

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

---

SCUOLA DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea in Matematica

# MODELLI TOPOLOGICI DEL PIANO PROIETTIVO

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Ferri Massimo

Presentata da:  
Cotignoli Silvia

I Sessione  
2014/2015



# Introduzione

Lavorare su certi oggetti topologici non è sempre agevole; alcuni, per esempio, non sono nemmeno realizzabili nel nostro spazio perciò la loro visualizzazione è sostanzialmente impossibile. A questo punto l'esistenza di modelli alternativi di un dato oggetto risulta essere preziosa per la sua manipolazione, il suo studio, la sua comprensione profonda. La disponibilità di diversi modelli di uno stesso spazio topologico ha poi la favorevole ricaduta di suggerire l'inserimento dello spazio stesso in diverse classi e la possibilità di sue diverse generalizzazioni.

In questa tesi ho ripercorso, anche cronologicamente, la nascita e le diverse modellizzazioni di una varietà semplice ma affascinante: il piano proiettivo, mettendo in luce la loro equivalenza.

Dopo un primo capitolo sulla geometria proiettiva, le superfici e la loro classificazione, il capitolo due introduce i modelli di Möbius, Grassman e Klein. Il capitolo tre tratta i modelli più usuali nella comune pratica topologica.



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>1 Capitolo 1</b>	<b>5</b>
1.1 La geometria proiettiva nella storia . . . . .	5
1.2 Nozioni preliminari . . . . .	6
1.2.1 Superfici e varietà . . . . .	6
1.3 Teorema di classificazione di superfici . . . . .	10
<b>2 Capitolo 2</b>	<b>13</b>
2.1 Modello di Möbius . . . . .	13
2.2 Modello di Klein . . . . .	14
2.3 Modello di H. Grassman . . . . .	15
2.4 Il piano proiettivo . . . . .	16
<b>3 Capitolo 3</b>	<b>19</b>
3.1 Modello 1: la sfera con relazione antipodale . . . . .	19
3.2 Modello 2: la calotta sferica . . . . .	21
3.3 Modello 3: il disco con la relazione antipodale al bordo . . . . .	22
<b>Bibliografia</b>	<b>25</b>
<b>Sitografia</b>	<b>25</b>



# Capitolo 1

## 1.1 La geometria proiettiva nella storia

La geometria proiettiva ha le sue radici nel Rinascimento italiano. In questo periodo, artisti come Filippo Brunelleschi (1377-1446) e Leon Battista Alberti (1404-1472) studiarono come trasferire su una superficie piana le figure tridimensionali proprie del nostro mondo. Leon Battista Alberti in particolare, nel suo trattato *De Pictura*, introdusse alcune regole che possono essere considerate come le idee di base della geometria proiettiva. Il suo principio fondamentale diceva che si può fingere di guardare con un solo occhio e immaginare delle linee che congiungono l'osservatore (**O**) con un qualsiasi punto dell'oggetto osservato (**P**). L'insieme di queste linee venne detto "proiezione". A questo punto immaginiamo di porre verticalmente davanti al nostro occhio la superficie: questa verrà incontrata da ogni linea in un punto (**P'**). L'insieme di questi punti venne denominato "sezione". Così guardando la "sezione" ci si illude di guardare l'oggetto stesso. Altri artisti e scienziati si interessarono della prospettiva. Tra questi troviamo Leonardo da Vinci (1452-1528), autore del "*Trattato della pittura*" (opera perduta nella sua versione originale), e Piero della Francesca (1410-1492), autore dell'opera "*De prospectiva pingendi*".

In realtà, già nel 247 a.C. Apollonio aveva considerato le coniche come una sezione di un cono circolare obliquo e ne aveva dato uno studio approfondito, osservandone alcune proprietà, anche se è necessario arrivare al 1639 con Desargues per parlarne in termini di proiezioni di un cerchio. La concezione di Desargues permetteva di considerare come rientranti in una sola famiglia le tre specie di coniche (ellisse, iperbole, parabola) che

erano state tenute distinte fino a quel momento.

Questa idea di generalizzare venne totalmente abbracciata da DesCartes nel 1637, con l'applicazione dell'algebra alla teoria delle curve nella geometria analitica. Nel 1795 Monge creò la *Geometria descrittiva*, nella quale unì i vari rami della matematica, pura e applicata. Non si parla ancora di geometria proiettiva ma vengono ampiamente usate le proiezioni ortogonali.

La Geometria Proiettiva propriamente detta, sorge col *Traité des propriétés projectives des figures* di Poncelet (1822). In questo trattato si fa largo uso di proiezioni e sezioni intese nel senso più generale, alla ricerca di quelle proprietà che restano invarianti, insieme al trattato *Der Barycentrische Calcul* di Möbius (1827), in Francia.

