

Ai miei genitori.

Indice

Introduzione	iii
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Linkage	1
1.2 Catene aperte o bracci robotici	3
1.3 Catene chiuse	4
2 I bracci robotici nel piano	5
2.1 Un algoritmo per allineare le catene aperte	5
2.1.1 Moti espansivi e infinitesimali	5
2.1.2 Strut, stress di equilibrio, teorema di Maxwell-Cremona	8
2.1.3 Moto globale	11
2.2 Cenni di altri algoritmi	13
2.2.1 Pseudo-triangolazione	14
2.2.2 Algoritmo con funzione energetica	15
3 Alberi nel piano	18
3.1 Il problema degli alberi	19
3.2 Un albero bloccato	19
3.3 Algoritmo per alberi bloccati	22
3.3.1 Configurazioni con lati sovrapposti	22
3.3.2 Connessione tra rigidità delle configurazioni con lati sovrapposti e alberi bloccati	25
3.3.3 Algoritmo e applicazioni	26
3.4 Alcune proprietà di alberi bloccati	26
3.4.1 Struttura degli alberi bloccati	26
3.4.2 Alberi minimi e alberi ortogonali	28
4 Linkage immersi in tre dimensioni	30
4.1 Linkage nello spazio	30
4.1.1 Bracci robotici	30

4.1.2	Catene chiuse	33
4.1.3	Alberi	37
4.1.4	Cenni al caso 4 dimensionale	37
	Conclusioni	40
	Bibliografia	41

Introduzione

Da molto tempo in geometria si studiano problemi di piazzamento; ne sono esempi notevoli i teoremi di immersioni di Whitney, la teoria degli spezzamenti di Heegaard e l'intera teoria dei nodi. In queste aree di studio si deve individuare l'esistenza e le possibili equivalenze di immersioni di oggetti geometrici in opportuni spazi ambiente. Paradigmatica è la teoria dei nodi in cui ogni nodo è topologicamente una semplice circonferenza, ma ciò che si vuole distinguere è il modo in cui tale circonferenza si presenta come sottospazio topologico della sfera tridimensionale.

Una recente parte della matematica studia le caratteristiche topologiche degli spazi di configurazioni di bracci robotici.

Le due aree di studio hanno una sovrapposizione: si studiano infatti le componenti connesse per archi di spazi di configurazioni di tali bracci, cioè la possibilità o meno di collegare due configurazioni mediante un moto continuo, in particolare senza autointersezioni. Sono stati ottenuti diversi risultati per catene poligonali nel piano e nello spazio e per alberi nel piano.

Questa tesi collega e confronta, in quest'area interdisciplinare, le diverse situazioni, i risultati, i problemi aperti e, dove una soluzione esiste, i diversi algoritmi applicabili. Sono state utilizzate diverse fonti partendo da un interessante libro introduttivo di Micheal Farber arrivando fino ad articoli degli ultimi anni.

Dopo un primo capitolo di notazione e definizioni, il secondo tratta bracci poligonali nel piano, in particolare con metodi tratti dalla fisica matematica; il capitolo tre tratta invece il difficile problema degli alberi nel piano; il quarto capitolo esamina problemi di immersioni di poligonali aperte nello spazio tridimensionale, cioè di una sorta di teoria dei nodi in cui però la rigidità intrinseca delle poligonali rende superflua la usuale identificazione degli estremi.

Capitolo 1

Nozioni preliminari

Dalla teoria classica dei nodi sappiamo che non esistono nodi non triviali formati da circonferenze o archi di circonferenze nel piano. Vale infatti il seguente

Teorema 1.1. *Per ogni curva chiusa $C \subset \mathbb{R}^2$ esiste una isotopia $h_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ che manda C nella circonferenza standard $S^1 = \partial D^2 \subset \mathbb{R}^2$. Analogamente, ogni arco di circonferenza $L \subset \mathbb{R}^2$ è equivalente ad un segmento.*

Cosa succede se invece di archi e circonferenze si cerca di annodare una poligonale? É sempre possibile sciogliere *nodi poligonali* in \mathbb{R}^2 ? Consideriamo una poligonale aperta, ossia una sequenza di segmenti collegati da punti attorno ai quali possono ruotare senza possibilità di sovrapporsi. É stato per molto tempo un quesito aperto capire se fosse possibile portare tutti i segmenti a giacere su una linea retta applicando un movimento che non facesse incrociare i lati. Questo problema, noto con il nome di *Carpenter's rule problem*, è emerso indipendentemente in diversi ambiti matematici tra i quali la matematica discreta e computazionale e teoria dei nodi, è stato studiato anche in biologia molecolare e fisica dei polimeri e trova applicazioni in robotica oltre che in idraulica e in biotecnologia.

1.1 Linkage

Prima di parlare di catene aperte, o *bracci robotici*, introduciamo la nozione più generica di *linkage*, partendo dalla definizione di *grafo pesato connesso*, data in [18].

