

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BOLOGNA
SCUOLA DI SCIENZE
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

MATEMATICA E MUSICA
GRAFI, TONNETZ
E TEORIE NEO-RIEMANNIANE

RELATORE:
Prof. Massimo Ferri

TESI DI LAUREA TRIENNALE
di Giovanna De Maria

Anno Accademico 2015/2016

INDICE

INTRODUZIONE	3
CAPITOLO 1° “LA MUSICA”	
1.1 Premessa	4
1.2 Note biografiche di J.S. Bach	5
1.3 Le opere di Bach	7
CAPITOLO 2° “I MODELLI MATEMATICI”	
2.1 Teoria dei grafi	10
2.2 Il Toro	11
2.3 Immersione di grafi in superfici	14
CAPITOLO 3° “MATEMATICA E MUSICA”	
3.1 Principali fondamenti matematico-musicali	
3.1.1 Il pentagramma	16
3.1.2 Il basso continuo	17
3.1.3 L’intervallo musicale	19
3.2 Dalla visione pitagorica al temperamento equabile	
3.2.1 Pitagora e l’armonia	19
3.2.2 Le scale musicali	21
3.2.3 Il temperamento equabile	22
3.3 Ciclo delle quinte e Tonnetz	
3.3.1 Il ciclo delle quinte	23
3.3.2 Tonnetz	25
3.3.3 Riemann e le teorie neo-riemanniane	28
Considerazioni finali	31
CONCLUSIONI	33
BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA	33

INTRODUZIONE



Nel suo *“Il Saggiatore”* (1623), Galileo sostiene che il grandissimo libro della natura è scritto (da Dio) in lingua matematica e che senza conoscere i caratteri di questa lingua – che sono triangoli, cerchi e altre figure geometriche – è impossibile intenderne parola, sarebbe come aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto.

Ma ciò sta a significare che la matematica è utile per ben intendere tutti i fenomeni della natura, quindi anche per comprendere meglio la musica. Perciò, sperando di riuscire a destare in chi legge almeno la curiosità di conoscere più a fondo qualcuno degli argomenti di seguito trattati, mi riterrò paga se infine questa mia tesi avrà contribuito a trasmettere un simile messaggio.

Il primo capitolo verte su argomenti di musica e, dopo una breve premessa generale, ed alcuni cenni biografici di J. S. Bach, si passa ad una analisi strutturale di tipo aritmetico e geometrico su alcune sue famose composizioni, sottolineando in particolare la passione del grande compositore per la numerologia, esaminando l’importanza che il fattore numerologico sempre assume nelle sue opere.

Il secondo capitolo verte su argomenti di matematica e tratta alcuni importanti aspetti della teoria dei grafi, del toro e dell’immersione di grafi in superfici.

Il terzo capitolo, nel quale si fa riferimento agli argomenti dei primi due capitoli, è diviso in tre parti: la prima esamina alcuni principali fondamenti matematico-musicali, la seconda propone un excursus storico dalla scala pitagorica al temperamento equabile, la terza approfondisce il ciclo delle quinte, il Tonnetz e le teorie neo-riemanniane.

CAPITOLO 1° “LA MUSICA”

1.1 Premessa



Einstein è stato un grande fisico matematico, ma amava molto anche la musica, suonava il pianoforte e il violino, e diceva che se non avesse fatto lo scienziato avrebbe fatto il musicista. Nel 1926 Einstein in America conobbe Charlie Chaplin, che lo invitò a cena a casa sua. Dopo cena, la moglie di Einstein raccontò del lontano mattino del 1905 in cui suo marito aveva partorito la teoria della relatività. Appena svegliatosi, aveva bevuto solo un caffè e, ancora in vestaglia, si era messo a suonare il pianoforte. Ad un certo punto: “Cara”, le aveva detto fermandosi ogni tanto, “è un’idea fantastica, sensazionale!”, ma quando lei gli aveva chiesto di cosa si trattasse, lui aveva risposto che doveva prima sviluppare l’idea. E si era rimesso a suonare, fermandosi ogni tanto per prendere appunti. Dopo una mezz’ora era andato a rinchiudersi nel suo studio, dal quale sarebbe uscito due settimane dopo con la teoria della relatività. (1)

Non a caso la matematica e la musica si caratterizzano entrambe per l’universalità del linguaggio in cui esse si esprimono: come tutti i matematici del mondo operano attraverso un sistema di simboli comprensibile indipendentemente dalla lingua parlata dall’autore, così uno spartito musicale può essere letto e suonato da qualsiasi musicista a prescindere dalla lingua parlata dal compositore.

Il teorico musicale francese Jean-Philippe Rameau (1683-1764), compositore, organista e clavicembalista esperto di basso continuo, dopo aver indagato a fondo l’orizzonte della musica secondo le sue conoscenze fisico-matematiche, tanto che ricevette da Voltaire il soprannome di Euclide-Orfeo, scrisse nel suo *“Traité de l’harmonie”*: “La musica è una scienza che deve avere regole certe e queste devono essere estratte da un principio evidente, che non può essere conosciuto senza l’aiuto della matematica. Devo ammettere che, nonostante tutta l’esperienza che ho potuto acquisire con una lunga pratica musicale, è solo con l’aiuto della matematica che le mie idee si sono sistemate e che la luce ne ha dissipato le oscurità”. (2)

In questo mio studio ho cercato di mettere in evidenza alcuni dei molteplici punti di collegamento che esistono tra la matematica e la musica, nella convinzione che una maggiore consapevolezza dei rapporti che legano queste due discipline, complementari tra loro (Einstein), oltre ad esaltare il fondamento universale della scienza dei numeri, può contribuire a svelarci tutto il misterioso fascino della bellezza “divina” della musica.

1.2 Cenni biografici di J.S. Bach

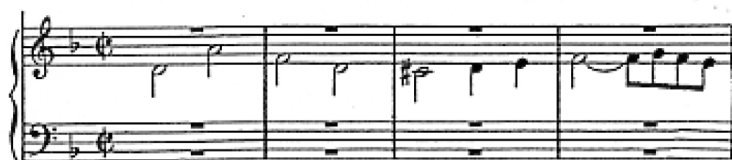
Johann Sebastian Bach (Eisenach 21.3.1685 - Lipsia 28.7.1750), ottavo e ultimo figlio discendente da antica famiglia di musicisti, è universalmente considerato uno dei più grandi musicisti di tutti i tempi. Rimasto orfano di padre e di madre a 9 anni, fu cresciuto da un fratello maggiore organista e, terminati gli studi scolastici, decise di dedicarsi alla professione di musicista entrando come violinista presso la corte di Weimar. Nel 1704 passò all'organo di S. Bonifacio in Arnstadt, nel 1706 all'organo di Mühlhausen e nel 1708 divenne organista della corte ducale a Weimar, dove maturò la tutta la sua grandezza e compose la maggior parte delle sue composizioni per organo. Nel 1717 fu nominato *Kapellmeister* (maestro di cappella) nel principato d'Anhalt a Cöthen, dove compose tante sue opere, tra cui i sei *Concerti Brandeburghesi* ed il primo libro del *Clavicembalo ben temperato*. Nel 1722 entrò alla Thomasschule di Lipsia con il ruolo prestigioso di *Kantor*, che comportava anche la composizione di musiche per ogni festività, e che mantenne per i restanti 26 anni della sua vita. Negli ultimi sei mesi di vita Bach rimase quasi completamente cieco e morì il 28.7.1750. (3,4,5)

L'arte di Bach fu di natura enciclopedica e nella storia della musica la sua vasta opera ha costituito la *summa* e lo sviluppo delle svariate tendenze compositive della sua epoca e delle epoche precedenti, aprendo nuovi orizzonti alle generazioni successive e lasciando un segno indelebile che ancora oggi è un passaggio fondamentale e obbligato per chi voglia percorrere le vie della musica.

Il Bach più eccelso è quello di massimo contrappuntista. Il contrappunto ("punctus contra punctum"), come tecnica derivata dalla polifonia vocale rinascimentale, basata sul mettere una nota contro l'altra secondo criteri di consonanza e dissonanza dettati da regole di storia della musica, è l'arte di far coesistere simultaneamente più linee melodiche, ciascuna con una propria autonomia, aventi tutte quante la stessa importanza nel corso del brano musicale. (6)

Bach ha concepito il contrappunto come una costruzione musicale perfettamente razionale, rispondente ad una precisa e rigorosa struttura logico-matematica in cui aritmetica e geometria sono elementi costitutivi essenziali. Peraltro, tale costruzione aritmetico-geometrica si intreccia e talvolta si fonde con la simbologia numerologica e cabalistica a cui Bach si affidava spesso per glorificare Dio.

Con Bach l'arte contrappuntistica raggiunse il massimo splendore nella prima metà del settecento in composizioni come quelle del *Clavicembalo ben temperato* e *L'Arte della fuga*. Ad esempio, nel primo *contrapunctus* tratto da "L'Arte della fuga", il tema è costituito da 12 note, dove il numero 12 allude ad una pluralità di significati esoterici e religiosi.



Infatti: 12 è il numero sacro, 12 le porte della città santa di Gerusalemme celeste, 12 le tribù di Israele, 12 i figli di Giacobbe, 12 le tavole della legge, 12 il numero degli Apostoli, 12 i frutti dello Spirito Santo, 12 i segni zodiacali, 12 i mesi dell'anno, 12 volte Gesù apparve dopo la sua morte, 12 sono le ore dell'orologio, 12 è l'ora del sole allo zenit, ecc.

Un altro notevole esempio di simbologia cabalistica di Bach si ha alla fine dell'ultima fuga dove il musicista si firma con le quattro note corrispondenti alle lettere del suo nome. Infatti ogni singola lettera che forma la parola "Bach" corrisponde, secondo la tradizione tedesca, che indica le note con le lettere dell'alfabeto, ad una nota musicale: B = SI bemolle, A = LA, C = DO, H = SI naturale.



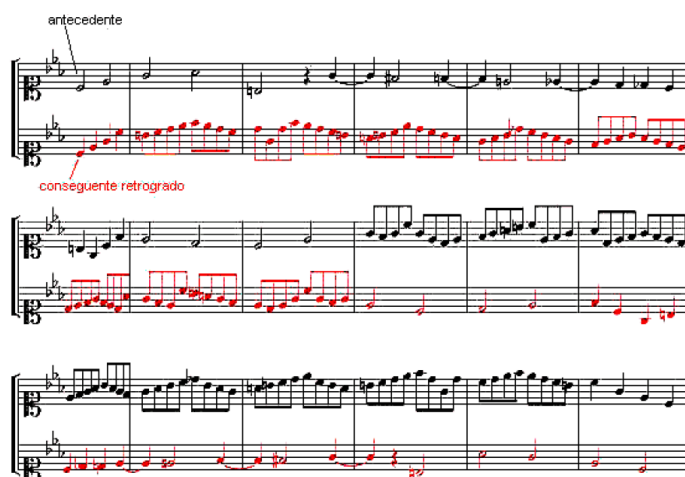
L'arte di trovare corrispondenze numeriche nei nomi e nelle parole scritte in ebraico è molto antica e si chiama ghematria (o gematria). La numerazione ebraica antica usava i caratteri alfabetici. Per scrivere un qualsiasi numero si usavano le lettere dell'alfabeto, ognuna delle quali ha il suo valore numerico. In conseguenza di ciò, qualsiasi sequenza di lettere è anche leggibile come un numero: quello prodotto dalla somma delle lettere che compongono la parola o il nome che è stato scritto.

La ghematria è una tecnica cabalistica, a volte usata da Bach nelle sue composizioni. (5) Oltre alla sua firma (come sopra già abbiamo visto), vi è anche che la somma dei numeri, corrispondenti a ciascuna delle quattro note indicate, rappresenta il nome ghematrico di Bach.

