delle velocità di rotazione dei giunti, di dimensione n pari al numero di giunti che abbiamo, e uno delle velocità dell'end-effector, di dimensione m , pari alla dimensione dello spazio in cui si muove l'end-effector (generalmente questo spazio ha dimensione 6).



Il ragionamento possiamo ripeterlo in maniera analoga per le forze. Abbiamo due spazi vettoriali, uno delle coppie e delle forze applicate dai giunti, di dimensione n pari al numero di giunti che abbiamo, e uno delle forze e delle coppie applicate all'end-effector dallo spazio di lavoro, di dimensione m, pari alla dimensione dello spazio in cui si muove l'end-effector (generalmente questo spazio ha dimensione 6).



τ è il vettore delle forze/coppie applicate ai giunti, mentre w (wrench) è il vettore delle forze/coppie applicate all'end-effector.

Il passaggio da uno spazio all'altro è effettuato sfruttando la matrice associata alla trasformazione lineare che in questo caso è una matrice particolare, la matrice Jacobiana. Essa dipende dalla configurazione del manipolatore e di conseguenza il collegamento fra le forze e le velocità è istantaneamente garantito dalla Jacobiana. Tuttavia, il vero legame globale è quello fornito dalla funzione di cui la Jacobiana è matrice.

Matrice Jacobiana

Dato un manipolatore a n gradi di libertà, per poter studiare le sue capacità di movimento dobbiamo prima definire la Matrice Jacobiana associata al manipolatore, che viene utilizzata in robotica per diversi scopi:

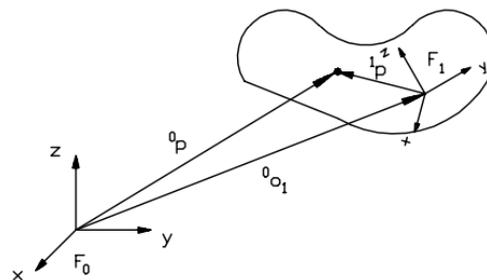
- Definire la relazione fra velocità nello spazio dei giunti e in quello di lavoro
- Definire la relazione fra forze e coppie fra gli spazi
- Studiare le configurazioni di singolarità
- Definire le procedure per risolvere il problema di cinematica inversa di un manipolatore
- Studiare le proprietà di manipolabilità del manipolatore

La relazione fra le velocità dei giunti e dell'end-effector e la relazione fra le forze applicate sull'ambiente dal manipolatore e le corrispondenti coppie può essere descritta istantaneamente usando la matrice Jacobiana.

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} \Leftrightarrow \dot{q}$$

$$\begin{bmatrix} f \\ n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \tau$$

Per definire la Jacobiana, consideriamo un corpo rigido e un punto \mathbf{p} appartenente ad esso. Consideriamo due sistemi di riferimento, F_0 ed F_1 (solidale col corpo rigido).



La velocità lineare del punto \mathbf{p} rispetto il sistema di riferimento F_0 è definita come la derivata di \mathbf{p} .

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

Per quanto riguarda la velocità rotazionale ci sono due possibilità:

1. Definire una tripla di angoli $Y \in \mathbb{R}^3$ che definisce l'orientazione di F_1 rispetto F_0 (angoli di Eulero, RPY, ...) e usare la sua derivata per definire la velocità rotazionale $\dot{Y} = \frac{dY}{dt}$.
2. Definire il vettore della velocità angolare ω , che ha l'origine coincidente con F_0 e la sua direzione coincide col centro di istantanea rotazione del corpo rigido.

A seconda che io decida di usare un modo o l'altro per definire la velocità angolare, ho due tipi di Jacobiana diversi, rispettivamente:

- Jacobiana Analitica J_A
- Jacobiana Geometrica J_G

Jacobiana Analitica

L'espressione analitica della Jacobiana è ottenuta differenziando il vettore posizione $x = f(q) \in \mathbb{R}^6$, che definisce posizione ed orientamento del manipolatore in F_0 . (q è un vettore $\in \mathbb{R}^n$ che definisce una configurazione delle variabili dei giunti).

Differenziando $f(q)$ si ottiene:

$$dx = \frac{\partial f(q)}{\partial q} dq = J(q) dq$$

dove

$$J(q) = \frac{\partial f(q)}{\partial q} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_1(q)}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f_m(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix}$$

$J(q)$ è la Matrice Jacobiana del manipolatore.

Se consideriamo un periodo infinitesimo di tempo dt si ottiene:

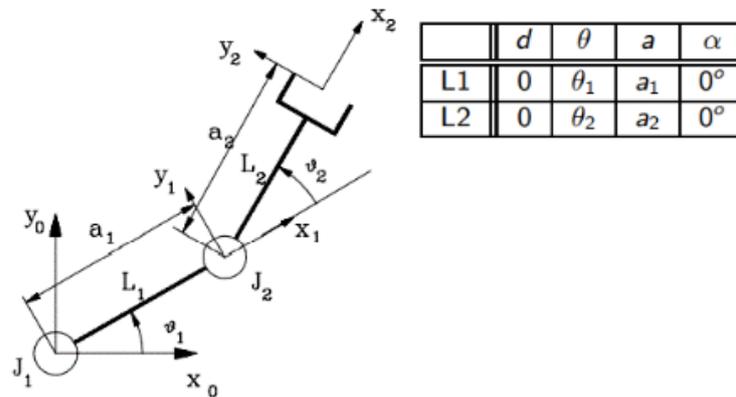
$$\frac{dx}{dt} = J(q) \frac{dq}{dt}$$

$$\dot{x} = J(q) \dot{q}$$

Trovando così la relazione fra le velocità nello spazio di lavoro e quelle nello spazio dei giunti.