Definizione 1.1. Un *grafo pesato connesso* è una terna della forma $\mathcal{G} = (V, E, d)$ con

1. un insieme di *vertici* $V = V_{fix} \cup V_{free}$, dove $V_{fix} = \{V_1, \dots, V_m\}$ e $V_{free} = \{V_{m+1}, \dots, V_n\}$
2. un insieme di *lati* $E = \{\{V_{i_1}, V_{j_1}\}, \{V_{i_2}, V_{j_2}\}, \dots, \{V_{i_k}, V_{j_k}\}\}$ dove $i_l, j_l \in \{1, \dots, n\}, i_l \neq j_l, \forall l = 1, \dots, k$ in modo tale che ogni vertice sia collegato a qualunque altro da una sequenza di elementi di E .
3. una funzione *peso* $d : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ che assegna ad ogni lato $\{V_i, V_j\} \in E$ una lunghezza (peso) $d(V_i, V_j) \in \mathbb{R}_+$

Tra tutte le possibili terne, distinguiamo quelle che sono di nostro interesse, ovvero quelle che descrivono un *meccanismo* immerso nel piano.

Definizione 1.2. Sia $\mathcal{G} = (V, E, d)$ un grafo pesato connesso.

1. Il grafo \mathcal{G} è detto *linkage meccanico* se \mathcal{G} è *realizzabile* in \mathbb{R}^2 , ovvero se esiste una mappa $\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}^2, \varphi(V_i) = p_i$ tale che $|p_i - p_j| = d(V_i, V_j)$ per ogni $\{V_i, V_j\} \in E$
2. Una *realizzazione* di \mathcal{G} è un insieme $\{p_1, \dots, p_n\}$ di punti in \mathbb{R}^2 tali che $|p_i - p_j| = d(\{V_i, V_j\})$

Secondo questa definizione esistono quindi grafi che non sono realizzabili in \mathbb{R}^2 . In particolare un esempio può essere il grafo $\mathcal{G} = (V, E, d)$ con

$$V = V_{fix} = \{V_1, V_2, V_3\}, E = \{\{V_1, V_2\}, \{V_2, V_3\}, \{V_1, V_3\}\},$$

$$d : E \longrightarrow \mathbb{R}_+, d(\{V_1, V_2\}) = 1, d(\{V_2, V_3\}) = 5, d(\{V_1, V_3\}) = 3$$

Consideriamo ora i grafi realizzabili. Ognuno di questi può essere rappresentato nel piano con un disegno in cui i punti rappresentano i vertici e i segmenti rappresentano gli elementi di E . Possiamo classificare i linkage in tre tipi diversi:

- catena aperta: una sequenza di vertici e segmenti;
- catena chiusa: una sequenza di vertici e segmenti in cui il primo vertice coincide con l'ultimo;
- alberi: insieme di segmenti e vertici, tra i quali c'è almeno un vertice che è estremo di almeno tre segmenti

1.2 Catene aperte o bracci robotici

In questo capitolo ci occupiamo del caso più semplice di *linkage*, ovvero dei bracci robotici o *catene aperte*. Non esiste una vera e propria definizione di braccio robotico. Spesso vengono usati in articoli diversi gli stessi termini per indicare cose concettualmente simili ma formalmente diverse. Qui si è cercato di formulare una definizione più rigorosa, ispirandosi alle diverse notazioni e definizioni approssimative fornite dagli articoli consultati.

Definizione 1.3. Un braccio robotico è un *linkage meccanico* $\mathcal{G} = (V, E, d)$ in cui ogni vertice è libero ed appartiene ad al più due lati e in cui esistono due vertici che sono estremi di un solo lato.

Una realizzazione φ di un braccio robotico con $n + 1$ vertici nel piano può essere data dalla $(n + 1)$ -pla $\{p_1, \dots, p_{n+1}\}$ di punti del piano, immagini degli V_i , e da un vettore lunghezza $l = (l_1, \dots, l_n)$ in cui $l_k = d(\{V_{i_k}, V_{j_k}\})$, $\forall k = 1, \dots, n$, $\{V_{i_k}, V_{j_k}\}$ lati, in modo tale che

$$|p_i - p_j| = l_i, \quad i = 1, \dots, n - 1 \quad (1.1)$$

Poniamo la nostra attenzione su bracci robotici i cui lati non si sovrappongono aggiungeremo quindi la condizione

$$[p_i, p_j] \cap [p_j, p_{j+1}] = \emptyset, \quad |i - j| > 1, \quad [p_i, p_{i+1}] \cap [p_{i+1}, p_{i+2}] = p_{i+1} \quad (1.2)$$