<i>B</i>	<i>A</i>	<i>C</i>	<i>H</i>			
↓	↓	↓	↓			
2	+	1	+	3	+	
				8	=	
						14

Il 14 è simmetrico di 41, numero che, nella ghematria germanica, identifica il nome di J. S. Bach, mentre al nome intero Johann Sebastian Bach corrisponde il numero 158, la cui somma delle cifre è pure 14.

Una tecnica molto particolare usata da alcuni musicisti è quella del canone cancrizzante o inverso (il termine cancrizzante deriva dal latino *cancer*: come il gambero procede all'indietro, così fa la risposta di questo tipo di canone); questa tecnica costituisce uno dei molti procedimenti contrappuntistici usati magistralmente da Bach.



1.3 Le opere di Bach. Il clavicembalo ben temperato e l'arte della fuga

All'epoca di Bach il pianoforte non era ancora stato inventato. Esistevano il clavicembalo, il fortepiano e l'organo. Quest'ultimo, in particolare, richiede per la propria costruzione numerosi calcoli matematici e consente combinazioni contrappuntistiche molto complesse.

Numerose sono le opere di Bach costruite in base a principi di simmetria aritmetica e geometrica, quali il Clavicembalo ben temperato, l'Arte della fuga, le Variazioni Goldberg, l'Offerta musicale.

Stante l'elevato numero delle composizioni musicali create da Bach, esamineremo la struttura di due soltanto delle sue opere più importanti: "Il Clavicembalo ben temperato" e "L'arte della fuga".

Il Clavicembalo ben temperato (Das wohltemperierte Clavier) di Bach, capolavoro unico nella letteratura musicale di tutti i tempi, è un esempio di come il comporre con il rispetto di precise proporzioni e severe regole, che costituiscono un sistema basato su un atteggiamento matematico, non preclude la possibilità di creare un'opera d'arte, anzi è indispensabile al raggiungimento di armonia e bellezza artistica.

Il termine "*temperato*", presente nel titolo dell'opera, è riferito al sistema di temperamento entrato in vigore nel '600, consistente nel modificare i rapporti tra i suoni musicali, ora alzando ora abbassando ciascun suono, per rendere i 12 semitoni ugualmente distanziati l'uno dall'altro.

Quest'opera bachiana è composta di due libri. Nel primo e nel secondo libro, ciascuno composto di 24 preludi e fughe, il compositore prende posizione in favore del temperamento, attribuendo ad ognuna delle 24 tonalità un proprio valore espressivo.

Vogliamo ora dare solo un'idea della particolare costruzione formale di una struttura musicale bachiana, e di come essa segua precise trasformazioni suscettibili di una rappresentazione geometrica o aritmetica, la cui complessità può presentarsi ancora maggiore tenendo conto contemporaneamente delle corrispondenze geometriche evidenziate e delle necessarie consonanze armoniche traducibili mediante rapporti aritmetici.

Nel "*Clavicembalo ben temperato*", ad esempio, la fuga n.16 a quattro voci in sol minore inizia con una figura ritmico-melodica della durata di poche battute detta *soggetto* (parte evidenziata in giallo nella Fig. 1). La sua esposizione, che all'inizio della fuga viene assegnata ad una sola voce, coincide con il silenzio delle altre tre. Alla fine della seconda battuta, vi è l'imitazione del soggetto che prende il nome di *risposta* (evidenziata in rosa nella stessa figura).



Fig.1

Si deve notare come la parte evidenziata in rosa viene ottenuta per traslazione della parte segnata in giallo (con qualche variazione minima). Tale traslazione è composta da una traslazione verticale (tonale) e da una traslazione orizzontale (temporale).

Si arriva poi agli *stretti*, che coincidono con l'ultima parte della fuga, dove la particolarità sta nel fatto che ogni entrata del soggetto deve cominciare prima che quella precedente sia conclusa.

Intrecciandosi così le voci che espongono lo stesso tema (evidenziato in tre colori diversi nella fig. 2), si avverte una sensazione ritmica particolare, che lascia affascinati da tanta bellezza armonica.



Fig. 2

L'arte della fuga (Die Kunst der Fuge) è un'opera incompiuta e postuma di Bach, la cui composizione è cominciata probabilmente intorno al 1740, ma la sua pubblicazione risale al 1751. Si tratta di una raccolta di sperimentazioni puramente virtuali sul contrappunto (ed è certamente la composizione più articolata mai scritta con questa tecnica), composta da quattordici fughe e quattro canoni. (7,8)

L'edizione a stampa del 1751, anno successivo alla morte, comprende anche un'opera non pertinente, quasi una sorta di *bonus*, la corale preludio "Vor deinen Thron tret Ich hiermit" (Eccomi, vengo di fronte al Tuo trono), che si racconta Bach abbia dettato sul letto di morte.

L'arte della fuga di Bach è considerata una delle opere più complesse e articolate mai scritte, come uno dei vertici più alti mai raggiunti dalla polifonia contrappuntistica nell'intera storia della musica.

Le fughe sono tutte intitolate "*Contrapunctus*" e indicate con un numero romano progressivo. Probabilmente non c'è opera nella produzione bachiana, e forse nell'intera storiografia musicale dell'Occidente europeo, che abbia suscitato maggiore fervore ermeneutico.

In una fuga, come sopra visto, il *soggetto* indica il tema fondamentale della fuga, la *risposta* è l'imitazione del soggetto trasportato nel tono della dominante, il *contro-soggetto* è la controparte che accompagna il soggetto e la risposta durante lo sviluppo della fuga. Un artificio contrappuntistico tipico di molte fughe è anche lo *stretto*, cioè l'imitazione di un disegno melodico eseguito da una certa voce prima che tale disegno sia terminato.



L'immagine mostra l'inizio di una fuga di J. S. Bach (*Kleine Präludien und Fughetten*)

L'arte della fuga realizza la sistematica esplorazione di tutte le possibilità contrappuntistiche offerte da un tema in re minore di dodici note, esposto attraverso diversi metodi compositivi come il movimento diretto, il movimento inverso, il processo di aumentazione e diminuzione ritmica, la derivazione di temi dal tema principale, la mutazione del ritmo o l'ingresso di temi nuovi. La tradizione fa coincidere l'interruzione di questa composizione con la metà del 1749, quando la malattia agli occhi di Bach si era aggravata in maniera tale da rendergli quasi impossibile la lettura.

Non c'è certezza sul fatto che Bach volesse intitolare l'opera *Die Kunst der Fuge*, ma alcuni studiosi hanno ipotizzato che Bach potrebbe aver inteso il termine “fuga” come “volo”, tanto in riferimento all'elevatezza delle frasi musicali quanto all'ascesa dell'anima a Dio.

La pagina autografa (sotto raffigurata) del *Contrapunctus XIV* interrotto contiene una annotazione, la grafia sembrerebbe di uno dei figli di Bach, Carl Philipp Emanuel Bach: “Über dieser Fuge, wo der Nahme BACH im Contrasubject angebracht worden, ist der Verfasser gestorben” (“Mentre componeva questa fuga, nel punto in cui viene introdotto il nome *BACH* nel controsoggetto, il compositore morì”). Ma la critica moderna ha contestato questa versione, assumendo che l'annotazione musicale sarebbe di mano di Bach, di un periodo (probabilmente tra il 1748 e il 1749) precedente ai gravi problemi visivi che resero in seguito malferma la sua grafia.



Manoscritto dell'ultima pagina dell'ultima fuga, incompiuta, con annotazione

Il matematico e musicologo Herbert Anton Kellner ha evidenziato come la trasposizione numerica del titolo *Die Kunst der Fuge* formi il numero 158 (DIE 18 + KUNST 80 + DER 26 + FUGE 34 = 158), ossia lo stesso numero formato dalla trasposizione delle lettere che formano il nome Johann Sebastian Bach (JOHANN 58 + SEBASTIAN 86 + BACH 14 = 158), e sottolineato che le tre cifre che compongono il numero 158, se sommate, danno come risultato 14 ($1 + 5 + 8 = 14$).

Il musicista tedesco Hans-Eberhard Dentler, filosofo della musica ed esperto esecutore di Bach, sostiene che l'opera incompiuta “*L'arte della fuga*” sia stata scritta per visualizzare principi filosofici pitagorici.

Un famoso ex-allievo di Bach, Mizler, secondo il quale “la musica è il suono della matematica”, fondò nel 1738 a Lipsia una società pitagorica, con l'intento dichiarato di riportare la musica alla sua origini pitagoriche. A questa prestigiosa società appartenevano molti importanti musicisti di quel tempo (come 20° membro era stato previsto il padre di Mozart). Ma Bach, che non si mostrò mai interessato a far parte della *Correspondierende Societät der musicalischen Wissenschaften*, fondata dal suo ex allievo, accettò di aderirvi solo nel 1747, dopo sollecitazioni, come 14° membro. Considerata la passione di Bach per la numerologia, si è ipotizzato che avesse tergiversato apposta al fine di essere il socio numero 14, in quanto 14, come già detto, è la somma delle lettere che compongono il suo cognome (B 2 + A 1 + C 3 + H 8 = 14).

L'ultimo contrappunto de *L'arte della fuga* porta il numero 14, e si interrompe alla battuta 239, dove anche la somma di queste tre cifre è 14. Tutto ciò evidenzia come nelle opere di Bach il fattore numerologico assuma sempre una particolare importanza.

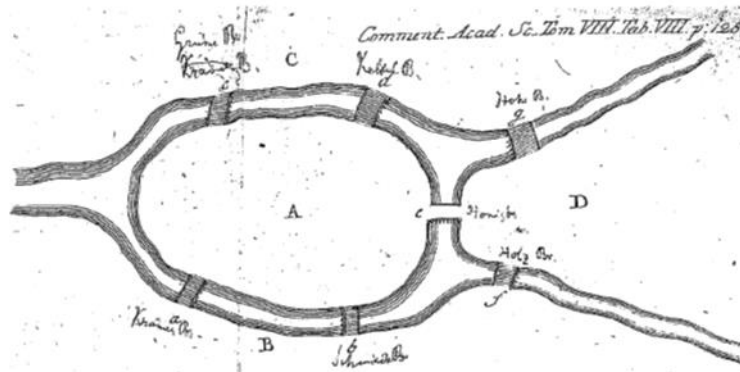
Secondo il clavicembalista e musicologo Sergio Vartolo, *L'arte della fuga* raggiungerebbe la sua completezza proprio nel contrappunto numero 14, motivo per cui è improbabile l'ipotesi secondo la quale il compositore volesse aggiungervi una quindicesima fuga.

CAPITOLO 2° “I MODELLI MATEMATICI”

2.1 La teoria dei grafi

La teoria dei grafi studia le entità matematiche che permettono di schematizzare una grande varietà di oggetti e di situazioni, per consentirne l'analisi in termini quantitativi e algoritmici. L'importanza di questa struttura logica è che molte “strutture reali” possono essere schematizzate utilizzando i grafi, ad es. una rete stradale (dove i nodi sono gli incroci e gli archi le strade).

Storicamente la nascita di questa teoria viene fatta risalire alla soluzione data nel 1736 dal matematico Leonardo Eulero al famoso problema dei ponti di *Königsberg* (città nota anche per aver dato i natali: nel 1724 al filosofo Kant, nel 1776 allo scrittore-compositore Ernst Hoffmann e nel 1862 al matematico Hilbert), enunciabile in questi termini: è possibile immaginare di partire da un punto della città, passare una e una sola volta da ognuno dei sette ponti, e ritornare al punto di partenza?



Il disegno sopra riproduce l'illustrazione originale dei ponti di *Königsberg* dell'articolo “*Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*” pubblicato nel 1736, dove Eulero dimostrò l'impossibilità di effettuare un percorso che attraversi una sola volta ciascuno dei sette ponti e ritorni al punto di partenza.

La soluzione di Eulero al problema dei ponti di *Königsberg* gettò praticamente le basi della teoria dei grafi e della topologia, ma solo duecento anni dopo, nel 1936, Dénes König sviluppò questa teoria e scrisse il primo libro intitolato “*Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen*”.