La matrice jacobiana è una matrice $\in \mathbb{R}^{m \times n}$, dove m è la dimensione dello spazio di lavoro (\mathbb{R}^6 generalmente) e n è il numero di giunti che ha il manipolatore.

Esempio



La posizione dell'end-effector è:
$$p = \begin{bmatrix} a_1 C_1 + a_2 C_2 \\ a_1 S_1 + a_2 S_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

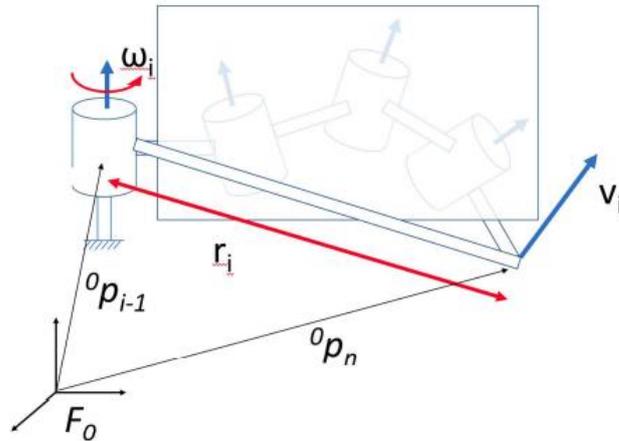
Se Υ è composto dagli angoli di Euler φ, θ, ψ definiti attorno agli assi z_0, y_1, z_2 , e considerando che gli assi z del sistema di riferimento della base e dell'end-effector sono paralleli, allora la rotazione è equivalente alla rotazione attorno l'asse z_0 di angolo:

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 + \theta_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Differenziando le espressioni di p e Υ si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\Upsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 S_1 - a_2 S_{12} & -a_2 S_{12} \\ a_1 C_1 + a_2 C_{12} & a_2 C_{12} \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = J(q)\dot{q}$$

Jacobiana Geometrica



L'espressione geometrica della Jacobiana è ottenuta considerando il vettore velocità angolare ω .

Ogni colonna della Jacobiana definisce l'effetto dell' i -esimo giunto sulla velocità dell'end-effector.

Il primo termine considera l'effetto di \dot{q}_i sulla velocità lineare, mentre il secondo sulla velocità angolare ω .

Sappiamo che $\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = J_G(q)\dot{q} \Rightarrow J = \begin{bmatrix} J_{v1} & J_{v2} & \dots & J_{vn} \\ J_{\omega 1} & J_{\omega 2} & \dots & J_{\omega n} \end{bmatrix}$ e quindi troviamo che

$$v = J_{v1}\dot{q}_1 + J_{v2}\dot{q}_2 + \dots + J_{vn}\dot{q}_n$$

$$\omega = J_{\omega 1}\dot{q}_1 + J_{\omega 2}\dot{q}_2 + \dots + J_{\omega n}\dot{q}_n$$

La forma Analitica e quella Geometrica della Jacobiana differiscono solo per la parte rotazionale.

Si può dimostrare che, a seconda del tipo di giunto, la generica colonna della Jacobiana Geometrica è:

$$\begin{bmatrix} J_{vi} \\ J_{\omega i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1}^0 \times (p_n^0 - p_{i-1}^0) \\ z_{i-1}^0 \end{bmatrix} \text{ per un giunto rotoidale}$$

$$\begin{bmatrix} J_{vi} \\ J_{\omega i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{i-1}^0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ per un giunto prismatico}$$

dove z_{i-1}^0 è la direzione di rotazione/traslazione, p_n^0 è la posizione dell'end-effector rispetto al sistema di riferimento base F_0 e p_{i-1}^0 è la posizione del sistema di riferimento solidale all'i-simo giunto rispetto F_0 .

Calcolo dell'inversa della Jacobiana

Nel caso in cui la dimensione dello spazio di partenza e quella dello spazio di arrivo corrispondano, ovvero $m=n$, e il determinante della Jacobiana sia non nullo, allora in tal caso $J(q)$ è invertibile e

$$\dot{x} = J(q)\dot{q}$$

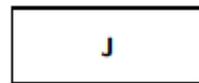
Nel caso in cui le dimensioni dei due spazi non corrispondano, in tal caso si deve ricorrere alla pseudo-inversa di Moore-Penrose:

$$\dot{q} = J^+(q)\dot{x}$$

Dove

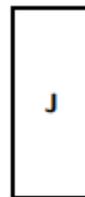
$$J^+ = J^T(JJ^T)^{-1} \text{ se } m < n \text{ (pseudo inversa destra: } JJ^+ = I)$$

$$J^+ = (J^T J)^{-1} J^T \text{ se } n < m \text{ (pseudo inversa sinistra: } J^+ J = I)$$