Guardando come la geometria proiettiva si è formata vediamo che, anche se i suoi risultati si discostano dalla geometria metrica, molte proposizioni richiedono ancora il suo aiuto per essere provate. Lo scopo di rendere indipendente nei suoi metodi e nei suoi principi la Geometria proiettiva dalla metrica, caratterizza l'ultimo periodo dell'evoluzione della nuova scienza, nel quale, per opera di Staudt, essa ha ricevuto il suo assetto definitivo.

## 1.2 Nozioni preliminari

### 1.2.1 Superfici e varietà

*Cos'è una superficie?* Siamo circondati da superfici tra gli oggetti della nostra quotidianità ma faticiamo a darne una definizione rigorosa.

Proviamo a partire da una domanda più semplice: *come faremmo una superficie?* Rispondendo a questa domanda sicuramente sapremo che qualsiasi cosa costruita secondo le nostre istruzioni sarà una superficie.

Possiamo partire da semplici superfici a forma di poligono con almeno tre spigoli e incollarli tra di loro. Diamo due regole per assicurarci che il risultato ottenuto sarà quanto desiderato:

- **REGOLA 1:** Possiamo incollare i pannelli solo lungo gli spigoli.

Questa regola ci impedisce ad esempio di incollare un pannello nel centro di un altro o in un vertice.



- **REGOLA 2:** Ogni spigolo può appartenere a uno o due pannelli, non di più. Nel caso appartenga a un solo pannello verrà detto **libero**.

Chiameremo **superficie** ogni struttura formata da pannelli usando queste due regole. In particolare possiamo avere una superficie **chiusa** se non vi sono spigoli liberi. Nel caso in cui invece vi sono spigoli liberi, questi formano il **bordo**. Alcuni esempi di superfici molto semplici sono il prisma e la corona circolare in figura.

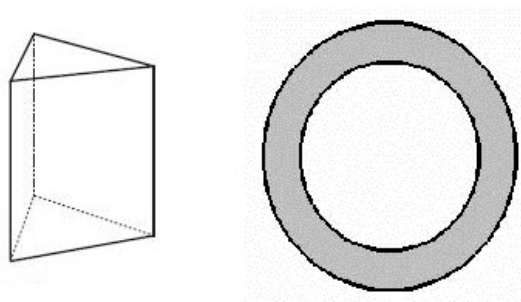


Figura 1.1: esempi di superfici: prisma e corona circolare

Possiamo creare una superficie più complessa partendo da una corona circolare, tagliandola, facendo una torsione e poi riunendola. Otteniamo così un nastro di Möbius.

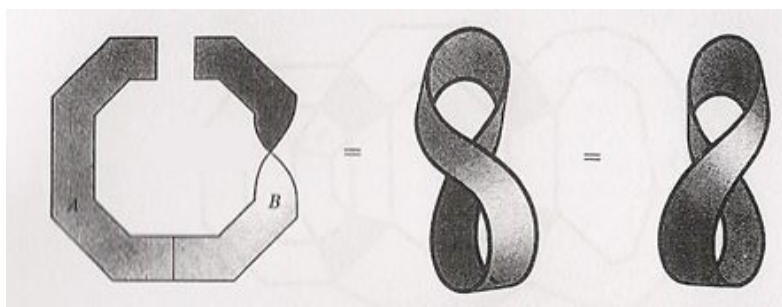


Figura 1.2: costruzione di un nastro di Möbius

Superfici come la corona circolare possono essere definite **regioni piane** perché formano “parte di una superficie piana”, mentre ad esempio il nastro di Möbius non lo è. Possiamo complicare ancora un po’ la costruzione di superfici aggiungendo le cosiddette

**orecchie**, cioè incollando un nuovo pannello sullo stesso bordo. Eventualmente questo pannello può anche subire una torsione prima di essere incollato.

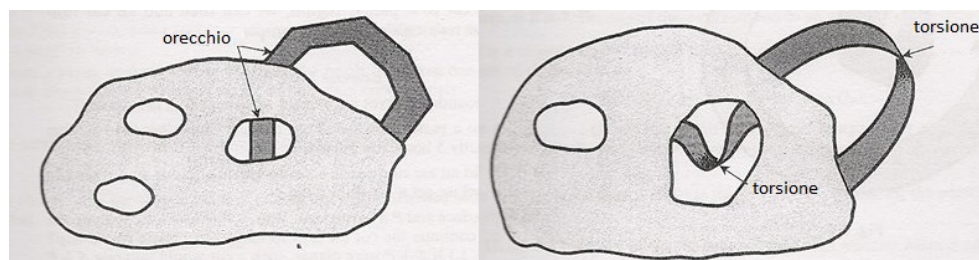


Figura 1.3: aggiunta di orecchie su una superficie piana

In alternativa possiamo aggiungere un **ponte**, ovvero un nuovo pannello incollato su due diversi bordi. Anche il ponte può subire una torsione prima dell'incollamento.