Definizione di grafo. Un grafo è una coppia ordinata (V, A) , dove $V = \{1, 2, \dots, n\}$ e $A = (a_{ij})$ è una matrice quadrata di ordine n che rappresenta una determinata relazione su V :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ è in relazione con } j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Definizione di sottografo. Un sottografo di (V, A) è un grafo (\tilde{V}, \tilde{A}) tale che $\tilde{V} = \{x_1, \dots, x_k\} \subseteq V$ e $\tilde{A} = (\tilde{a}_{x_i x_j})$ è una matrice di ordine k per cui $\tilde{a}_{ij} = a_{x_i x_j}$.

A è detta matrice delle adiacenze.

Gli elementi di V sono detti vertici.

Un grafo si dice orientato se i collegamenti (detti archi) tra i vertici sono dotati di un verso (indicato da una freccia).

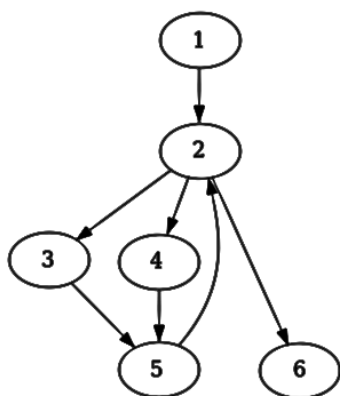
Un grafo si dice non orientato se i collegamenti (detti spigoli) tra i vertici non sono dotati di un verso.

Un grafo orientato può anche essere definito come una coppia (V, E) , dove $V = \{1, 2, \dots, n\}$ è l'insieme dei vertici del grafo ed $E \subseteq V \times V$ è l'insieme degli archi del grafo.

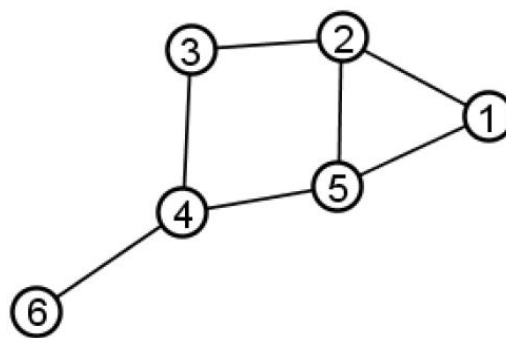
Un sottografo di un grafo orientato (V, E) può anche essere definito come un grafo (U, F) tale che $U \subseteq V$ e $F \subseteq E$.

Un grafo non orientato può anche essere definito come una coppia (V, E) , dove $V = \{1, 2, \dots, n\}$ è l'insieme dei vertici del grafo ed E è un insieme di coppie non orientate di elementi di V , che rappresenta l'insieme degli spigoli del grafo.

Un sottografo di un grafo non orientato (V, E) può anche essere definito come un grafo (U, F) tale che $U \subseteq V$ e $F \subseteq E$. (9)



Grafo orientato



Grafo non orientato

Definizione di morfismo di grafi. Siano due grafi $G = (V, E)$ e $H = (V', E')$.

Un'applicazione f da V a V' è un morfismo dal grafo G al grafo H se

$$\forall u, v \in V, \{u, v\} \in E \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Definizione di isomorfismo di grafi. Due grafi $G = (V, E)$ e $H = (V', E')$ si dicono isomorfi se esiste un'applicazione biettiva $f: V \rightarrow V'$ tale che

$$\forall u, v \in V, \{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E'.$$

Se f è un isomorfismo, allora anche l'applicazione inversa f^{-1} è un isomorfismo.

Per indicare che esiste un isomorfismo tra G e H , si pone $G \cong H$ oppure $H \cong G$. (10)

2.2 Il toro

Definizione. Una superficie è uno spazio topologico di Hausdorff localmente omeomorfo a un piano. Una superficie può essere limitata o illimitata, orientabile o non orientabile, chiusa o aperta, con bordo o senza bordo.

Un sottoinsieme S dello spazio euclideo tridimensionale \mathbb{R}^3 è una superficie se per ogni punto x contenuto in S esistono un intorno aperto U ed una funzione differenziabile

$$F: U \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che U interseca S precisamente nei punti in cui F si annulla:

$$U \cap S = F^{-1}(0)$$

e avente ovunque gradiente diverso da zero:

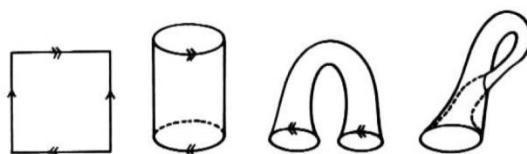
$$\nabla F \neq 0$$

Felix Klein (1849-1925) ideò nel 1882 un modo di costruire superfici, considerando un poligono nel piano e incollando in modo opportuno i suoi lati a coppie, così dimostrando che ogni superficie può essere ottenuta mediante questa tecnica. Ad esempio, è possibile costruire un toro a partire da un quadrato, mentre incollando due lati di un quadrato, e applicando prima un mezzo giro, si ottiene il nastro di Möbius, una superficie bidimensionale che, immersa in uno spazio tridimensionale euclideo, presenta una sola linea di bordo e una sola faccia. I lati del poligono da incollare insieme, e con quale orientazione, sono di solito contrassegnati con frecce di diversa foggia. I lati del poligono che presentano frecce dello stesso tipo vanno incollati rispettando l'orientazione delle frecce.



Nastro di Möbius

Mediante la tecnica di costruzione di Klein, sempre a partire da un quadrato, si ottengono altre superfici importanti, come ad esempio la bottiglia di Klein, che si ottiene anche incollando due nastri di Möbius lungo il loro bordo.



Costruzione della bottiglia di Klein

Definizione. Il toro è una superficie generata dalla rotazione di una circonferenza intorno a una retta ad essa complanare ed esterna.

Per la topologia, che si occupa dello studio di questioni qualitative anziché quantitative della geometria degli oggetti, tutti gli oggetti che possono essere ottenuti gli uni dagli altri deformandoli, ma senza spezzarli o tagliarli, sono equivalenti. Invece che dalla sovrapposibilità mediante trasformazioni geometriche, l'equivalenza fra due spazi topologici X, Y è data dall'eventuale esistenza di un omeomorfismo $\varphi: X \rightarrow Y$, cioè una funzione continua con inversa continua. Così figure ben distinte nella geometria ordinaria, sono invece equivalenti dal punto di vista della topologia, perché questa non bada al fatto che la figura sia rotonda o schiacciata o abbia dei vertici, ma soltanto al fatto che le due figure considerate sono curve chiuse semplici. La figura sotto mostra una tazza che con deformazioni continue si trasforma in un toro: i due oggetti sono omeomorfi. (11)

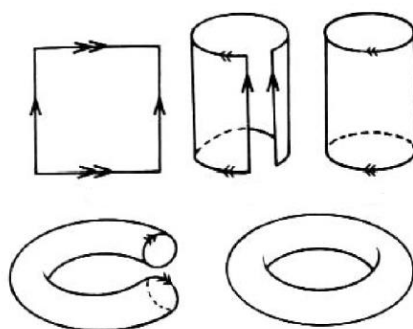


Un toro topologico è uno spazio topologico omeomorfo ad un toro nello spazio euclideo.

Sia X uno spazio topologico e \sim una relazione di equivalenza su X .

$X = [0, 1] \times [0, 1]$; le relazioni non banali su X sono: $(0, y) \sim (1, y)$, $(x, 0) \sim (x, 1)$.

Quozientando X con la relazione di equivalenza, X/\sim , si ottiene il toro.



Costruzione del toro

Nel toro possiamo individuare due circonferenze di riferimento: la prima è la circonferenza che giace sul piano Oxy tale da essere centrata all'interno della ciambella. Chiamiamo R il raggio di quest'unica circonferenza. Per ogni punto di tale circonferenza è possibile individuare una circonferenza avente centro nel punto stesso e tale da descrivere tutti i punti della sezione della superficie del toro mediante un semipiano contenente l'asse z e passante per il punto.

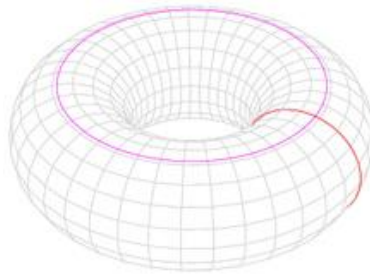
Queste circonferenze sono infinite, ve n'è infatti una per ciascun punto della circonferenza di raggio R e hanno tutte il medesimo raggio che chiameremo r .

Se ci riferiamo ad un toro con circonferenze principali di raggio R , r e con centro nell'origine degli assi cartesiani, l'equazione cartesiana è ottenuta, quadrando ambo i membri, da

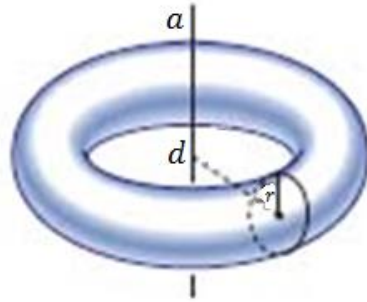
$$(R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2.$$

Scriviamo per completezza le equazioni parametriche del toro. Essendo una superficie nello spazio tridimensionale, ci bastano due parametri. Prendiamo come parametri gli angoli θ , φ formati rispettivamente dal raggio R sul piano Oxy e dal raggio r nella circonferenza della sezione (piano contenente l'asse z):

$$\begin{cases} x = (R + r \cos(\varphi)) \cos(\theta) \\ y = (R + r \cos(\varphi)) \sin(\theta) \\ z = r \sin(\varphi) \end{cases}$$



d è la distanza dal centro della circonferenza di raggio r all'asse di rotazione a



Ora troviamo il volume del toro. Tagliamo il toro secondo una sezione circolare distendendolo in modo tale che diventi un cilindro. Si sa che il volume di un cilindro è dato dal prodotto tra l'area di base e l'altezza. Così abbiamo trasformato il toro in un cilindro di raggio r , la cui altezza è pari alla lunghezza di una circonferenza di raggio d , cioè $2\pi d$.

Quindi il volume V del toro vale $(\pi r^2) (2\pi d)$, cioè: $V = 2\pi^2 dr^2$.

Analogamente, la superficie del toro è pari alla superficie del cilindro. Sezionando il cilindro parallelamente al suo asse e distendendolo, otteniamo un quadrato la cui altezza è uguale a quella del cilindro e la cui base è pari alla circonferenza di base del cilindro, quindi la superficie S del toro vale $(2\pi d) (2\pi r)$, cioè: $S = 4\pi^2 dr$.

Il toro solido è l'oggetto tridimensionale delimitato dal toro (toro incluso). Si tratta cioè della porzione di spazio contenuta all'interno del toro inclusa la parte di spazio che la delimita. (12)

2.3 Immersione di grafi in superfici

Definiamo che cosa si intende per disegnare un grafo in una superficie (es.: un piano, un toro, una sfera), cioè per immersione di un grafo in una superficie. (13)

Consideriamo il grafo $G = (V, E)$ e una superficie Σ .

Si chiama immersione di G in Σ una applicazione iniettiva $f: V \cup E \rightarrow \Sigma$, in cui le curve corrispondenti a spigoli non si intersecano in punti che non siano corrispondenti a vertici del grafo, definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} P \in \Sigma & \text{se } x \in V \\ \text{una curva } PQ \subseteq \Sigma \text{ di estremi } P \text{ e } Q & \text{se } x = \{u, v\} \in E, \text{ con } f(u) = P \text{ e } f(v) = Q \end{cases}$$

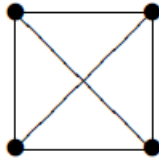
In altri termini, ad ogni vertice $u \in V$ si fa corrispondere un punto di Σ e ad ogni spigolo $\{u, v\} \in E$ si fa corrispondere una curva continua PQ su Σ tale che i suoi estremi siano i punti corrispondenti ai vertici u e v dello spigolo considerato.

Consideriamo ora due tipi di superfici, il piano e il toro.