a) $m < n$

Manipolatore
ridondante

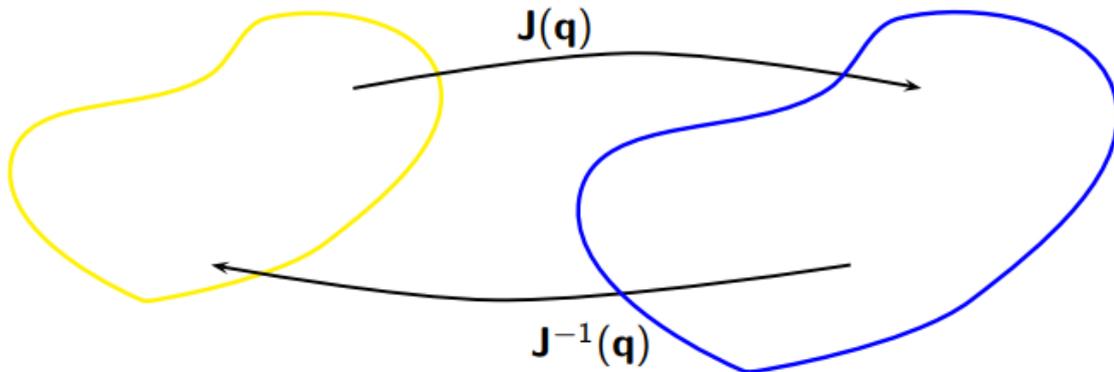


b) $m > n$

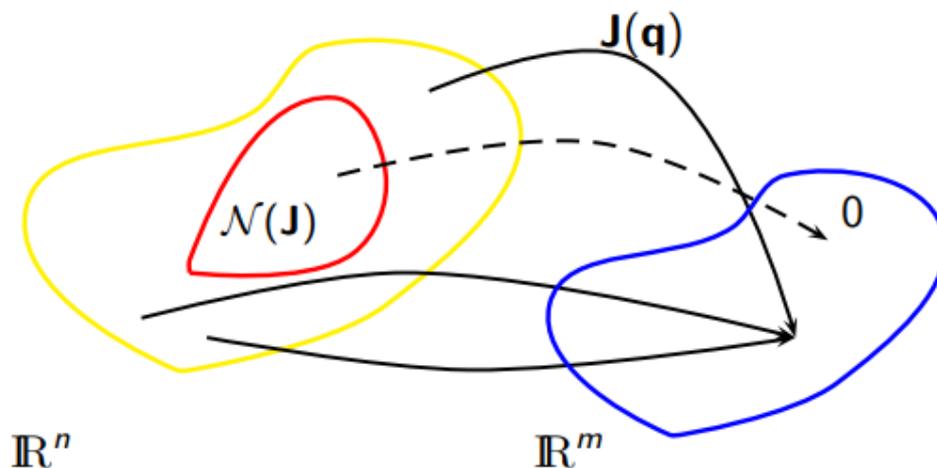
Manipolatore
defettivo

L'equazione $\dot{x} = J(q)\dot{q}$ (come $\dot{x} = J(q)\dot{q}$) ammette una unica soluzione nel caso in cui $m=n$ e $\det(J) \neq 0$:

$$\forall \dot{x}_0 \rightarrow \exists ! \dot{q}_0 = J^{-1}\dot{x}_0 \text{ tale che } \dot{x}_0 = J\dot{q}_0 = JJ^{-1}\dot{x}_0$$



Se però $m < n$, ovvero lo spazio di arrivo ha dimensione minore dello spazio di partenza ed abbiamo un manipolatore ridondante, avrò nello spazio dei giunti, un sottospazio nullo, il quale mi darà per soluzione il vettore nullo dello spazio di arrivo. Quindi in questo caso abbiamo ∞^{n-m} soluzioni:



$$\forall \dot{x} \exists \dot{q} \text{ tale che } \dot{x} = J\dot{q} \text{ (avrò però soluzioni multiple)}$$

$$\begin{aligned} \exists \mathcal{N}(J) \text{ tale che } \forall \dot{q} \in \mathcal{N}(J) \rightarrow \dot{x} = J\dot{q} = 0 \rightarrow \dot{q} = J^+\dot{x} + \dot{q}_N \rightarrow \\ \rightarrow \dot{x} = J(J^+\dot{x} + \dot{q}_N) = \dot{x}, \forall \dot{q}_N \end{aligned}$$

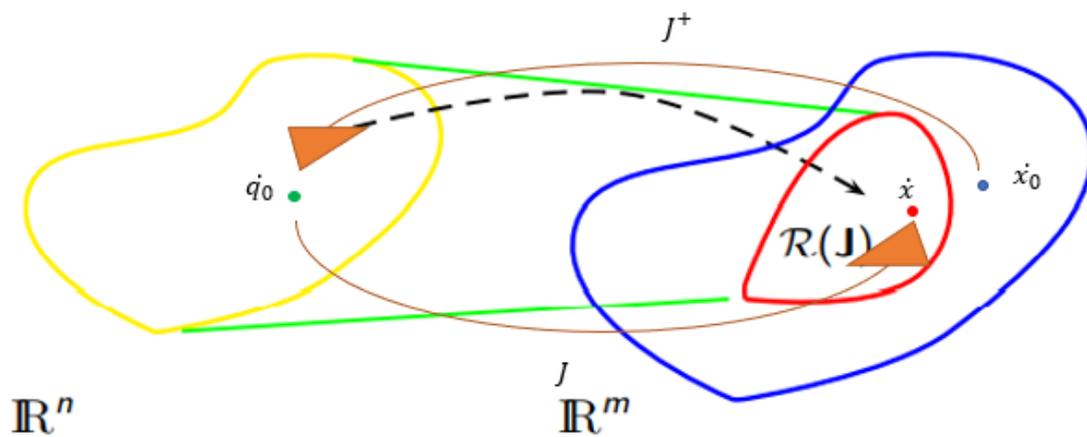
Quindi $\dot{q} = J^+ \dot{x}$ sarà la soluzione che presenterà la norma minima. Infatti,