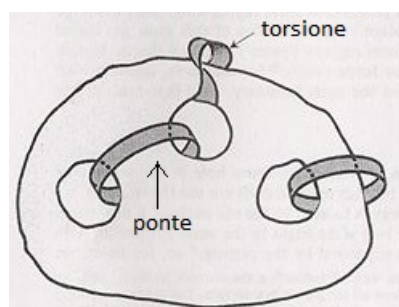


Figura 1.4: aggiunta di ponti su una superficie piana

Un'ulteriore aggiunta possibile è data da un **coperchio**. Ad esempio si può aggiungere un coperchio su una corona circolare. A seconda dell'ampiezza di questo coperchio otterremo un toro o un toro buco.

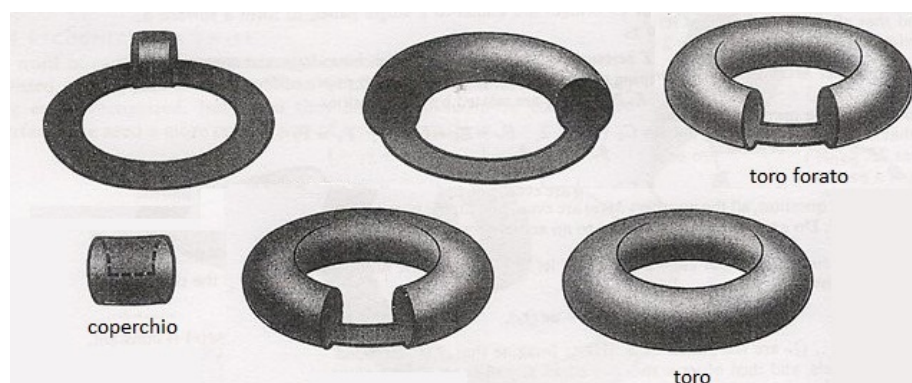


Figura 1.5: costruzione di un toro

Con queste prime nozioni possiamo già dare una prima definizione di piano proiettivo. Infatti possiamo dire che il piano proiettivo è costruito partendo da un nastro di Möbius a cui viene aggiunto un coperchio.

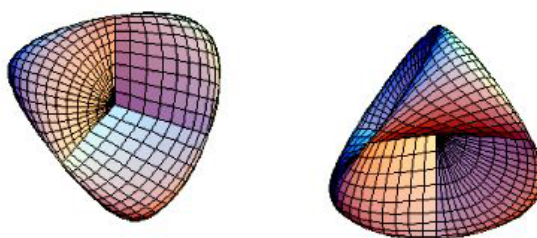


Figura 1.6: piano proiettivo

Per dare una definizione più rigorosa di superficie, premettiamo la definizione di varietà:

**Definizione 1.1.** Sia  $M \subset \mathbb{R}^n$ ,  $M \neq \emptyset$ . Si dice che  $M$  è una **varietà** di dimensione  $p$  e di classe  $C^r$ ,  $1 \leq p < n$ , se vale la proprietà seguente:

(P)  $\forall a \in M \exists$  un aperto  $U$  di  $\mathbb{R}^p$ , un intorno  $W$  di  $a$  in  $\mathbb{R}^n$  e un'applicazione  $\varphi$   $U \rightarrow \mathbb{R}^n$  di classe  $C^r$  di rango  $p$ , omeomorfismo di  $U$  su  $W \cap M$ .

Chiamiamo  $\varphi$  parametrizzazione di  $M$  intorno ad  $a$  e possiamo supporre, a meno di traslazioni,  $\varphi(a) = 0$ . In tal caso si dirà che la parametrizzazione è centrata in  $a$ .

**Esempio 1.1.** La sfera di equazione

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

è una varietà di dimensione 2 in  $\mathbb{R}^3$ , come anche il toro di equazioni parametriche:

$$x = (3 + \cos(\varphi)) \cos(\vartheta)$$

$$y = (3 + \cos(\varphi)) \sin(\vartheta)$$

$$z = \sin(\varphi)$$

**Definizione 1.2.** Una varietà di dimensione 2 è detta **superficie**

A questo punto possiamo dare la seguente

**Definizione 1.3.** Sia  $S$  una superficie. Se  $a$  è il numero degli angoli di  $S$ ,  $e$  è il numero di spigoli di  $S$  e infine sia  $f$  il numero dei pannelli di  $S$ . Allora la quantità  $\chi(S) = c - e + f$  è detta **caratteristica di Eulero** di  $S$ .

### 1.3 Teorema di classificazione di superfici

**Definizione 1.4.** Sia  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrizzazione per la varietà  $M$  centrata in  $a$ . L'immagine dell'applicazione lineare affine  $a + D\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  di rango 2 è un piano passante per  $a$  che chiameremo **piano tangente** e indicheremo con  $T_a(M)$

**Definizione 1.5.** Sia  $M$  una superficie. Un'applicazione  $N : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **mappa di Gauss** per la superficie se verifica:

- (1)  $N$  è continua
- (2)  $\|N(a)\| = 1 \forall a \in M$
- (3)  $\langle N(a), \xi \rangle = 0 \forall a \in M$  e  $\forall \xi \in Im(D\varphi)$

**Definizione 1.6.** Una superficie si dice orientabile se  $\exists N$  mappa di Gauss per  $M$  e diremo che  $N$  induce un'orientazione su  $M$ .