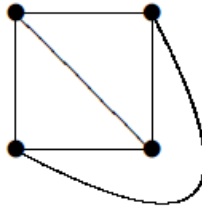
Definizione. Un grafo piano è un grafo immerso nel piano i cui spigoli non si intersecano in punti che non siano vertici del grafo stesso.

Definizione. Un grafo G' non piano è planare se esiste un'immersione di G' nel piano, cioè se esiste un grafo G isomorfo a G' tale che G sia un grafo piano.

Ad esempio, il seguente grafo G' è planare ma non piano.



Infatti esso è isomorfo al seguente grafo piano G .

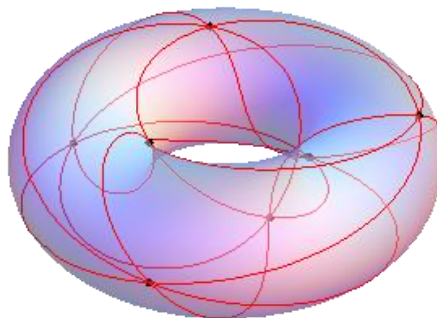


Si osservi che uno stesso grafo può essere rappresentato graficamente in molti modi. A seconda della sua rappresentazione grafica saranno più o meno numerosi gli incroci, cioè i punti di intersezione di due spigoli del grafo che non siano vertici dello stesso. (10)

Definizione.

Un grafo toroidale è un grafo immerso nel toro i cui spigoli non si intersecano in punti che non siano vertici del grafo stesso.

Un grafo toroidale è un grafo non planare immerso in un toro senza alcun incrocio di spigoli. (14)



Immersione di grafo in un toro

Capitolo 3 “Matematica e Musica”

3.1 PRINCIPALI FONDAMENTI MATEMATICO-MUSICALI

Analizziamo ora alcuni dei più importanti tra i fondamenti matematico-musicali.

3.1.1 Il pentagramma

Sia lo studio che la composizione musicale non possono prescindere dalla matematica. Frequenze e tempi musicali sono descritti dal linguaggio matematico e alla base della struttura di un qualunque brano musicale si ritrovano inevitabilmente calcoli matematici. Basta aprire un qualsiasi spartito per trovare agli inizi di ogni rigo musicale una indicazione metrica che indica il tempo di quella composizione.

Il pentagramma o rigo musicale è costituito da cinque linee parallele, con quattro spazi interlineari, su cui si scrivono le note, cioè i segni grafici che rappresentano i suoni musicali.

Per Elisa Beethoven

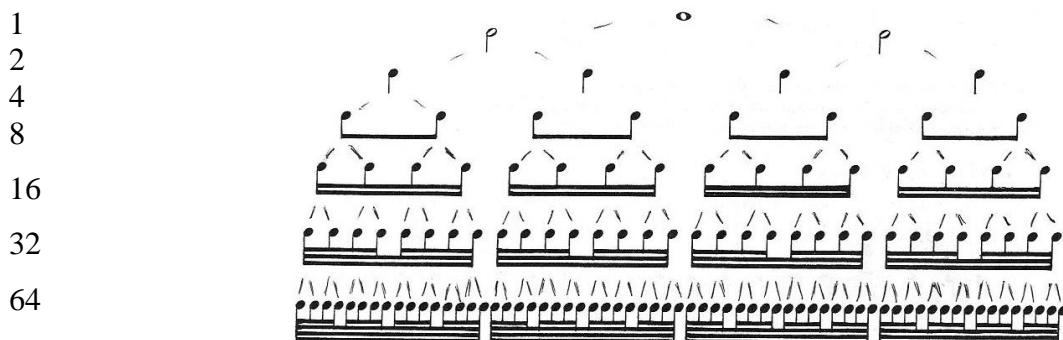
MI RE MI RE MI SI RE DO la do mi la si mi sol si DO mi MI RE
 MI RE MI SI RE DO la do mi la si mi DO si la MI RE MI RE MI SI RE DO
 la do mi la si mi sol si DO mi MI RE MI RE MI SI RE DO la do mi la
 si mi DO si la si DO RE MI sol FA MI RE fa MI RE DO mi RE DO
 si mi MI mi MI mi MI MI MI RE MI RE MI SI RE DO la do mi la si mi sol si
 DO mi MI RE MI RE MI SI RE DO la do mi la si mi DO si la

In tutti gli spartiti musicali vi è sempre quindi un elemento matematico di importanza fondamentale: è un numero (sopra indicato dalla freccia rossa) che viene apposto dal compositore all’inizio del pentagramma e che costituisce una la notazione di metro ossia l’indicazione di tempo a cui la nostra tradizione occidentale affida il ritmo col quale quel brano musicale deve essere suonato (ad es.: “3/4” per il Valzer).

Convenzionalmente le frazioni metriche corrispondono a multipli delle seguenti figure musicali, ciascuna avente il suo valore numerico:

nomi	Note	simbolo di pausa	valore
Semibreve	♩	≡	Un intero (1/1)
Minima	♪	≡	Un mezzo (1/2)
Seminimina	♫	≡	Un quarto (1/4)
Croma	♮	∩	Un ottavo (1/8)
Semicroma	♯	∩	Un sedicesimo (1/16)
Biscroma	♮	∩	Un trentaduesimo (1/32)
Sembiscroma	♮	∩	Un sessantaquattresimo (1/64)

Pertanto se all'inizio del pentagramma troviamo, ad esempio, l'indicazione metrica 3/4, ciò significa che la somma dei valori delle note di ogni battuta di quel brano è uguale a 3/4. Il rapporto esistente tra i valori (durate) delle note musicali è illustrato nel seguente prospetto:



Così, ad esempio, se l'indicazione metrica è 3/4, si ha che:

$$\begin{aligned}
 3/4 &= 3 \times 1/4 = 3 \text{ volte } 1 = 3 \\
 &= 3 \times 2/8 = 3 \text{ volte } 2 = 6 \\
 &= 3 \times 4/16 = 3 \text{ volte } 4 = 12 \\
 &= 3 \times 8/32 = 3 \text{ volte } 8 = 24 \\
 &= 3 \times 16/64 = 3 \text{ volte } 16 = 48
 \end{aligned}$$

3.1.2 Il basso continuo

Il basso continuo (detto anche cifrato o numerato) è l'accompagnamento strumentale che, seguendo le note di basso scritte sullo spartito, conduce il discorso musicale d'insieme estrapolando da esse gli accordi melodici numericamente indicati nello spartito stesso. E' un metodo strettamente associato con tutti i generi di musica del periodo barocco, ma ancora oggi è oggetto di studio da parte dei musicisti. (15)

Il basso continuo è costituito dalle note scritte dal musicista in chiave di basso, per fare da sostegno armonico a tutta la composizione. Sul pentagramma, però, sono scritte solo le note del basso (che vengono suonate con la mano sinistra), mentre mancano le note degli accordi (suonate con la mano destra), essendo queste ultime sostituite da numeri naturali che le esprimono.

Sul pentagramma possono essere indicate anche le alterazioni musicali (diesis #, bemolle b), di cui meglio diremo al paragrafo 3.2.2.

Il musicista esperto deve quindi interpretare quei numeri, traendo da essi le indicazioni sul come improvvisare gli accordi (mancanti), che suonati insieme alle note del basso completano il discorso musicale.

I numeri scritti sul pentagramma indicano l'intervallo dalle note di basso a quelle espresse dai numeri e che devono essere individuate e suonate insieme a quelle scritte nel basso.

Chiariremo il concetto di intervallo al successivo paragrafo 3.1.3.

Facciamo un esempio.

Ecco un pentagramma di basso continuo, nel quale sono scritte soltanto le note di basso, e sotto sono scritti i numeri naturali che indicano le note degli accordi da individuare e suonare:

$\frac{6}{5}$ 2 6 $\frac{4}{3}$ 7 15 $\frac{6}{[b]}$ $\frac{7}{[b]}$ $\frac{6}{4}$ $\frac{5}{3}$

Per comprendere come il musicista deve procedere, prendiamo soltanto le prime due note di quel pentagramma:

$\frac{6}{5}$

Stante che quelle due note di basso sono un Re e un Do#, quest'ultima con sotto anche i numeri 5 e 6, in tal caso si ha che sulla prima nota Re, siccome a volte nel pentagramma i numeri 8, 3, 5 vengono addirittura omessi (non scritti), in quanto trattandosi di un accordo in stato fondamentale essi sono sottintesi, in questo caso (in corrispondenza ai numeri sottintesi 8, 3, 5, che indicano le note poste ad un intervallo di ottava, ad uno di terza e ad uno di quinta dal Re) l'accordo da suonare (di cui alla detta nota Re) sarà: Re, Fa#, La, cioè:

Sulla seconda nota Do#, qui il numero omesso e sottinteso è il 3, perciò in questo caso (in corrispondenza al numero 3, che indica la nota posta ad un intervallo di terza dal Do#, ed ai numeri scritti 5 e 6 che indicano rispettivamente le note poste ad un intervallo di quinta e ad un intervallo di sesta dal Do#) l'accordo (di cui alla detta nota Do#) che il musicista deve suonare sarà: Mi, Sol, La, cioè:

$\frac{6}{5}$

Ecco così spiegato in che modo, procedendo analogamente all'esempio fatto, si deve leggere lo spartito, ricavando cioè dai numeri scritti dall'autore sotto il pentagramma le note degli accordi che dovranno essere suonate insieme alle note di basso, come sotto indicato.

6/5 2 6 4/3 7 15 6 7 6 5

3.1.3 L'intervallo musicale

In musica l'intervallo è la distanza tra due note, cioè un rapporto numerico. L'intervallo tra due suoni si può definire in modo preciso esprimendo il rapporto fra le loro frequenze. La nota da cui tutto il sistema musicale prende avvio è il LA, che risuona a 440Hz.

Per trovare sul monocordo il rapporto numerico di un determinato intervallo basta dividere la lunghezza della corda libera (il primo tra i due suoni prodotti) per la lunghezza della corda che ha prodotto il secondo suono.

Il semitono e il tono sono intervalli (rispettivamente, seconda minore e seconda maggiore).

L'intervallo di ottava è quello che si ottiene suonando prima la corda in assenza di ponticello (cioè "a corda libera"), quindi suonandola mettendo il ponticello a metà della corda.

Chiariremo il concetto di ponticello al successivo paragrafo 3.2.1.

Sia L la lunghezza della corda libera, si ha che: $L : L/2 = 1 : 1/2 = 2:1$

Noi chiamiamo "ottava" questo tipo di intervallo, i greci lo definivano "diapason".

L'ottava è l'intervallo tra una nota musicale e la stessa nota avente frequenza doppia (ottava superiore) ed è l'intervallo di massima consonanza. (6)

Il rapporto di frequenza è:

LA centrale = frequenza 440 Hz

LA un'ottava sopra = 880 Hz

LA un'ottava sotto = 220 Hz

L'intervallo di quinta giusta sarà: $L : 2L/3 = 3 : 2$

L'intervallo di quarta giusta sarà: $L : 3L/4 = 4 : 3 = 2/1 : 3/2$ (cioè un intervallo di quarta giusta è uguale ad un intervallo di ottava diviso un intervallo di quinta giusta).

In musica si definisce triade la composizione di due intervalli armonici di terza, che sono la base della maggior parte degli accordi musicali. Si definisce rivolto di un accordo quell'accordo in cui al basso si ha un suono diverso dalla nota fondamentale.

3.2 DALLA VISIONE PITAGORICA AL TEMPERAMENTO EQUABILE

Il connubio tra matematica e musica ha origini antichissime e si è via via consolidato attraverso i secoli.

3.2.1 Pitagora e l'armonia

Riflettendo se la matematica sia un sistema di origine cosmica, una sorta di sapere divino che portiamo dentro di noi, Pitagora per primo sostenne che nell'universo tutto è Numero, e che mediante i numeri, elemento di cui tutte le cose sono costituite, è possibile spiegare ogni cosa: dal mondo che ci circonda al moto degli astri, al succedersi delle stagioni, alle armonie della Musica.