$$\|\dot{q}\| = \|J^+ \dot{x}\| < \|J^+ \dot{x} + \dot{q}_N\| \text{ se } \dot{q}_N \neq 0$$

quindi avrò la soluzione più efficiente dal punto di vista energetico.

Se invece $m > n$ (manipolatore defettivo), tutti i vettori dello spazio di partenza, andranno con la trasformazione lineare, a finire in un sottospazio dello spazio di arrivo, l'immagine.

Se scegliessimo una soluzione specifica dello spazio di arrivo non appartenente all'immagine, \dot{x}_0 , quello che troviamo è che sfruttando la pseudo inversa otteniamo una soluzione, la quale presenta l'errore minimo rispetto quella richiesta.



$$\text{Se } \dot{x} \in \mathcal{R}(J) \rightarrow \exists ! \dot{q} \text{ tale che } \dot{x} = J\dot{q} \in \mathcal{R}(J)$$

$$\text{Se } \dot{x} \notin \mathcal{R}(J) \rightarrow \nexists \dot{q} \text{ tale che } \dot{x} = J\dot{q} \in \mathcal{R}(J)$$

$$\text{Se } \dot{x}_0 \notin \mathcal{R}(J) \rightarrow \exists \dot{q}_0 = J^+ \dot{x}_0 \rightarrow \dot{x} = J\dot{q}_0 = JJ^+ \dot{x}_0 \neq \dot{x}_0 \quad (JJ^+ \neq I)$$

In questo caso $\|\dot{x} - \dot{x}_0\|$ è minima.

Quindi nel caso generale, usando la tecnica della pseudo inversa, ottengo una soluzione che presenta costo energetico minimo ed anche errore minimo nel caso in cui la soluzione desiderata non fosse ottenibile fisicamente.

Autovalori, Autovettori e Decomposizione ai Valori Singolari

Prima di poter parlare dell'ellissoide di manipolabilità, è necessario introdurre tre concetti: Autovalori, Autovettori e SVD.

Autovalori ed autovettori

(Def 7.2 Casali, Gagliardi, Grasselli)

Uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto autovalore dell'operatore lineare T su V se il sottospazio $U_\lambda(T)$ di V non si riduce al solo vettore nullo 0 di V . In tal caso $U_\lambda(T)$ è detto autospazio di T relativo all'autovalore λ ; gli elementi di $U_\lambda(T)$ vengono detti autovettori di T relativi all'autovalore λ .

$$U_\lambda(T) = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}$$

In altre parole, $\lambda \in \mathbb{K}$ è detto autovalore di T se esiste un vettore $v \neq 0$ di V tale che:

$$T(v) = \lambda v$$

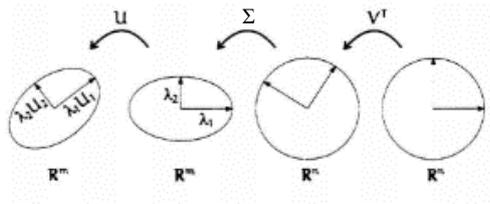
Decomposizione ai valori singolari (SVD)

Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e posto $p = \min(m, n)$, una decomposizione ai valori singolari (SVD) di A è una fattorizzazione della forma

$$A = U \Sigma V^T$$

dove $U = (u_1 \cdots u_m) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V = (v_1 \cdots v_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono ortogonali e $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ è (pseudo)diagonale con elementi diagonali $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_p \geq 0$.

Se $m \neq n$, posto $\tilde{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$, la matrice Σ ha la forma a blocchi $\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\Sigma} \end{pmatrix}$ se $m > n$ e $\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Sigma} \end{pmatrix}$ se $m < n$. Gli elementi $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ sono chiamati *valori singolari di A* , le colonne di U sono i vettori singolari sinistri e quelle di V sono i vettori singolari destri. V rappresenta la matrice di rotazione in \mathbb{R}^n , U^T la matrice di rotazione in \mathbb{R}^m e Σ rappresenta la matrice di trasformazione da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . [3]



Se $A = A^T$ è simmetrica, allora ha autovalori reali. Se considero A generata dal prodotto di una matrice B per la sua trasposta, allora A è simmetrica per definizione e vale la seguente proprietà:

$$A = BB^T \Rightarrow \sigma_i\{B\} = \sqrt{\lambda_i\{A\}} \quad i = 1, \dots, n$$

NB: autovalori e valori singolari sono diversi in generale.