Chiameremo **superficie orientata** una coppia  $(M, N)$  dove  $M$  è una superficie ed  $N$  è una mappa di Gauss per  $M$ .

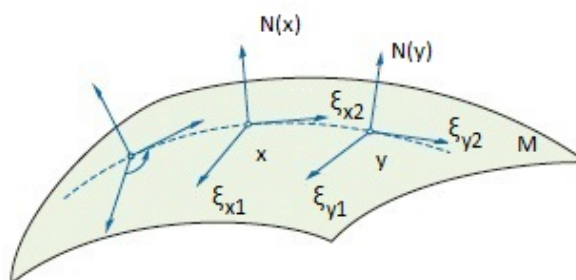


Figura 1.7: superficie orientata

*Osservazione 1.* Se  $M$  è orientabile,  $\forall a \in M \exists$  una parametrizzazione  $\varphi$  di un intorno di  $a$  t.c.  $D\varphi$  manda la parametrizzazione canonica di  $\mathbb{R}^2$  nell'orientazione di  $T_x(M)$ , per  $x$  vicino ad  $a$ . La famiglia di tutte queste parametrizzazioni per  $a$  percorrenti  $M$ , costituisce un sistema completo dove i cambi di parametrizzazione conservano l'orientazione.

**Proposizione 1.3.1.** *Una superficie che contiene una parte diffeomorfa all'interno di un nastro di Möbius non è orientabile.*

**Definizione 1.7.** Siano  $V$  e  $V'$  due varietà di dimensione  $n$ ,  $D$  (rispettivamente  $D'$ ) un piccolo disco chiuso in  $V$  (rispettivamente in  $V'$ ) è un disco di dimensione  $n$  in un aperto di  $V$  (di  $V'$ ) omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Denotiamo con  $V \# V'$  ogni spazio ottenuto incollando  $V - int(D)$  e  $V' - int(D')$  con un omeomorfismo dei loro bordi  $S$  ed  $S'$  che sono omeomorfi alla sfera  $S^{n-1}$ . Si può verificare che  $V \# V'$  è una varietà di dimensione  $n$  detta **somma connessa** delle sfere a bordo  $V$  e  $V'$

*Osservazione 2.* In generale l'omeomorfismo di incollamento non è unico: questo può mantenere o invertire l'orientazione delle varietà. Si ha una buona definizione se abbiamo due varietà orientate e  $\varphi$  rovescia l'orientazione oppure se le due varietà non sono orientabili. Le somme connesse di varietà orientabili sono orientabili, invece è non orientabile la somma di due varietà di cui almeno una non sia orientabile.

**Esempio 1.2.** Il toro con  $n$  buchi  $T_n$  è ottenuto come somma connessa di  $n$  tori  $T_1$

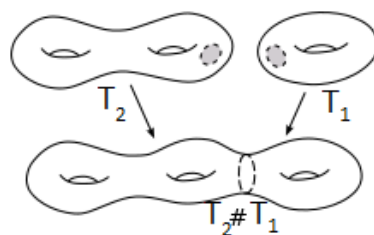


Figura 1.8: Toro con  $n$  buchi

**Teorema 1.3.2. Teorema di classificazione di superfici.** *Tutte le superfici connesse sono omeomorfe o a uno spazio  $U_q$  con  $q \geq 0$  o a uno spazio  $T_p$  con  $p \geq 0$ , dove  $U_{q+1} = U_q \# P_2$ ,  $P_2$  è il piano proiettivo e  $U_1 = P_2$ , mentre  $T_n$  è il toro con  $n$  buchi come visto nell'esempio 1.2.*

*Osservazione 3.*  $U_2 = P_2 \# P_2$  è la bottiglia di Klein.

# Capitolo 2

Per dare una definizione di *piano proiettivo* ne studierò tre modelli. Prendendo come punto di partenza il modello di Möbius, analizzerò quello di Klein e di Grassman mostrando che sono entrambi equivalenti al primo. Usando quest'ultimo, darò una definizione formale.

## 2.1 Modello di Möbius

In un lavoro intitolato “Mémoire sur les polyèdres” proposto all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1861, Möbius costruì una superficie incollando cinque triangoli in modo da ottenere il cosiddetto “*nastro di Möbius*” in figura 2.1.

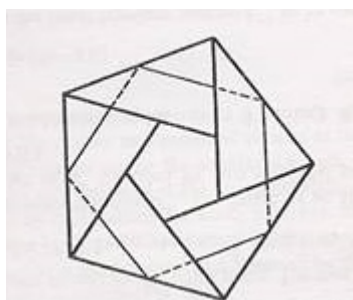


Figura 2.1: Nastro di Möbius

Consideriamo ora la palla bidimensionale unitaria chiusa  $\overline{B_1(0)}$  e incolliamola al nastro di Möbius lungo i loro bordi. Quello che otteniamo è la superficie in figura 2.2.