Nella visione pitagorica la musica rappresenta l'armonia invisibile del mondo e le relazioni tra i suoni imitano l'evoluzione delle sfere celesti, l'energia dell'anima universale e l'ordine interno di ogni singolo individuo, scintilla sulla terra dell'anima universale.

Partendo dalla teoria della coincidenza di musica, matematica e natura, Pitagora suppose che esistessero tre tipi di musica: quella strumentale, quella umana, e quella cosmica.

Questi tre generi di musica diventarono il tema dominante della speculazione pitagorica, e poi platonica, in cui il modello dell'universo è costruito in base ai rapporti armonici degli accordi musicali che diventano parte della struttura costituente l'anima del mondo.

Secondo la tradizione, fu Pitagora che per primo percepì la sinfonia planetaria, riconoscendo la somiglianza tra i suoni delle sfere celesti e quelli dei colpi di martello sull'incudine.

La musica delle sfere, detta anche musica universale, è un antico concetto filosofico che considera l'universo come un enorme sistema di proporzioni numeriche. I movimenti dei corpi celesti (Sole, Luna e pianeti) produrrebbero una sorta di musica, pur non udibile dall'orecchio umano, consistente in concetti armonico-matematici.

Per Keplero, la musica delle sfere rappresenta il punto d'incontro fra geometria, cosmologia, astrologia e musica.

Secondo il filosofo e matematico Simplicio, invece, la musica delle sfere non va intesa in senso letterale, come effettiva vibrazione sonora propagantesi nell'aria che colpisce l'udito umano, ma come un atto intellettuale, attraverso il quale l'uomo accede alla comprensione dei rapporti armonici che regolano la struttura ordinata dell'universo.

Pitagora, con la percezione della musica delle sfere, scoprì il legame esistente fra matematica, musica e natura. Secondo quanto racconta il filosofo neoplatonico Giamblico (250-330 circa), Pitagora " ... mentre passava dinanzi all'officina di un fabbro, per sorte divina udì dei martelli che, battendo il ferro sopra l'incudine, producevano echi in perfetto accordo armonico tra loro, eccettuata una sola coppia. Egli riconobbe in quei suoni gli accordi di ottava, di quinta e di quarta e notò che l'intervallo tra quarta e quinta era in se stesso dissonante ma tuttavia atto a colmare la differenza di grandezza tra i due. Rallegrato che con l'aiuto di un dio il suo proposito fosse giunto a compimento, entrò nell'officina e dopo molte prove scoperse che la differenza nell'altezza dei suoni dipendeva dalla massa dei martelli ".

In seguito Pitagora fece degli altri esperimenti per accertare se regole simili valessero anche per i suoni generati da strumenti a corda (es. la lira). Scoprì così che la regola era la stessa.

Nonostante avesse basato la sua dottrina sui numeri interi, specie quelli dall'1 al 4 che formavano la cosiddetta *tetraktys*, Pitagora scoprì come le altezze dei suoni fossero legate tra loro da precisi rapporti numerici ovvero da numeri razionali.

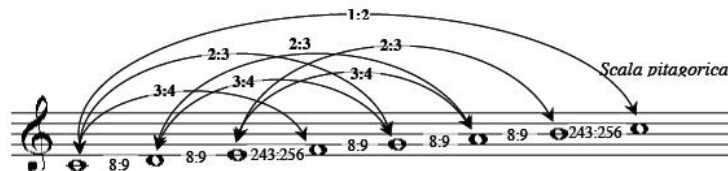
Per indagare la misurabilità del suono Pitagora utilizzò il monocordo (chiamato dai greci *kanon* perché serviva a stabilire la regola), una cassetta rettangolare sormontata da una corda e da un sottostante ponticello mobile che serviva a dividere e a misurare le parti vibranti della corda. Studiando i suoni prodotti da corde messe in tensione grazie a pesi differenti, Pitagora scoprì che la consonanza tra coppie di suoni si ripeteva quando tali tensioni stavano fra loro in rapporti numerici come i pesi dei martelli del fabbro. Ed enunciò la celebre frase: "Il segreto dell'armonia sta nel magico potere dei numeri". (16)

3.2.2 Le scale musicali

Parlando di tonalità, è importante chiarire che si definisce “*scala musicale*” una successione ordinata di suoni (detti “gradi”) di grado congiunto compresi in un intervallo di ottava.

Nella musica della Grecia antica (così come nelle principali culture musicali extraeuropee) la coesistenza di scale diverse fu considerata perfettamente naturale e utile ai fini espressivi. La costruzione delle scale musicali poteva avvenire secondo un principio *ciclico* oppure secondo un principio *divisivo*. Nel primo caso, la scala era ottenuta attraverso una successione di quinte ascendenti e quinte discendenti. Il principio divisivo, viceversa, definiva gli intervalli fra i gradi successivi della scala come suddivisione di un intervallo fondamentale.

Nell’Europa medioevale i teorici descrissero un solo tipo di scala, costruita con il metodo ciclico e attribuita a Pitagora, a cui si attribuisce tradizionalmente l’osservazione che gli intervalli musicali corrispondono a rapporti numerici (valutati attraverso la divisione del monocordo). Nella scala pitagorica (di sette note) le quinte e le quarte corrispondono rispettivamente alle frazioni $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$, l’intervallo di semitono corrisponde a $\frac{243}{256}$ e l’intervallo di tono corrisponde a $\frac{8}{9}$.



Nel corso del Medioevo furono poi aggiunte le note alterate e l’ottava risultò suddivisa in dodici note (scala cromatica), sempre ottenute con il metodo ciclico:



La scala pitagorica cromatica così costruita presenta due peculiarità. La prima è che l’intervallo di tono non risulta diviso in due semitoni uguali (il semitono pitagorico non è la “metà” di un tono), la seconda è che il ciclo delle quinte dopo dodici suoni non si chiude esattamente sulla nota di partenza: l’intervallo residuo è detto *comma pitagorico*. Queste proprietà derivano entrambe dal fatto che il principio ciclico (basato sul rapporto $\frac{2}{3}$) è matematicamente inconciliabile con l’equidivisione dell’ottava (rappresentata dal rapporto $\frac{1}{2}$). Il problema si può risolvere con una definizione puramente divisiva della scala, tuttavia fino a tempi molto recenti non esisteva alcun metodo pratico per applicare un criterio divisivo all’accordatura di uno strumento musicale. (17)

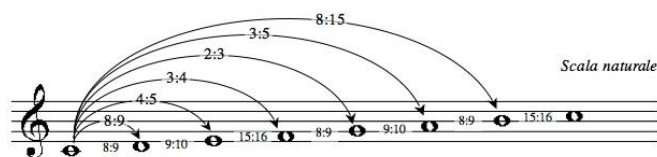
In musica, con il termine temperamento si intende l’alterazione di alcuni intervalli di quinta e di quarta nell’accordatura di uno strumento musicale. Alterazioni di questo tipo sono state introdotte nella musica europea a partire dal tardo Medioevo, al fine di ottenere una scala musicale più adatta alle esigenze della composizione. Per estensione, sono detti temperamenti le scale musicali risultanti da queste alterazioni. (18)

In ogni epoca i vari modelli di temperamento costituiscono dei riferimenti teorici che soltanto nell’accordatura di alcuni strumenti (tipicamente quelli a tastiera, come organo, clavicembalo e pianoforte) si cerca di applicare con la massima precisione: tutti gli altri strumenti, così come le voci, nella pratica musicale sfruttano sistematicamente la possibilità di alterare l’altezza dei singoli suoni rispetto al temperamento di riferimento, per avvicinarsi maggiormente all’intonazione giusta.

Nel corso del XVI secolo si è attestata la pratica del temperamento mesotonico (o del tono medio), che si basa su un principio simile a quello pitagorico, per ottenere i vari gradi della scala attraverso cicli di quinte, correggendo gli intervalli di quinta in modo che altri intervalli, come le terze maggiori, si trovino alla loro intonazione naturale.

Il temperamento mesotonico, tuttavia, non permette a sua volta di chiudere esattamente il ciclo delle quinte e pertanto produce nella scala un intervallo molto crescente ("*quinta del lupo*"), usualmente fra le note Sol# e Mi b ; più in generale non permette di usare alcune note alterate (se i "tasti neri" sono accordati come Do# , Mi b , Fa#, Sol# e Si b , non possono essere utilizzati per suonare le note Re b , Re# , Sol b , La e La#). Poiché la composizione musicale, dalla seconda metà del XVI secolo, prevedeva sempre più frequentemente l'uso di più di cinque note alterate, si cercò di ovviare al problema del temperamento mesotonico con la costruzione di tastiere in cui alcuni tasti neri erano suddivisi per ottenere separatamente le note Mi b / Re# e Sol# / La b (già il monumentale organo della Basilica di San Petronio a Bologna, 1475, presenta alcuni tasti divisi in questo modo). (19)

Nel 1558 il teorico musicale Gioseffo Zarlino propose una radicale riforma della costruzione della scala musicale, allo scopo di includere i rapporti 4/5 e 5/6 (terza maggiore e minore) come intervalli fondamentali accanto ad ottava, quinta e quarta. Nella scala di Zarlino (detta scala naturale, costituita da sette note fondamentali: DO, RE MI, FA, SOL, LA, SI) compaiono due diversi intervalli di tono, il tono maggiore (8/9) e il tono minore (9/10).



La scala di Zarlino non è – a rigore di termini – un vero temperamento, in quanto non è ottenibile con un procedimento ciclico. Inoltre nella scala naturale gli intervalli sono "giusti" solo rispetto alla tonica della scala, mentre altri intervalli (ad esempio Re-La) sono del tutto stonati. La proposta di Zarlino fu ulteriormente modificata dal suo discepolo Vincenzo Galilei (padre di Galileo), che propose l'adozione di un semitono corrispondente a 17/18. Nel tentativo di rendere disponibili al musicista gli intervalli giusti (indicati da Zarlino) a partire da qualsiasi nota, furono proposti strumenti a tastiera (archicembalo e arciorgano) in cui erano presenti 31 tasti per ottava, che per evidenti motivi non divennero di uso comune. (6)

Nel tardo Medioevo il numero delle note delle scale naturali si stabilizzò a 12 in modo che, alle sette note classiche (tasti bianchi), risultarono aggiunti altri cinque "gradini" intermedi (tasti neri), detti note alterate. Queste ultime sono ottenute innalzando la nota precedente di un semitono (con il diesis #) o abbassando la successiva di un semitono (con il bemolle b), per un totale di 12 semitoni totali in cui risulta divisa l'ottava e quindi 12 note differenti nella scala. La scala così ottenuta è detta scala cromatica, perché l'ottava è divisa in dodici semitoni.

Per risolvere alcuni problemi della scala pitagorica e di quella naturale, in particolare quelli legati al cambiamento della tonalità, nasce il sistema temperato equabile. (20)

3.2.3 Il temperamento equabile

Il punto di vista di Zarlino e di Vincenzo Galilei fu contestato dal matematico e ingegnere fiammingo Simone di Bruges, detto anche Simone Stevino il quale, in un'opera scritta fra la fine del XVI e l'inizio del XVII secolo, descrisse una scala basata sulla divisione dell'ottava in dodici semitoni uguali.

La scala di Stevino è oggi universalmente nota con il nome di temperamento equabile e si può affermare che questa scala è il temperamento universalmente adottato nel XX secolo per l'esecuzione della musica colta occidentale.

Un confronto tra i temperamenti. La seguente tabella illustra le altezze (esprese in cent) dei gradi della scala maggiore secondo i vari temperamenti.