Ellissoidi di Manipolabilità

L'ellissoide di manipolabilità è una superficie grazie alla quale si riesce ad avere una rappresentazione geometrica della capacità di un punto di un sistema articolato di generare velocità e forze nello spazio. [1]

È uno strumento che viene usato per misurare le prestazioni ottenibili dal manipolatore, considerando il guadagno meccanico del manipolatore.

Ci sono due tipi di ellissoidi, che sono fra loro collegati:

- Ellissoide di velocità
- Ellissoide di forza

Ellissoide di Velocità

Per definire l'ellissoide di manipolabilità partiamo considerando una sfera unitaria nello spazio delle velocità dei giunti:

$$\dot{q}^T \dot{q} = 1$$

Questa sfera possiamo considerarla come un “costo” di energia entrante nel sistema. È interessante andare a trovare il corrispettivo nello spazio delle velocità dello spazio di lavoro.

Sapendo che $\dot{x} = J(q)\dot{q}$ se J è quadrata e $\dot{x} = J^+(q)\dot{q}$ se J è rettangolare, dove J^+ è la pseudo inversa di J, troviamo:

$$\dot{x}^T (JJ^T)\dot{x} = 1$$

Ovvero la forma quadratica che rappresenta nello spazio operativo R^m un ellissoide. La forma e l'orientazione dell'ellissoide dipendono dal nucleo della forma quadratica, in questo caso dalla matrice JJ^T che è in generale funzione della configurazione del manipolatore.

$$Ker(T) = Ker(JJ^T)$$

Gli autovettori di questa forma quadratica individuano le direzioni lungo le quali si ha in corrispondenza dell'end-effector del robot la massima (minima) amplificazione di velocità. Nello specifico:

- la direzione degli assi principali dell'ellisse è definita dagli autovettori u_i di JJ^T .
- la lunghezza degli assi principali è data dai valori singolari di J, $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i\{JJ^T\}}$.

Ellissoide di Forza

Procediamo in maniera analoga anche per il dominio delle forze/coppie partendo dalla forma quadratica:

$$\tau\tau^T = 1$$

Ricordando che $\tau = J^T w$, ne segue che:

$$w^T JJ^T w = 1$$

Questa equazione definisce un ellissoide nello spazio operativo delle forze in R^m .

Gli autovettori di questa forma quadratica individuano le direzioni lungo le quali si ha in corrispondenza dell'end-effector del robot la massima (minima) amplificazione di forza.

Similmente al caso precedente si ha che:

- la direzione degli assi principali dell'ellisse è definita dagli autovettori u_i di JJ^T .
- la lunghezza degli assi principali è proporzionale all'inverso dei valori singolari di J, $\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i\{JJ^T\}}}$.

È facile comprendere che $w_1 > 0$, tranne nel caso in cui il manipolatore è in una configurazione singolare (in tal caso $w_1 = 0$).

Questa misura di manipolabilità ha il vantaggio di essere facile da calcolare, tuttavia il suo valore numerico non costituisce una misura assoluta sulla vicinanza del manipolatore da una configurazione di singolarità.

Per questa motivazione si può considerare un altro indice di manipolabilità:

$$w_2(q) = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

ovvero il rapporto fra il minimo e il massimo valore singolare della Jacobiana. Questo rapporto non dà solo una misura circa la distanza dalla singolarità ($w_2(q) = 0$), ma anche una diretta misura dell'eccentricità dell'ellissoide. Lo svantaggio è la complessità computazionale che questo indice richiede; è praticamente impossibile calcolarlo in forma simbolica, ad esempio come funzione delle configurazioni dei giunti. [4]

Infine, un ulteriore indice di manipolabilità che possiamo considerare è:

$$w_3(q) = \sigma_{min}$$

In questo caso si controlla il “caso peggiore”, la direzione dove ho le prestazioni peggiori.

N.B.

Per prestazioni di un ellissoide si intende la capacità dello stesso nell'amplificare le forze o le velocità nello spazio di lavoro

Capitolo 3: Applicazione al caso reale del modello matematico

In questo capitolo vedremo qualche applicazione degli (iper)ellissoidi di manipolabilità, come vengono usati per studiare le possibilità di movimento di un sistema e qual è la loro utilità.

Grazie al lavoro di Torabi et al. [6] [7], nello specifico vedremo come essi vengono utilizzati per sviluppare un controllo efficace per un manipolatore teleoperato in campo chirurgico. Vedremo cosa è un sistema teleoperato per chirurgia, come sviluppare un nuovo indice di manipolabilità per i sistemi teleoperati e come ottenere un controllo efficace ed efficiente per questi sistemi.

Controllo di sistemi teleoperati in chirurgia robotica

Nel contesto chirurgico lo slave è il robot che effettivamente compie l'operazione, mentre il master è un dispositivo che consente al chirurgo di controllare lo slave fornendo al contempo feedback visivo e di forza all'utente per migliorare la sicurezza della procedura. Generalmente è un dispositivo aptico.

Il controllore sfrutta le ridondanze del robot per ottimizzare l'indice di manipolabilità e abbinare la cinematica del master e dello slave.

Nelle applicazioni chirurgiche telerobotiche, l'area di lavoro, la manovrabilità, i gradi di libertà e il feedback sensoriale del robot principale dovrebbero corrispondere idealmente ai movimenti intuitivi della mano del chirurgo e imitare il più possibile l'esperienza della chirurgia convenzionale. I robot master attualmente utilizzati in chirurgia presentano diversi inconvenienti, come la mancata corrispondenza cinematica tra robot slave e master, che limita la capacità del sistema di trasferire la destrezza e i limiti articolari dello slave all'utente.