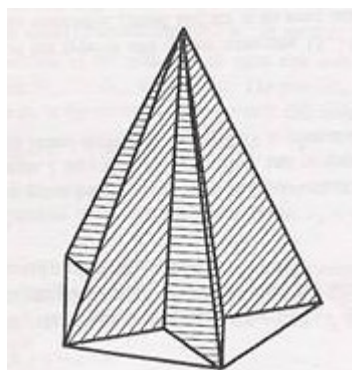


Figura 2.2: Il modello di Möbius

Si può dimostrare che in questo modo si ottiene una superficie non orientabile con caratteristica di Eulero  $\chi = 1$ . Möbius non riconobbe di aver costruito il piano proiettivo.

## 2.2 Modello di Klein

Klein costruisce il suo modello di piano proiettivo partendo dal piano affine reale  $p$  e aggiungendo elementi all'infinito con il seguente metodo: per ogni retta affine  $l$  in  $p$ , uniamo un punto all'infinito denotato con  $i(l)$  in modo tale che  $i(l) = i(l') \iff l$  è parallela a  $l'$ . Definiamo la retta proiettiva come l'unione di una retta affine con il suo punto all'infinito oppure l'insieme  $\lambda = \{i(l) : l \text{ è una retta affine}\}$ .

*Osservazione 4.* Un'omografia è una funzione iniettiva da  $p \cup \lambda$  in se stesso che manda rette in rette. Il gruppo delle omografie è detto *gruppo proiettivo*. Una *bandiera* su  $p \cup \lambda$  è data da una coppia  $(\mu, \alpha)$  dove  $\mu$  è una retta e  $\alpha$  un suo punto. Il gruppo proiettivo agisce transitivamente sull'insieme delle bandiere, cioè: per ogni bandiera  $(\mu', \alpha')$  esiste un'omografia  $h$  tale che  $h\mu = \mu'$  e  $h\alpha = \alpha'$ .

Sia  $(x, y)$  un sistema di coordinate nel piano affine. La funzione

$$k(x, y) = (1 + x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(x, y)$$



è iniettiva da  $p$  al disco  $B_1(0)$ . L'immagine di una retta affine  $l$  passante per l'origine è un diametro di  $B_1(0)$  delimitata da due punti antipodali sul bordo di  $S^1$  che denotiamo con  $a(l)$  e  $b(l)$ .

La funzione inversa  $k^{-1}$  è un omeomorfismo da  $B_1(0)$  in  $p$ . Estendiamo  $k^{-1}$  sulla palla chiusa  $\overline{B_1(0)}$  con

$$k^{-1}(a(l)) = k^{-1}(b(l)) = i(l).$$

Consideriamo su  $p \cup \lambda$  la topologia più fine che rende  $k^{-1}$  continua. Questa topologia induce su  $p$  la topologia canonica, rende le omografie continue, anzi le rende omeomorfi. In più, essendo  $\overline{B_1(0)}$  connessa e compatta ed essendo  $k$  suriettiva,  $p \cup \lambda$  è connesso e compatto. La funzione  $k$  dimostra che ogni punto in  $p$  ammette un intorno omeomorfo a un disco e, per la transitività dell'azione del gruppo proiettivo,  $p \cup \lambda$  è una superficie chiusa.

Sempre per la transitività dell'azione del gruppo proiettivo sulla bandiera, vediamo che l'immagine di una retta è una 1-varietà omeomorfa a una retta fissata del tipo  $l \cup i(l)$ , con  $l$  una retta affine. Notiamo che la retta resta connessa se togliamo il punto  $i(l)$ , quindi è omeomorfa al cerchio  $S^1$ .

Ne segue che  $\chi(p \cup \lambda) = 1 - 1 + 1 = 1$  e quindi  $p \cup \lambda$  è omeomorfo a  $\mathbb{P}^2$ , con  $\mathbb{P}^2$  definito come nel modello di Möbius .

## 2.3 Modello di H. Grassman

L'idea di Grassman è quella di considerare l'insieme  $G$  dei sottospazi vettoriali di  $\mathbb{R}^3$  di dimensione uno. Per dare una topologia a questo spazio lo consideriamo in biiezione col quoziente di  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$  con la relazione di equivalenza  $\sim$  data da:

$$\forall (x, y, z), (x', y', z') \in G, \quad (x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0 \quad (x', y', z') = \alpha(x, y, z).$$

Possiamo dare a  $G$  la topologia quoziente di  $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\} / \sim$ . Come nel caso di Möbius, anche Grassman non vide che la sua costruzione dava proprio il piano proiettivo.