Grado della scala	Temperamento equabile	Intervallo	Scala naturale	Intervallo	Scala pitagorica	Intervallo
I	0	—	0	—	0	—
II	200	200	204	204	204	204
III	400	200	386	182	408	204
IV	500	100	498	112	498	90
V	700	200	702	204	702	204
VI	900	200	884	182	906	204
VII	1100	200	1088	204	1110	204
VIII	1200	100	1200	112	1200	90

Tabella delle altezze (in cent) dei gradi della scala maggiore secondo i vari metodi di intonazione

Come si vede dalla tabella, in tutti e tre i temperamenti l'intervallo di ottava è identico (1200 cent) e sono praticamente uguali anche gli intervalli di quarta (498-500 cent) e di quinta (700-702 cent). Il discorso è ben diverso per gli intervalli di terza maggiore e di sesta maggiore. L'intervallo di terza maggiore naturale vale 386 cent, mentre quello pitagorico è assai crescente: 408 cent; un discorso analogo vale per la sesta. Si può dunque capire come mai un intervallo perfettamente consonante secondo la nostra sensibilità come quello di terza maggiore venisse considerato intollerabilmente dissonante agli inizi della polifonia, quando si usava il temperamento pitagorico: la "colpa" era insita nella costruzione pitagorica della scala.

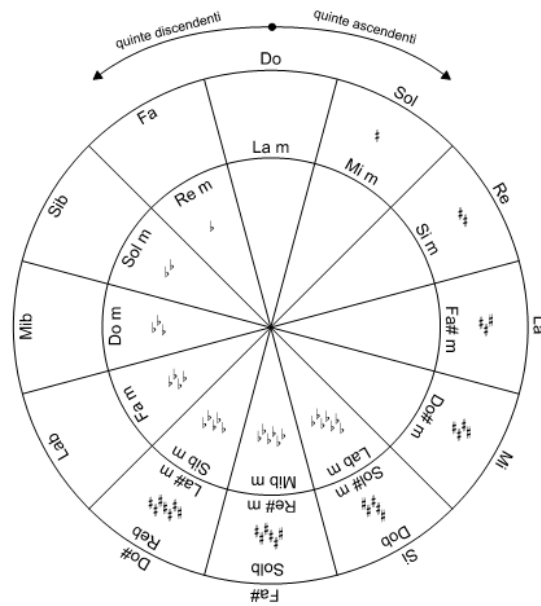
La tabella mostra anche che le approssimazioni introdotte con il temperamento equabile sono più modeste di quelle pitagoriche (l'intervallo di terza maggiore vale 400 cent invece dei 386 cent naturali) e tali da essere ormai ampiamente tollerate.

Ciò spiega come mai al nostro orecchio intervalli di terza suonino consonanti anche quando suonati al pianoforte (che è accordato secondo il temperamento equabile).

3.3 CICLO DELLE QUINTE E TONNETZ

3.3.1 Il ciclo delle quinte

Il ciclo (o circolo) delle quinte permette di identificare tutte le tonalità musicali esistenti e di capire esattamente quali alterazioni (diesis e bemolli) ha in chiave ciascuna di esse. Per ben intendere il ciclo delle quinte dobbiamo fare riferimento ad un grafico utilizzato in teoria musicale per mostrare le relazioni esistenti tra le dodici note che compongono la scala cromatica. (21)



Quinte ascendenti:

Do - La m Sol - Mi m Re - Si m La - Fa# m Mi - Do# m Si - Sol# m Fa# - Re# m Do# - La# m

Progressione diesis: Fa, Do, Sol, Re, La, Mi, Si

Quinte discendenti:

Do - La m Fa - Re m Sib - Sol m Mib - Do m Lab - Fa m Reb - Sib m Solb - Mib m Dob - Lab m

Progressione bemolle: Si, Mi, La, Re, Sol, Do, Fa

Per costruire questo grafico, di forma circolare, dobbiamo partire dal Do centrale – scala di Do Maggiore, considerato il punto di riferimento perché è l’unico suono comune a (quasi) tutti gli strumenti musicali.

Partendo dal Do centrale si procede, in senso orario, per intervalli di quinta giusta ascendente, o in senso anti-orario per la quinta giusta discendente. Troveremo nel primo caso le scale maggiori e minori che in chiave hanno i diesis #, nel secondo caso le scale maggiori e minori che in chiave hanno i bemolli b .

Il ciclo delle quinte è un importante strumento per comprendere il sistema tonale. Se letto in senso orario ogni nota è la quinta ascendente della nota precedente. Se letto in senso antiorario ogni nota è la quarta (quinta discendente) della nota precedente. Ad esempio: FA è la quarta nota di DO e DO è la quinta di FA. Questo principio vale per tutti gli intervalli e i loro rivolti, a seconda del numero dei passi che si compiono sulla ruota. Così con tre passi LA è la sesta maggiore di DO e DO è la terza minore di LA. Ergo, tre passi sul ciclo delle quinte equivalgono ad un intervallo di terza minore o di sesta maggiore, a prescindere dalla nota di partenza. Perciò:

- 1 passo = quinta giusta/quarta giusta
- 2 passi = seconda maggiore/settima minore
- 3 passi = sesta maggiore/terza minore
- 4 passi = terza maggiore/sesta minore
- 5 passi = settima maggiore/seconda minore
- 6 passi = quarta eccedente/quinta diminuita (tritono)

Ecco la relazione tra nota e lunghezza della corda:

Nota	Lunghezza relativa della corda	Frequenza relativa della nota emessa
Do	1	1
Re	8/9	9/8
Mi	4/5	5/4
Fa	3/4	4/3
Sol	2/3	3/2
La	3/5	5/3
Si	8/15	15/8
Do ₂	1/2	2

Il problema dell'intonazione deriva dalla necessità di poter accordare strumenti a corda, come il pianoforte o gli archi, in modo da poter suonare in diverse tonalità. Un modo per accordare uno strumento ad accordatura fissa consiste nel preservare gli intervalli di quinta a partire da una corda base.

In questo modo si accorda percorrendo il cosiddetto *ciclo delle quinte*: Do, Sol, Re, La, Mi, Si, Fa#, Do#, Sol#, Re#, La#, Fa (o Mi#), Do, che dopo sette ottave ritorna alla nota fondamentale. È facile vedere che nessuno dei metodi fin qui esaminati può fare sì che il Do₂ coincida con quello ottenuto dal ciclo delle quinte: infatti, sia per il temperamento naturale, sia per quello pitagorico, le frequenze delle ottave sono multiple di potenze di due, mentre nel ciclo delle quinte le frequenze sono multiple di potenze di 3/2: nessuna potenza di due è anche una potenza di 3/2. Questo ragionamento vale anche per gli altri rapporti considerati.

3.3.2 Tonnetz

Un Tonnetz è una matrice bidimensionale composta da una griglia di linee verticali e orizzontali usata per rappresentare relazioni fra altezze in uno spazio duale, inteso nel senso topologico precisato appresso a pagina 26. In quanto immagine grafica della tonalità esso fu impiegato per la prima volta da Leonardo Eulero (*Tentamen novae theorie musicae*, 1739), poi fu ripreso da Arthur Oettingen e Hugo Riemann, che ponevano il Tonnetz nello spazio infinito del temperamento inequabile.

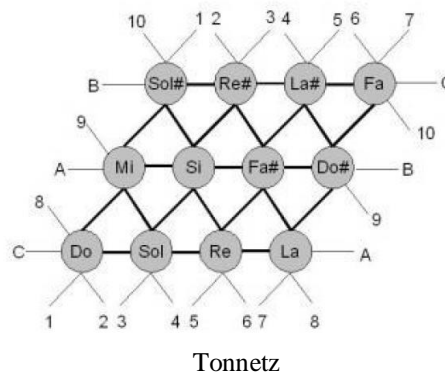
Il Tonnetz di Oettingen e Riemann dispone lungo gli assi delle coordinate cartesiane e lungo una diagonale gli intervalli costituenti le triadi: le quinte (pertette) lungo l'asse orizzontale, le terze maggiori lungo l'asse verticale e le terze minori lungo la diagonale nord-ovest/sud-est.

Un Tonnetz in uno spazio chiuso a modulo 12 (cioè nel temperamento equabile), e che utilizza come tricordi soltanto le triadi maggiori e minori, prende il nome di “Tonnetz parsimonioso”: questa denominazione indica che le operazioni trasformazionali avvengono all'interno di cicli chiusi, che prevedono uno spostamento di voci minimo.

Costruzione del Tonnetz. Per costruire il Tonnetz dobbiamo disegnare un grafo di dodici vertici in cui ogni vertice rappresenti una classe di altezze, ovvero l'insieme di tutti i suoni aventi lo stesso nome (Do, Do diesis, ...), ma aventi altezze differenti.

Nella costruzione del Tonnetz due altezze sono adiacenti a meno di rivolto di quinta (o quarta), terza minore e terza maggiore (sesta maggiore e sesta minore).

Il grafo che si ottiene è riportato nella seguente figura:

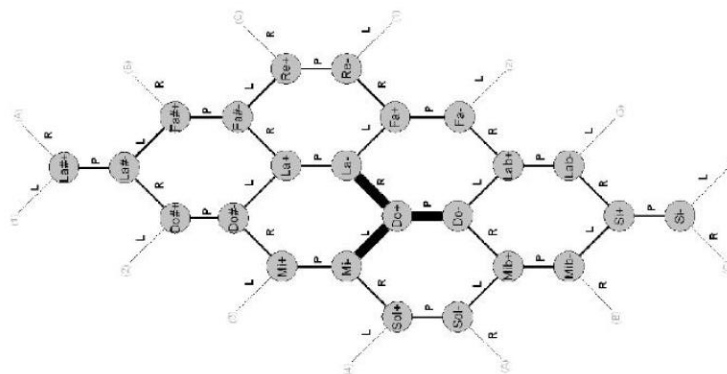


Duale del Tonnetz. L'immersione del Tonnetz nel toro permette di considerarne il duale topologico, che consente di visualizzare le relazioni tra triadi.

Le facce del Tonnetz rappresentano triadi se si considerano elementi delle stesse i tre vertici che delimitano la faccia interessata.

Indichiamo con $D(Ton)$ il duale del Tonnetz, che presenta caratteristiche:

- $D(Ton)$ ha 24 vertici, uno per ogni faccia del Tonnetz, contrassegnati in modo tale che ad ognuno corrisponda una triade distinta e che quindi i vertici costituenti $D(Ton)$ corrispondano a tutte le triadi maggiori e minori;
- Due triadi sono adiacenti se hanno una linea (e quindi due vertici del Tonnetz) in comune;
- $D(Ton)$ è bipartito e in particolare l'insieme dei vertici è partizionato in triadi maggiori e minori;
- $D(D(Ton)) = Ton$.



Duale del Tonnetz

Tonnetz parsimonioso a modulo 12. Attraverso il Tonnetz è possibile rappresentare una successione di triadi come successive trasformazioni di una triade di partenza attraverso una serie di operazioni. Tali operazioni sono caratterizzate da due elementi:

1. la parsimoniosità: le voci coinvolte muovono per semitono o al massimo per tono;
2. l'inversione del modo: la triade risultante dall'operazione è sempre di modo opposto rispetto a quella di partenza.

Le operazioni sono dunque le seguenti:

- p (Parallel) = trasforma la triade di partenza nella triade parallela di modo opposto: le due triadi hanno in comune la quinta;
- l (Leittonwechsel, o scambio di sensibile) = trasforma la triade di partenza nella triade di scambio di sensibile: le due triadi hanno in comune la terza minore;
- r (Relativ) = trasforma la triade di partenza nella triade relativa: le due triadi hanno in comune la terza maggiore.