Usando un robot master ridondante, è possibile sviluppare un dispositivo aptico cinematicamente compatibile con differenti slave, task e applicazioni.

Un robot ridondante è un robot che ha più gradi di libertà di quelli necessari a svolgere il compito necessario. Ad esempio, se vogliamo prendere con un robot un oggetto nello

spazio in cui viviamo, abbiamo bisogno di almeno sei gradi di libertà. Il robot è ridondante quando ne ha più di sei. In tal caso, posso prendere l'oggetto in più modi differenti.

È possibile definire un ulteriore indice per quantificare la destrezza dei robot master-slave: l'Indice di Manipolabilità Teleoperazionale (TMI).

Manipolabilità per sistemi chirurgici teleoperati

L'indice di manipolabilità $w_1(q) = \sqrt{\det(JJ^T)}$ può essere modificato per estendere la definizione di manipolabilità ai sistemi chirurgici teleoperati. Quello che vogliamo nella teleoperazione è che l'utilizzatore provi le stesse sensazioni che proverebbe se stesse interagendo direttamente con l'ambiente dello slave. Questo richiede che le forze e le posizioni lato master e lato slave corrispondano. Supponiamo che master e slave seguano l'uno la posizione dell'altro. Quindi possiamo assumere che l'end-effector del master e dello slave siano fisicamente attaccati insieme. [6]

Questo ci suggerisce l'osservazione che la manipolabilità teleoperazionale sia l'intersezione fra l'ellissoide di manipolazione del master e quello dello slave.

Assumiamo che il task teleoperazionale da compiere sia definito nello spazio di lavoro dello slave e che l'ellissoide di manipolabilità del master sia trasformato nel sistema di riferimento dello slave.

Quindi come visto precedentemente gli ellissoidi di manipolabilità del master e dello slave possono essere definiti rispettivamente come:

$$\begin{aligned}\dot{x}^T (HJ_M J_M^T H^T)^{-1} \dot{x} &= 1 \\ \dot{x}^T (J_S J_S^T) \dot{x} &= 1\end{aligned}$$

dove J_S è la matrice Jacobiana dello slave, J_M è la matrice Jacobiana del master e H è la matrice di trasformazione, che trasforma l'ellissoide di manipolabilità del master nel sistema di riferimento dello slave. [6]

L'ellissoide di manipolazione del sistema teleoperato è l'ellissoide più grande che può essere trovato nell'intersezione dei due ellissoidi.

Massimizzando l'intersezione fra gli ellissoidi di manipolazione, possiamo aumentare la somiglianza cinematica fra il master e lo slave, e di conseguenza incrementare la manipolabilità del sistema teleoperato. [7]

L'indice di manipolabilità teleoperata (TMI) può essere definito sfruttando la divergenza di Jensen-Bregman [9], dato che è computazionalmente efficiente e garantisce convergenza.

Quindi il TMI è definito come:

$$v = C_1\psi_t + C_2\psi_r$$

dove C_1 e C_2 sono dei fattori di scala scalari, mentre ψ_i con $i = t, r$ è:

$$\psi_i = \logdet\left(\frac{M_i^s + M_i^m}{2}\right) - \frac{1}{2}\logdet(M_i^s M_i^m)$$

dove M_i^s ed M_i^m sono le componenti di rotazione ($i=r$) e di traslazione ($i=t$) della forma quadratica che rappresenta l'ellissoide nello spazio operativo. v è l'indice che quantifica la somiglianza cinematica fra master e slave. Quando v è 0, il master e lo slave hanno ellissoidi di manipolabilità simili, cioè la loro intersezione è massima. [7]

Quello che vogliamo quindi ottenere è una strategia di controllo che ottimizzi v per un master ridondante durante un task teleoperazionale.

Controllo ottimale del Master Robot

Precedentemente i ricercatori hanno sfruttato i null-space controller nei sistemi teleoperati in maniera tale da sfruttare i gradi di libertà ridondanti per stare alla larga dalle singolarità, mantenere il manipolatore in una configurazione predefinita oppure per ottenere il massimo spazio di moto possibile.

Nei sistemi teleoperati generalmente il master e lo slave hanno cinematiche diverse, e quindi differenti punti di singolarità. Nel nostro caso la cinematica del master e dello slave combaciano, in maniera tale da far combaciare anche i punti di singolarità di entrambi. Questo è molto comodo in quanto sarà necessario un unico schema di controllo per evitare le singolarità per entrambi i robot.

Nell'approccio presentato, assumiamo che stiamo implementando un master ridondante per controllare teleoperativamente uno slave, che è designato ad un compito specifico (e quindi sarà cinematicamente compatibile con il task).

Il master robot è un dispositivo aptico di tipo induttivo, di conseguenza per questo dispositivo si deve sviluppare un controllo d'impedenza.