Per dimostrare questo, consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow p \cup \lambda$ , con  $p \cup \lambda$  come nel paragrafo 2.2, definita da:

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = (x/z, y/z) &\iff z \neq 0 \\ f(x, y, z) = i(l) &\iff z = 0 \end{aligned}$$

dove  $l$  denota una qualsiasi retta affine la cui direzione è data dal vettore  $(x, y)$ . La funzione  $f$  si scompone come la proiezione canonica  $\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \rightarrow G$  composta con un'applicazione  $\bar{f} : G \rightarrow p \cup \lambda$  che renda commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 - \{0\} & \xrightarrow{f} & p \cup \lambda \\ \searrow \pi & & \nearrow \bar{f} \\ & G & \end{array}$$

$\bar{f}$  risulta essere una biiezione attraverso cui un sottospazio vettoriale di dimensione 2 corrisponde a una retta in  $p \cup \lambda$  e un automorfismo lineare di  $\mathbb{R}^3$  corrisponde a un'omografia. Osserviamo che  $\bar{f}$  è un omeomorfismo. Allora  $G$  è omeomorfo a  $p \cup \lambda$  che abbiamo dimostrato essere omeomorfo al modello di Möbius.

## 2.4 Il piano proiettivo

Dimostrata l'equivalenza dei tre modelli a partire da quello di Möbius, possiamo scegliere come definizione geometrica di piano proiettivo quella data da Grassman.

**Definizione 2.1.** Sia  $K$  un campo fissato e sia  $V$  un  $K$ -spazio vettoriale con  $\dim V = n + 1$ . Lo **spazio proiettivo**  $\mathbb{P}(V)$  è l'insieme delle rette vettoriali di  $V$ . I suoi punti sono detti punti dello spazio proiettivo e si pone  $\dim(\mathbb{P}(V)) = \dim(V) - 1 = n$ .

Se  $K = \mathbb{R}$  (rispettivamente  $\mathbb{C}$ ) diremo che  $\mathbb{P}(V)$  è uno spazio proiettivo reale (rispettivamente complesso).

Se  $\dim(\mathbb{P}(V)) = 1$  si parla di retta proiettiva, se  $\dim(\mathbb{P}(V)) = 2$  di piano proiettivo.

*Osservazione 5.* Se  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ , allora  $\langle v \rangle = \langle \lambda v \rangle$ ,  $\lambda \in K^*$ .

Perciò possiamo identificare  $\mathbb{P}(V)$  con  $V - \{0\} / \sim$  dove  $\sim$  è la relazione di equivalenza di proporzionalità:

$$x \sim y \iff \exists \lambda \in K^* \text{ t.c. } y = \lambda x \iff y \in \langle x \rangle$$

con  $x, y \in V - \{0\}$ . Quindi la seguente applicazione è una biiezione

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{P} &\rightarrow V - \{0\} / \sim \\ \langle v \rangle &\mapsto [v] \end{aligned}$$

e possiamo dire che lo spazio proiettivo è uno spazio quoziente.

*Notazione 1.* Se  $V = \{0\}$ , allora  $\mathbb{P}(V) = \{0\}$  e  $\dim(\mathbb{P}(V)) = -1$ .

Se  $V$  è una retta vettoriale, allora  $\mathbb{P}(V)$  è un punto e  $\dim(\mathbb{P}(V)) = 0$ .

Se  $V = K^{n+1}$ , allora  $\mathbb{P}(V)$  è denotato con  $\mathbb{P}^n$  e  $\dim(\mathbb{P}(V)) = n$ . Gli elementi  $v \neq 0$ ,  $v = (x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1}$  diventano  $[v] = [x_0, \dots, x_n]$

L'idea, come visto anche nel modello di Klein, è quella di aggiungere ai punti dello spazio vettoriale  $V$ , detti *punti propri*, le direzioni delle rette di  $V$ , detti *punti impropri*. Allora avremo due nuovi tipi di rette: il primo dato dalle rette di  $V$  con un punto in più, la propria direzione, e il secondo dato dalla retta impropria, formata dai punti impropri. Varrà quindi l'enunciato:

“Due rette distinte si intersecano in un punto”

Infatti: se le due rette sono proprie e non parallele, allora sono incidenti; se le due rette sono proprie e parallele, allora si intersecano nel punto improprio; una retta propria  $r$  e la retta impropria si intersecano nella direzione di  $r$ .



# Capitolo 3

Passiamo ora allo studio di altri tre principali modelli: la sfera con relazione antipodale, la calotta e il disco.

## 3.1 Modello 1: la sfera con relazione antipodale

Sia  $S^2$  la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$  e denotiamo con  $i$  l'immersione canonica della sfera in  $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ .

Ogni retta per 0 taglia la sfera in due punti diametralmente opposti e viceversa, data una coppia di punti diametralmente opposti sulla sfera, essa individua un'unica retta di  $\mathbb{R}^3$  per 0.