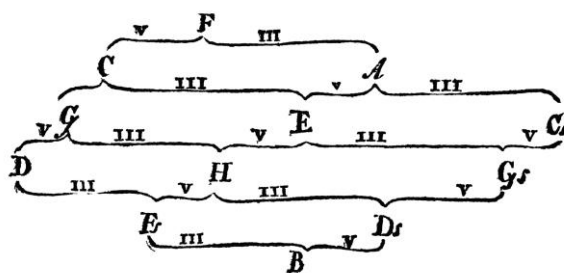
Queste operazioni si possono rappresentare nel Tonnetz come movimenti di triangoli che rappresentano triadi. Le triadi sono maggiori se l'angolo retto si trova in direzione nord/ovest, minori se si trova in direzione sud/est. (22)

Come abbiamo visto, il Tonnetz parsimonioso si trova in uno spazio a modulo 12, cioè in uno spazio ciclico. I movimenti di triadi all'interno del Tonnetz possono seguire anch'essi un percorso ciclico (o chiuso), tale cioè da prevedere un ritorno alla triade di partenza. Un particolare tipo di percorso ciclico a minimo spostamento costituisce quello che Richard Cohn ha chiamato sistema esatonico.

In teoria musicale, il *Tonnetz* (dal tedesco: *rete di suoni, o altezze*) è un grafo, un diagramma che rappresenta lo spazio tonale sotto forma di griglia, utilizzato per rappresentare i rapporti tonali e armonici tra le note musicali.

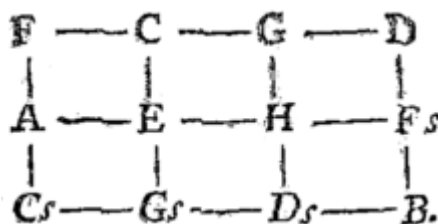
Come sopra detto, il primo esempio di Tonnetz musicale risale al “*Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis*”, pubblicato da Eulero nel 1739, in cui si discute il concetto di consonanza, fondandolo sul confronto tra le frequenze di due suoni, per cui un rapporto tra due suoni o altezze è tanto più consonante quanto più semplice è il rapporto tra le frequenze relazionate.

La prima versione di Tonnetz data da Eulero nel suo *Tentamen* mostra, in particolare, le relazioni di quinta giusta (3 : 2) e di terza maggiore e minore (rapporti 5 : 4 e 6 : 5) tra i gradi del sistema. Ad esempio: FA (F) nell'immagine sopra è legata con una quinta (V) a DO (C) sulla sinistra e con una terza maggiore (III) al LA (A) a destra; DO e LA, sulla stessa linea, sono separati da una terza minore (III). La figura può anche essere vista come formata da tre linee oblique, a sinistra D-G-C-F (RE-SOL-DO-FA), in mezzo Fs-H-E-A (FA#-SI-MI-LA) e a destra B-Ds-Gs-Cs (SI b [per LA#] - RE#- SOL#-DO#). I gradi di ogni riga sono separati da quinte (contrassegnate V) e le linee oblique distanti l'una dall'altra da terze maggiori (III).



Eulero, *Tentamen novae theoriae musicae*, 1741

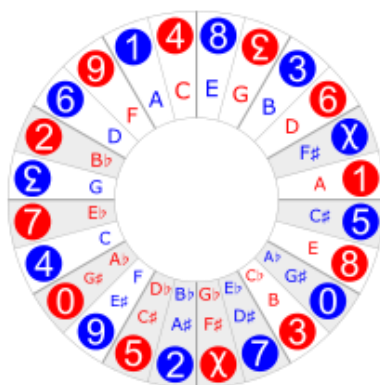
Lo stesso Eulero, 33 anni più tardi, presentò un modello migliore di Tonnetz nel suo *De harmoniae veris principiis per speculum musicum repraesentatis* del 1774, dove le note sono allineate orizzontalmente in quinte, verticalmente in terze maggiori.



Eulero, *Speculum musicum*, 1774

Il Tonnetz di Eulero fu riscoperto nel 1866 da Arthur von Oettingen, che lo concepì con una estensione teoricamente infinita in tutte le direzioni (quinte ascendenti o discendenti, verso destra o a sinistra; terze ascendenti o discendenti, verso il basso o l'alto), come un prolungamento all'infinito dell'intonazione giusta.

Hugo Riemann nel 1880 ha proposto un sistema di trasformazioni per collegare gli accordi di tre note direttamente tra di loro ed ha ripreso il Tonnetz per dimostrare le relazioni esistenti tra triadi, in termini di altezze.



triadi in circolo

Dal fatto che Bach ed Eulero furono contemporanei, alcuni studiosi ritengono molto probabile che Bach conoscesse non solo Eulero ma anche i suoi scritti, in particolare il “*Tentamen novae theoriae musicae*” che tratta del primo Tonnetz. (23)

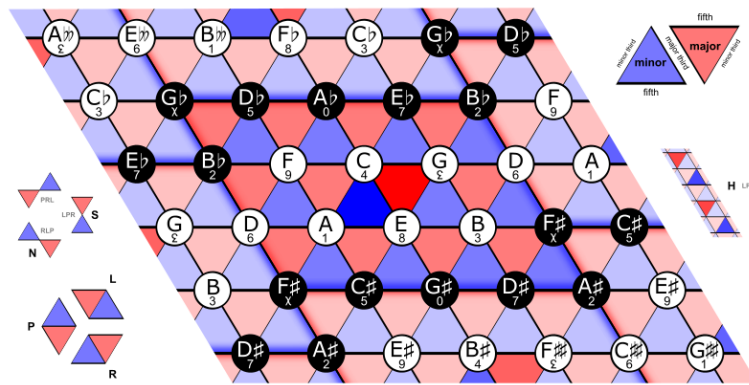
Quale rapporto esiste tra la musica di Bach e il Tonnetz? A questa domanda ha dato una risposta affermativa il teorico della musica, nonché critico musicale e compositore americano, David Lewin (1933-2003). Lewin, analizzando la musica di Bach, in particolare la fuga n. 14 in fa diesis minore del 1° volume del *Clavicembalo ben temperato*, ha concluso sostenendo che il grafo della composizione di Bach, compositore decisamente tonale, può essere facilmente ricostruito come un Tonnetz, più precisamente il Tonnetz parsimonioso che sopra abbiamo esaminato, il quale consente di visualizzare gli aspetti geometrici che si trovano nella musica di Bach. (24)

3.3.3 Teorie neo-riemanniane

Una recente teoria chiamata “trasformazionale” o “neo-riemanniana”, che prende spunto dalla teoria dualistica sviluppata da Artur von Oettingen e da Hugo Riemann, deve la sua fortuna all’opera di David Lewin (1987), oltre che ad un più recente sviluppo della teoria trasformazionale ad opera di Richard Cohn (1996-1999). (25)



Illustrazione del sistema dualistico Riemann: un accordo minore è un accordo maggiore rovesciato



Griglia tonale di Riemann

Il Tonnetz di Riemann è un grafo rappresentato da una tavola piana di toni lungo tre assi, corrispondenti ai tre intervalli consonanti. Gli accordi maggiori e minori sono rappresentati da triangoli, mentre gli accordi adiacenti condividono due note: così le principali trasformazioni sono espresse attraverso movimenti minimi all'interno del Tonnetz. I toni sono collegati da linee se sono separati da una terza maggiore o minore, o da una quinta giusta. Interpretato come un toro, il Tonnetz ha 12 vertici (toni) e 24 triangoli (accordi). Le facce del Tonnetz rappresentano le triadi.

Gli intervalli sono gli elementi base dell'armonia e alcuni sono percepiti come consonanti (le note si fondono tra loro) e altri come dissonanti (le note si scontrano). La differenza tra le due percezioni è puramente relativa: gli intervalli più consonanti sono quelli che compaiono per primi nella serie degli armonici (l'ottava, la quinta giusta, ecc.), diventando sempre meno consonanti via via che si procede nella serie.

L'elemento armonico base nella musica tonale è la triade: le tre note che la costituiscono si definiscono fondamentale, terza e quinta; queste ultime sono separate dalla fondamentale rispettivamente da un intervallo di terza e di quinta.

I tipi di triade sono quattro. Due sono consonanti e formano gli accordi stabili della musica tonale; e sono la triade maggiore (es. do-mi-sol) in cui con la fondamentale si formano una terza maggiore (do-mi) e una quinta giusta (do-sol); e la triade minore (es. do-mi \flat -sol), in cui si formano una terza minore (do-mi \flat) e una quinta giusta (do-sol). Gli altri due tipi di triade sono percepiti come "dissonanti". La triade diminuita (es. do-mi \flat -sol \flat) è formata da una terza minore (do-mi \flat) e una quinta diminuita dissonante (do-sol \flat). La triade eccedente (es. do-mi-sol \sharp) è formata da una terza maggiore (do-mi) e una quinta eccedente dissonante (do-sol \sharp).

Si può dire che la visione estremamente moderna di Riemann prepara tutti i presupposti della teoria musicale matematica, così riassunta dallo stesso Riemann: "Si concentri ora l'attenzione sul fatto che la mente preferisce relazioni semplici rispetto a quelle complicate, quando tenta di orientarsi nella confusione delle infinite possibilità delle combinazioni tonali (nella melodia e nell'armonia). Questo principio della più grande economia possibile per l'immaginazione musicale deriva direttamente e proprio dal rifiuto di strutture complicate. L'ascolto musicale non è semplicemente un processo passivo dell'orecchio, ma al contrario una manifestazione altamente sviluppata delle funzioni logiche dell'intelletto umano".

La tecnica dell'armonia tonale, fondata sull'opposizione tra consonanze perfette e consonanze imperfette, ha dominato la scena musicale per tre secoli ponendosi come riferimento universale, ed ha segnato a lungo i confini entro cui una composizione doveva muoversi per corrispondere al concetto di musica della civiltà europea.

Per Hugo Riemann, però, la tonalità è un concetto più esteso, di modo che essa può prevedere suoni estranei alla scala ma riconducibili a una funzione della medesima tonalità. La tonalità è cioè una disposizione gerarchica delle triadi basata sulle armoniche di un suono e l'armonia indica il collegamento delle triadi tra loro.

L'evoluzione musicale succedutasi nel corso dei secoli ha portato, verso la fine dell'Ottocento, al raggiungimento di una musica definita post-tonale, ovvero una musica la cui conduzione andava al di là della tonalità tradizionalmente concepita. La necessità di studiare i passaggi tipici di questa musica ha finito per imporre agli studiosi della musica post-tonale un nuovo approccio matematico, in quanto i vecchi strumenti di analisi risultavano inadeguati alle nuove forme di espressione, non più basate sull'armonia tonale.

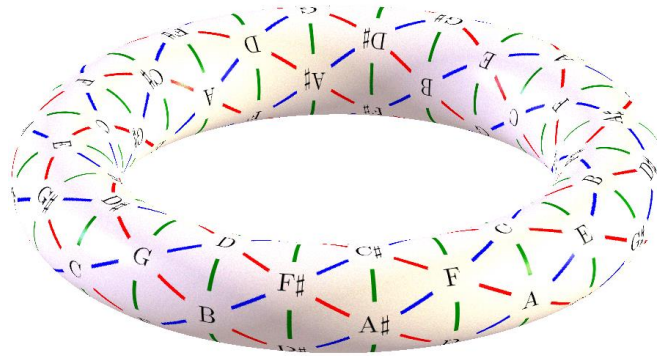
Diverse teorie sono confluite in questa nuova matematizzazione musicale tra cui, in primo luogo, quelle di Oettingen e Riemann, estese al sistema temperato, oltre che le teorie di Eulero e gli strumenti forniti dalla cosiddetta Pitch set theory, in cui a loro volta sono confluite nuove formalizzazioni algebriche e un approccio musicologico-sistematico finalizzato alla comprensione della musica atonale. Da ciò sono derivati un diverso approccio sistematico all'analisi musicale e la creazione di nuove teorie che prendono appunto il nome di teorie neo-riemanniane.

Infatti nel Tonnetz di Riemann compaiono già tutti gli elementi sui quali si fondano le teorie neo-riemanniane, ed è questa la ragione del nome di tali teorie. Riemann sfrutta il Tonnetz proprio per dimostrare le particolari relazioni esistenti tra le triadi nei termini di altezze in comune che permettono di semplificare tali relazioni. Per Riemann la mente umana è facilitata nel rappresentare e interpretare la musica per mezzo di relazioni semplici. La mente cioè preferisce le relazioni semplici rispetto a quelle complicate, quando tenta di orientarsi nella confusione delle infinite possibilità delle combinazioni tonali (nella melodia e nell'armonia). Questo principio della più grande economia possibile per l'immaginazione musicale deriva direttamente dal rifiuto istintivo di strutture musicali complicate.