Il modello dinamico del master nello spazio dei giunti può essere definito come:

$$M_q(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G_q(q) + F_q = \tau_m + J^T(q)F_h$$

dove $M_q(q)$ è la matrice di inerzia $n \times n$, $C(q, \dot{q})$ è la matrice $n \times n$ dei termini di Coriolis e centrifughi, G_q è il vettore $n \times 1$ delle coppie gravitazionali, τ_m è il vettore $n \times 1$ delle coppie di controllo ed F_h è il vettore $m \times 1$ delle forze/coppie applicate dalla mano dell'utilizzatore sull'end-effector del master robot.

La dinamica dell'end effector del master nello spazio di lavoro può essere scritta come:

$$M_x \ddot{x} + C_x \dot{x} + G_x + F_x = F_m + F_h$$

dove $M_x = (JM_q^{-1}J^T)^{-1}$ è la matrice $m \times m$ dell'inerzia dell'end-effector o matrice di inerzia apparente, $C_x = M_x(JM_q^{-1}C_q - \dot{J})J^\#$ è la matrice $m \times m$ dei termini centrifughi e di Coriolis dell'end-effector, $G_x = J^{\#T}G_q$ è il vettore delle forze/coppie gravitazionali, ed $F_x = J^{\#T}G_q$ è il vettore degli attriti dati dalle forze/coppie all'end-effector. $J^\#$ è l'inversa generalizzata della Jacobiana, ed è definita come:

$$J^\# = M_q^{-1}J^T [JM_q^{-1}J^T]^{-1}$$

La dinamica dello spazio di lavoro può essere modificata ad un modello di impedenza con resistenza nulla scegliendo F_m come segue:

$$F_m = -M_x(M_x^d)^{-1}B^d\dot{x} + M_x(M_x^d)^{-1}(F_h) - F_h + C_x\dot{x} + G_x + F_x$$

Quindi il modello di riferimento del master diventa:

$$M_x^d \ddot{x} + B^d \dot{x} = x_h$$

dove M_x^d e B^d sono l'inerzia apparente e la matrice degli smorzamenti desiderate.

Scegliendo l'inerzia desiderata del robot pari alla sua inerzia apparente, eliminiamo la necessità di calcolare il modello preciso del robot e la forza dell'utente, che generalmente è ritardata, rumorosa ed inaccurata. Scegliendo $M_x^d = M_x$ la nuova legge di controllo diventa:

$$F_m = -B^d\dot{x} + C_x\dot{x} + G_x + F_x$$

a cui corrisponde la legge di controllo della coppia dei giunti:

$$\tau_m = J^T F_m$$

abbiamo quindi ottenuto il controllore d'impedenza desiderato. Tuttavia, esso non è sufficiente al controllo del nostro sistema, necessitiamo di un altro controllore.

Infatti, le azioni di controllo usate per ottenere uno specifico moto interno (es. obiettivo secondario) sono costrette a vivere nel nucleo (o spazio nullo) della Jacobiana. Quindi l'obiettivo principale e secondario sono disaccoppiati. Ad ogni modo, riprenderò meglio questi concetti nell'appendice.

Per separare il controllore dello spazio di lavoro e quello dello spazio nullo, possiamo riscrivere la coppia desiderata come: [10]

$$\tau_d = \tau_m + (I - J^T(J^\#)^T)(\tau_N - k_d\dot{q})$$

Dove τ_d è il vettore $n \times 1$ delle coppie desiderate, τ_m è il vettore $n \times 1$ delle coppie del controllore d'impedenza, τ_N è il vettore $n \times 1$ delle coppie dello spazio nullo, corrispondenti

all'obiettivo secondario. τ_N è proiettato nello spazio nullo della Jacobiana, usando la matrice $I - J^T(J^\#)^T$.

Ora, introduciamo τ_N in maniera tale che si occupi dell'obiettivo secondario come:

$$\tau_N = -\alpha \frac{\partial v(q)}{\partial q}$$

dove α è un fattore di scala, $v(q)$ è il TMI calcolato precedentemente, nonché obiettivo secondario. Con questa scelta di τ_N , il sistema di controllo tenta di diminuire il valore di $v(q)$, mentre il robot sta eseguendo il suo compito principale. In altre parole, il robot cerca di ottimizzare la similarità cinematica fra il master e lo slave, rendendo gli ellissoidi di manipolabilità dei due robot, più simili possibile.

Il controllo proposto massimizza la manipolabilità del sistema teleoperato, minimizzando l'indice di manipolabilità teleoperata v . Minimizzando il TMI siamo in grado di incrementare il controllo dell'utente sulle velocità e forze dello slave robot del sistema chirurgico e di ottimizzare lo sforzo di controllo dell'utente.

Altri usi degli Ellissoidi di Manipolabilità

Prattichizzo et al, usano gli Ellissoidi di Manipolabilità per studiare la manipolabilità di mani robotiche sottoattuate con conformità, al fine di introdurre un nuovo indice di manipolabilità che tiene conto della sottoattuazione e della conformità. [11]

Masashi Yamashita sfrutta un sistema di image processing per stimare l'ellissoide di manipolabilità istantaneamente e sviluppare un sistema robotico di controllo assistivo per la riabilitazione del braccio umano, che garantisca elevata rigidità nella direzione ortogonale al movimento e favorisca il moto nella direzione consentita. [12]

Appendice

Null Space Controllers

Nel controllo di un manipolatore nello spazio di lavoro, non è raro avere più obiettivi di controllo, come ad esempio “muovi l’end-effector in questa posizione” (obiettivo primario) e “tieni il gomito sollevato” (obiettivo secondario).