Possiamo considerare quindi la relazione antipodale  $\sim$  su  $S^2$  che mette in relazione tra loro i punti diametralmente opposti della sfera. Denotiamo le classi di equivalenza con  $[P] = \{P, -P\}$

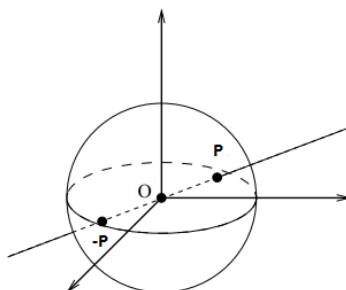


Figura 3.1: La relazione antipodale sulla sfera  $S^2$

Il quoziente  $S^2/\sim$  è compatto. In più la restrizione della proiezione canonica  $\pi : S^2 \rightarrow S^2/\sim$  da ogni emisfero aperto alla propria immagine, è un omeomorfismo. Allora  $S^2/\sim$  è una superficie chiusa.

Allora, per la proprietà universale degli spazi quozienti abbiamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} i : S^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 - \{0\} \\ & \downarrow \pi & \downarrow \\ j : S^2/\sim & \longrightarrow & G \end{array}$$

dove  $G$  è lo spazio visto nel modello di Grassman, le frecce verticali sono le proiezioni canoniche sul quoziente e  $j$  è una biiezione continua.

L'omeomorfismo  $j$  manda la classe di equivalenza  $[P]$  nella retta per i punti  $P$  e  $-P$ . Con l'applicazione  $j$ , una retta corrisponde a una circonferenza su  $S^2$  quozientata con la relazione antipodale al bordo.

In altre parole le rette corrispondono a cerchi massimi di una sfera (cioè circonferenze che stanno sulla sfera e hanno, come centro, il centro della sfera).

Possiamo munire lo spazio  $S^2/\sim$  della topologia quoziente e sia  $[P] \in S^2/\sim$ . Considero le coppie di calotte sferiche aperte diametralmente opposte su  $S^2$ . Tramite  $\pi$ , vengono mandati in un in uno stesso insieme nel quoziente. Questi insiemi costituiscono una base di aperti per il nostro modello.

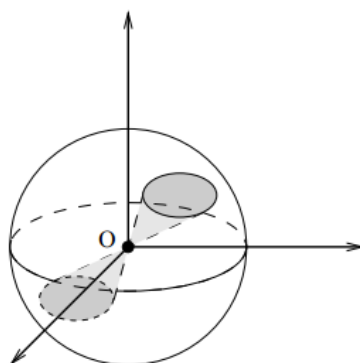


Figura 3.2: Le calotte sferiche diametralmente opposte

Possiamo quindi dire che lo spazio così ottenuto è una rappresentazione del piano pro-

iettivo reale: due cerchi massimi si incontrano sempre in due punti che sono antipodali e vengono identificati nel quoziente, anche se le corrispondenti rette sono parallele.

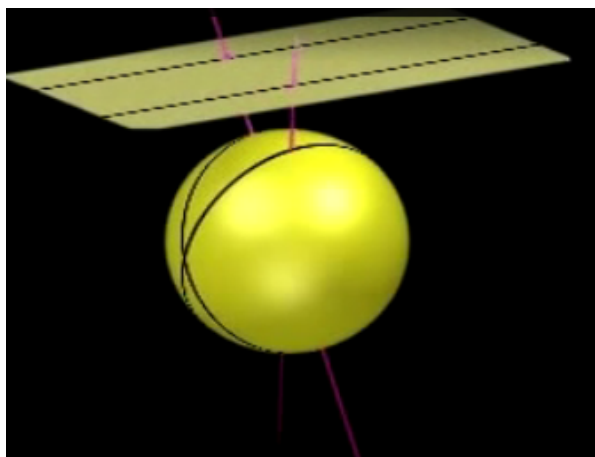


Figura 3.3: Cerchi massimi e rette parallele

## 3.2 Modello 2: la calotta sferica

In alternativa a quozientare  $S^2$  con la relazione antipodale, possiamo prendere in considerazione solo la calotta superiore (o in maniera simmetrica quella inferiore) della sfera. Così avremo eliminato tutti i punti doppi esclusi quelli sulla circonferenza equatoriale, che verranno identificati e incollati tra loro.

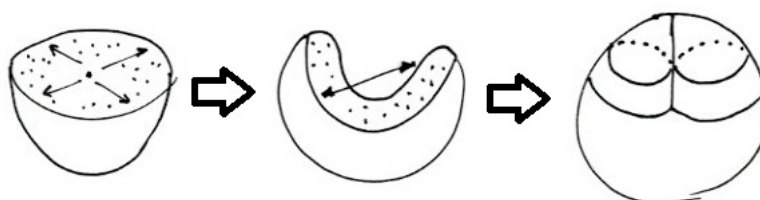


Figura 3.4: Piano proiettivo ottenuto da una calotta

Formalmente vale quanto detto nel paragrafo precedente restringendo le applicazioni al semispazio positivo  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } z \geq 0\}$ .