Il sistema dualistico di classificazione degli accordi è stato adattato dai teorici musicali del XIX secolo. Il dualismo è l'evidenziazione della relazione inversa tra maggiore e minore, l'uno essendo l'inverso dell'altro, e viceversa.

Le principali trasformazioni della teoria neo-riemanniana collegano gli accordi di tre note di diverso tipo (maggiore o minore) al loro inverso. Queste trasformazioni sono puramente armoniche: tutte le trasformazioni di un determinato accordo per produrne un altro rappresentano la trasformazione neo-riemanniana e qualsiasi combinazione di trasformazioni agirà in modo opposto sugli accordi maggiori e minori.

Nel XX secolo, soprattutto nelle teorie neo-riemanniane, il Tonnetz è stato concepito spesso come una rappresentazione del temperamento equabile. Con questa concezione, il Tonnetz ritorna su se stesso dopo dodici quinte o tre terze maggiori, perché le enarmonie (principio dell'armonia tonale per cui due note, anche se di nome diverso, ad esempio $do\#$ e $re\flat$, sono equivalenti in quanto producono lo stesso suono) sono considerate come le stesse note. Il Tonnetz assume quindi una forma toroidale, uno dei cerchi del toro essendo formato dal ciclo delle quinte, l'altro da quello delle terze maggiori, come nella figura qui sotto, dove l'immersione del Tonnetz nel toro, come si è visto, permette di considerarne il duale topologico e quindi di visualizzare le relazioni esistenti tra triadi.



Tonnetz neo-riemanniano toroidale
(Ciclo delle quinte in blu, delle terze maggiori in rosso, delle terze minori in verde)

Considerazioni finali

L'introduzione del linguaggio matematico, nella ricerca del significato della realtà, ha spinto molti filosofi e matematici ad ipotizzare che ci troviamo a vivere in un "Universo Matematico", nel quale tutto ciò che esiste presenta strutture matematiche.

Ciò pone all'uomo una questione di indubbio interesse: Dio ha una mente matematica?

Nel linguaggio biblico, Dio ha fatto l'universo "secondo numero, peso e misura" (Sap.11, 20).

Per San Bonaventura: "Tutte le cose sono belle e in certo modo dilettevoli; e non vi sono bellezza e diletto senza proporzione, e la proporzione si trova in primo luogo nei numeri: è necessario che tutte le cose abbiano una proporzione numerica e, di conseguenza, il numero è il modello principale nella mente del Creatore e il principale vestigio che, nelle cose, conduce alla Sapienza".

Secondo Keplero: "importante non è tanto la convinzione di un meccanicismo originario, quanto l'idea che l'universo sia pervaso da una armonia matematica divina".

Galileo disse che "la matematica è l'alfabeto col quale Dio ha scritto l'universo".

Debussy scrisse: "La musica è una matematica misteriosa i cui elementi partecipano dell'infinito".

L'ispirazione musicale era considerata da Giacomo Puccini come "un improvviso risveglio, quasi una fuga irrazionale ed incomprensibile da tutte le facoltà umane, che si manifesta in ogni grande creazione artistica".

Nella dogmatica cristiana l'ispirazione è la rivelazione soprannaturale fatta da Dio all'uomo attraverso lo spirito. Molti artisti del resto hanno definito la propria ispirazione come una misteriosa "illuminazione divina", un momento di genio irrazionale ed incontrollabile che nasce dal nulla e porta l'artista a risultati impreveduti e spesso inimmaginabili. Così a volte l'ispirazione artistica è stata chiamata metaforicamente "soffio divino" o "lampo di genio", cioè un qualcosa che non può essere spiegato scientificamente.

L'ispirazione quindi è un momento di particolare tensione interiore dell'uomo. L'artista riesce a coglierne la presenza e infatti, quando dice: "In questo momento mi manca l'ispirazione", intende appunto dire che gli manca quel particolare stato interiore, quella misteriosa tensione in forza della quale un artista "crea" la sua opera.

Nella filosofia di Leibniz (1646-1716), di cui è noto l'interesse per la teoria musicale, l'acustica e le pratiche esecutive, la musica ebbe un ruolo molto importante. Già nella sua opera giovanile "*De arte combinatoria*" (1670), Leibniz affermava che il legame tra musica e matematica è che la struttura numerica sottostante la musica è anzitutto il suo principio costruttivo, intuito come molteplicità organizzata aritmeticamente. La musica avrebbe addirittura il ruolo di dimostrare la struttura armonica dell'universo. Come il bello musicale deriva dall'intuizione di un ordine matematico sotteso alla struttura armonica dell'universo, ciò che determina il piacere sensibile è "*sentire harmoniam*", la quale non è altro che il principio unificatore della varietà.

Leibniz non nega la spontaneità della creazione artistica musicale, ma ritiene che questa sia determinata dall'applicazione più o meno inconscia dei principi regolatori dell'arte musicale da parte di un soggetto, il quale mediante l'ispirazione viene a trovarsi in una sorta di corrispondenza intuitiva con le regole dell'armonia universale di ordine superiore.

In una lettera scritta nel 1712 al matematico tedesco Goldbach, Leibniz scrisse una celebre definizione della musica come aritmetica inconscia, come calcolo inconsapevole: "*Musica est exercitium arithmeticae occultum nescientis se numerare animi*", "La musica è un esercizio occulto dell'aritmetica, nel quale l'anima non si rende conto di numerare".

Un concetto sicuramente non facile da interpretare.

In precedenza Leibniz aveva concordato, col filosofo e matematico Athanasius Kircher, sulla simbolicità del linguaggio musicale in quanto adatto ad esprimere l'ordine dell'universo (essere la musica una lingua universale) e sul concetto di bellezza musicale intesa come percezione della struttura numerica costituente l'armonia.

Come in una composizione musicale la presenza di dissonanze svolge un ruolo fondamentale in quanto crea tensione verso la risoluzione consonante e quindi verso lo sviluppo armonico, così avviene per ogni contrasto interno all'armonia del mondo. *L'ars inveniendi* che guida un compositore sarebbe analoga all'*ars combinatoria* che Dio nell'universo esercita su una varietà infinita di elementi "obbligandoli" matematicamente ad accordarsi tra loro.

Sembra dunque che Leibniz concepisse la musica come un esercizio matematico inconscio attraverso il quale l'uomo, pur gravato dai propri limiti materiali, riesce comunque a cogliere l'intuizione dell'armonia universale, di cui matematica e musica sono rivelatrici in quanto ne costituiscono parte essenziale.

Per Leibniz l'esercizio matematico della musica avviene in modo "occulto", ossia misterioso, il che suggerisce l'espressione di un tentativo inconsapevole dell'uomo di superare con la musica i propri limiti umani per avvicinarsi alla conoscenza dell'assoluto, cioè a Dio.

Viene da chiedersi, quale risposta ciascuno di noi potrebbe dare se venisse interrogato su semplici domande come queste: Perché mi piace tanto la musica? Perché la musica è sempre così bella? Perché la musica piace sempre a tutti?

Il mio convincimento, al termine di questo studio, è che il grande Leibniz, con quella sua enigmatica definizione sopra citata, abbia voluto semplicemente alludere, facendolo però in modo ermetico, all'intuizione di una verità spirituale di cui la musica è evidente espressione e che pure ancora ci sfugge: che cioè la musica, che tutti tanto amiamo perché tocca sempre così profondamente misteriose corde del nostro animo, sia in fondo essa stessa una dimostrazione matematica dell'esistenza dell'anima e, in ultima analisi, dell'esistenza di Dio. E questa è anche una possibile risposta a quelle ipotetiche domande.

Conclusioni

In questo studio ho voluto evidenziare alcuni importanti aspetti del rapporto ormai certo che esiste tra queste due discipline universali, la matematica e la musica, dimostrato dalla presenza della matematica nelle tecniche compositive del linguaggio musicale.

Nel primo capitolo, dopo brevi cenni biografici di J. S. Bach, ho analizzato la struttura matematica di alcune sue famose composizioni, sottolineando la grande importanza che la numerologia sempre assume nelle sue opere, in particolare “*Il Clavicembalo ben temperato*” e “*L’Arte della fuga*”.

Nel secondo capitolo ho esaminato alcuni importanti aspetti della teoria dei grafi, soffermandomi poi brevemente sulla costruzione del toro e sull’immersione di grafi in superfici.

Nel terzo capitolo, facendo riferimento agli argomenti trattati nei primi due capitoli, ho preso in esame i fondamenti matematico-musicali, approfondendo argomenti quali il pentagramma, il basso continuo, l’intervallo, le scale musicali, il temperamento equabile, il ciclo delle quinte, il Tonnetz e le teorie neo-riemanniane.

Bibliografia e sitografia

- 1) R. Vigliotti, Einstein e la Giornata della Memoria, Il Corriere Musicale 2.1.2013
- 2) J.P. Rameau, *Traité de l’harmonie réduite à ses principes naturels*, 1[^] Edition, Paris, 1722
- 3) E. Rescigno, Johann Sebastian Bach, I classici della musica, Skira, RCS, Milano, 2007
- 4) E. Meynell, B. M. Pareto, *Cronaca di Anna Magdalena Bach*, Ed. Passigli, Firenze, 2000
- 5) A. Capri, *Storia della Musica*, Ed. Vallardi – S.E.L., Milano, 1969
- 6) G. Pacchioni, *La pratica musicale*, Ed. Ut Orpheus, Bologna, 1995
- 7) W. Christoph, Johann Sebastian Bach. *La scienza della musica*, Ed. Bompiani, Milano, 2003
- 8) A. Basso, *Frau Musica, vita e opere di J.S. Bach*, Edt/Musica, Torino, 1979
- 9) F. Bottacin, *Corso di teoria dei grafi*, Dip. Matematica, Università di Padova, 2008
- 10) L. Beaudou, *Autour de problèmes de plongements de graphes*. Université Joseph-Fourier - Grenoble, 2009
- 11) <http://maddmaths.simai.eu/.../focus/lincredibile-ubiquita-della-topologia-persistente/>
- 12) A. Gray, E. Abbena, S. Salamon, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, Ed. Chapman and Hall/CRC, 2006
- 13) A. Bretto, A. Faisant, F. Hennecart, *Éléments de théorie des graphes*, Ed. Springer France, 2012
- 14) <http://mathworld.wolfram.com/ToroidalGraph.html>
- 15) J. B. Christensen, *Fondamenti del basso continuo*, Ed. Ut Orpheus, 2003
- 16) K.G. Ferguson, *Musica di Pitagora. Nascita del pensiero scientifico*, Longanesi, Milano, 2009
- 17) N. Poltronieri, *Lezioni di teoria musicale*, Ed. AFM, Roma, 2009
- 18) E. Gubitosi, *Suono e ritmo*, Ed. Curci, Milano, 2003
- 19) E. Pozzoli, *Teoria musicale, I e II corso*, Ed. Ricordi, Milano, 1996
- 20) <https://00110110word.wordpress.com/2013/02/23/il-sistema-temperato-equabile/>
- 21) <http://www.apprendreacomposer.com/comment-enchaîner-les-accords-partie-3-le-cycle-des-quintes/>
- 22) D. Tymoczko, *The Generalized Tonnetz*
- 23) <https://mathemusic.wordpress.com/2013/10/31/bach-meets-euler/>
- 24) http://www.mtosmt.org/issues/mto.07.13.4/mto.07.13.4.reed_bain.html
- 25) R. Cohn, "An Introduction to Neo-Riemannian Theory: A Survey and Historical Perspective"
N.B.: Wikipedia, in italiano, inglese, francese, è stata consultata su tutte le voci