Generalmente quando abbiamo a che fare con robot complessi, le forze controllate nello spazio operativo hanno dimensione minore del numero di gradi di libertà del manipolatore, e quindi è possibile svolgere il compito primario in più modi.

Lo spazio nullo del controllore primario è la regione dello spazio degli stati dove ho ridondanza di soluzioni: il sistema può muoversi in vari modi e non portare a termine l’obiettivo del controllore primario.

In queste situazioni un controllore secondario può essere creato al fine di operare nello spazio nullo del controllore primario. Di conseguenza il segnale di controllo inviato al sistema sarà la somma del segnale di controllo del controllore primario e di quello filtrato del controllore secondario.

Filtrare il segnale di controllo secondario significa che gli obiettivi del controller secondario saranno perseguiti solo se è possibile farlo senza influire sulle prestazioni del controller primario. In altre parole, il controller secondario deve funzionare nello spazio nullo del controller primario. [8]

Conclusioni

In questa tesi ho illustrato l'importanza degli Ellissoidi di Manipolabilità, uno strumento geometrico preso in prestito dal mondo ingegneristico, il quale ne ha fatto una colonna portante della sua teoria e dei suoi studi.

Dopo aver introdotto un problema reale da risolvere, quello del controllo di un sistema chirurgico teleoperato, ho trattato la teoria alla base degli Ellissoidi di Manipolabilità, per poi arrivare a vedere come lo strumento appena citato venisse utilizzato per risolvere il problema posto.

Grazie al lavoro di Ali Torabi et al., ho potuto mettere in luce una nuova metodologia di controllo per sistemi robotici teleoperati, basata sulla massimizzazione della somiglianza cinematica fra master e slave, grazie alla riduzione dell'Indice di Manipolabilità Teleoperata introdotto in questa discussione.

Bibliografia

- [1] Moore, E. J., "Robotic surgery." Encyclopedia Britannica, November 23, 2018.
<https://www.britannica.com/science/robotic-surgery>.
- [2] M. Bogliolo, "Robot e medicina, il futuro passa di qui",
www.scuoladirobotica.it/robot-e-medicina/
- [3] E. Guardo, Decomposizione a valori singolari ed applicazioni,
<http://web.dmi.unict.it/sites/default/files/files/SVD%26Applications.pdf>
- [4] B. Siciliano, Robotics, Modelling Planning Control
- [5] C. Melchiorri, Dispense del corso Foundation of Industrial Robotics
- [6] Torabi, Ali & Khadem, Mohsen & Zareinia, Kourosh & Sutherland, Garnette & Tavakoli, Mahdi. (2018). Manipulability of Teleoperated Surgical Robots with Application in Design of Master/Slave Manipulators. 10.1109/ISMR.2018.8333307.
- [7] Torabi, A., Khadem, M., Zareinia, K., Sutherland, G., & Tavakoli, M. (2020). Using a Redundant User Interface in Teleoperated Surgical Systems for Task Performance Enhancement. *Robotica*, 38(10), 1880-1894. doi: 10.1017/S0263574720000326
- [8] T. DeWolf, Robot Control Part 5: Controlling in the Null Space,
<https://studywolf.wordpress.com/2013/09/17/robot-control-5-controlling-in-the-null-space/>
- [9]: A. Cherian, S. Sra, A. Banerjee and N. Papanikolopoulos, "Efficient Similarity Search for Covariance Matrices via the Jensen-Bregman LogDet Divergence," 2011 International Conference on Computer Vision, Barcelona, Spain (Nov 2011) pp. 2399–2406.
- [10]: O. Khatib, "A unified approach for motion and force control of robot manipulators: The operational space formulation," *IEEE J. Robot. Autom.* 3(1), 43–53 (1987).
- [11]: D. Prattichizzo, et al, On the manipulability ellipsoids of underactuated robotic hands with compliance, *Robotics and Autonomous Systems* (2011)
- [12]: M. Yamashita, Robotic Rehabilitation System for Human Upper Limbs Using Guide Control and Manipulability Ellipsoid Prediction, *Procedia Technology*, Volume 15, 2014

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare il Prof. Massimo Ferri, per avermi fatto amare questa materia, e per avermi sopportato, nonostante le innumerevoli domande e i messaggi agli orari più improbabili.

Vorrei ringraziare la mia Famiglia, senza la quale non potrei essere qui oggi con Voi, la quale mi ha permesso di studiare e di arrivare dove sono, supportandomi e sopportandomi durante questo percorso e durante tutta la mia vita.

Vorrei ringraziare i miei coinquilini e i miei colleghi di corso, valorosi compagni di viaggio, avventure, sciagure e soprattutto inimitabili compagni di risate.

Vorrei ringraziare i miei Amici tutti, i quali sono sempre stati al mio fianco, ed io al loro, nelle innumerevoli avventure che abbiamo vissuto insieme e che vivremo negli anni a venire.

Vorrei infine ringraziare me, per non avere mai mollato ed avere stretto i denti nei periodi più bui.

Che questo traguardo tanto desiderato possa essere un punto di partenza, per nuove esperienze e nuovi percorsi.

Lorenzo