### 3.3 Modello 3: il disco con la relazione antipodale al bordo

Questo modello è attribuito al matematico tedesco Walther Von Dyck e consiste nel quozientare la palla bidimensionale unitaria chiusa  $\overline{B_1(0)}$  con la relazione antipodale  $\sim$  sul suo bordo.

Usando l'applicazione  $k^{-1}$  vista nel modello di Klein, abbiamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \overline{B_1(0)} & \xrightarrow{k^{-1}} & p \cup \lambda \\ & \searrow & \nearrow \bar{k} \\ & \overline{B_1(0)} / \sim & \end{array}$$

in cui  $k^{-1}$  è fattorizzata dalla proiezione canonica e un'opportuna applicazione  $\bar{k}$  che rende commutativo il diagramma. Quest'ultima mette in corrispondenza biunivoca le rette per l'origine con i diametri di  $\overline{B_1(0)}$  con gli estremi identificati.

Possiamo osservare che il disco può essere ottenuto dal modello precedente proiettando la calotta sul piano  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } z = 0\}$  e poi quozientando per la relazione antipodale al bordo.

Anche in questo caso si può considerare il disco munito di topologia quoziente. Avremo due tipi di aperti: quelli che non contengono il bordo, che sono gli stessi della palla, quelli che lo contengono, come in figura 3.5.

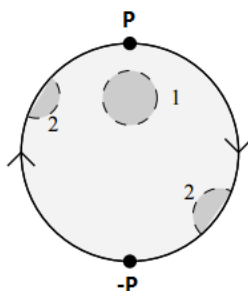


Figura 3.5: Disco con relazione antipodale e suoi aperti

Possiamo riconoscere che questo modello è equivalente al modello di Möbius. Infatti possiamo considerare sul disco tre punti,  $A$ ,  $B$  e  $C$  e i loro opposti secondo la relazione



antipodale. Uniamo il punto  $B$  con l'opposto di  $A$  e il punto  $A$  con l'opposto di  $B$  e tagliamo lungo i segmenti così costruiti. Avremo suddiviso il disco in tre parti, come in figura 3.6.

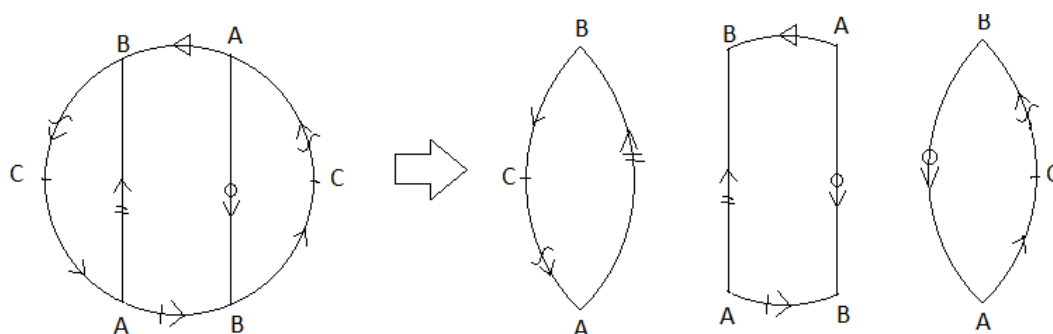


Figura 3.6: La suddivisione del disco

Incollando queste parti seguendo le relazioni indicate, avremo due oggetti:

- un nastro di Möbius, ottenuto incollando i due lati corti della sezione centrale,
- un disco, ottenuto ruotando e incollando i due archi esterni che restando togliendo la striscia dal disco.

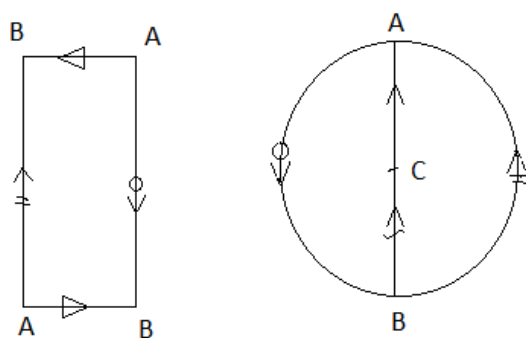


Figura 3.7: Il nastro di Möbius e il disco

Incollando questi due oggetti lungo i loro bordi otteniamo proprio il modello di Möbius.



# Bibliografia

- [1] A. Gramain, *Topologie des surfaces*, Paris, Presses Universitaires de France, 1971
- [2] H.B. Griffiths, *Surfaces*, London, Cambridge University Press, 1976.
- [3] F. Apery, *Models of real projective plane: computer graphics of Steiner and Boy surfaces*, Braunschweig, Viewg copyr: 1987

# Sitografia

- [4] <http://www.istitutomaserati.it/prospettiva/Storia/Alberti.htm>
- [5] <http://www.science.unitn.it/occhetta/studenti/dispensa4&5.pdf>
- [6] <http://prooof.blogspot.it/2010/09/erlangen-1872-un-modello-per-il-piano.html>