Non esiste un'unica realizzazione nel piano di un braccio robotico. Posizionando diversamente i vertici è infatti possibile trovare un'altra $(n + 1)$ -pla di punti in \mathbb{R}^2 che soddisfi le condizioni precedenti. L'insieme di tutte le possibili posizioni che il braccio robotico in considerazione può assumere nel piano viene chiamato lo *spazio delle configurazioni* del braccio e si indica con X_l . Un modo alternativo di descrivere una configurazione del braccio robotico è quella di fornire la posizione di uno solo dei vertici della $(n + 1)$ -pla, ad esempio $p_1 \in \mathbb{R}^2$ e i vettori unitari

$$u_i = \frac{p_i - p_1}{|p_i - p_1|}, \quad i = 2, \dots, n$$

Assegniamo quindi la posizione del primo vertice, la lunghezza dei lati e $(n - 1)$ punti sulla circonferenza. Si avrà dunque

$$X_l = \{p = (p_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^2 \times S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1\}$$

ovvero

$$X_l = \{(p_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^2 \times T^{n-1}\}$$

Considerando la situazione in questi termini, il *Carpenter's rule problem* si riduce a chiedersi se X_l è connesso per archi. Si tratta cioè di capire se, date due configurazioni in X_l , è possibile passare dall'una all'altra attraverso un moto continuo del meccanismo che non consenta sovrapposizioni di lati. Se questo fosse vero, infatti, si potrebbe muovere il braccio robotico fino a portarlo alla configurazione $(p_1, 1, \dots, 1)$.

1.3 Catene chiuse

Il problema di allineare un braccio robotico nel piano è strettamente legato all'equivalente per le catene chiuse: la *convessificazione*. Convessificare una catena chiusa significa effettuare un movimento continuo che porti da una configurazione data (senza sovrapposizioni o incroci di lati) ad una che sia il bordo di un poligono convesso. Ci si potrebbe chiedere, quindi, se lo spazio delle configurazioni di una qualsiasi catena chiusa sia connesso per archi, cioè se ogni poligono sia convessificabile. Questo risultato implicherebbe, intuitivamente, che ogni braccio robotico è raddrizzabile. Basta infatti completare opportunamente il braccio fino a farlo diventare una catena chiusa, convessificarlo e iterare il procedimento fino ad ottenere la configurazione allineata dei segmenti che compongono il braccio robotico considerato. Questo argomento è stato ampiamente affrontato al di là della teoria del braccio robotico. Per approfondirlo si veda [1], [15] e [6].

Capitolo 2

I bracci robotici nel piano

Nel piano, vale il seguente teorema, il cui risultato è analogo al Teorema 1.1 e che risponde alla domanda del capitolo precedente:

Teorema 2.1. *Lo spazio delle configurazioni X_l di un braccio robotico è semplicemente connesso. Inoltre, lo spazio quoziente $X_l/SE(\mathbb{R}^2)$, con $SE(\mathbb{R}^2)$ gruppo delle isometrie in \mathbb{R}^2 che mantengono l'orientazione, è contraibile.*

La dimostrazione può essere fatta con tre diversi algoritmi, che indicano come procedere per allineare il braccio robotico. Il primo in ordine di tempo, esposto nel 1999 in una conferenza a Budapest, è descritto dettagliatamente in [14] e utilizza i moti espansivi, la teoria della rigidità (infinitesimal motions) e dal teorema di Maxwell-Cremona. Un modo alternativo viene proposto in [21] da Streinu, che usa pseudo-triangolazioni della *tensengrity*. Infine si può utilizzare un approccio *energetico*, vedi [7].

2.1 Un algoritmo per allineare le catene aperte

Si propone un algoritmo per allineare le catene aperte, seguendo il terzo capitolo di [16]. Per una versione più dettagliata consultare [14].

2.1.1 Moti espansivi e infinitesimali

Un *moto* di un braccio robotico di vertici p_1, p_2, \dots, p_n e caratterizzato dal vettore lunghezza (l_1, \dots, l_n) è una funzione continua

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)), \quad p_i(t) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

tale che $p(0) = [p_1, \dots, p_n]$ e $|p_i(t) - p_{i+1}(t)| = l_i, \forall i = 1, \dots, n - 1$. Tra tutti i moti, vogliamo quelli che non facciano incrociare i lati. Per far questo pos-

siamo imporre che la distanza tra due punti qualsiasi del braccio sia non decrescente durante il tempo. In questo modo, partendo da una configurazione di X_l , in cui non ci sono incroci tra i lati, si avrà che questi aumenteranno o al più manterranno invariata la distanza. Tali moti si chiamano *moti espansivi*. Dato che la lunghezza dei bracci rimane costante nel tempo, si avrà che

$$\frac{d}{dt}|p_i(t) - p_{i+1}(t)| = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

La distanza tra due vertici che non appartengono allo stesso lato, invece, aumenterà o resterà uguale, quindi si avrà

$$\frac{d}{dt}|p_i(t) - p_j(t)| \geq 0, \quad \forall |i - j| > 1.$$

Ma vale

$$\frac{d}{dt}|p_i(t) - p_{i+1}(t)| = 2 \langle v_i - v_{i+1}, p_i - p_{i+1} \rangle = 0$$

con $v_i = \frac{d}{dt}p_i(t)$.

Esprimendo queste condizioni in funzione della velocità si ha quindi

$$\langle v_i - v_{i+1}, p_i - p_{i+1} \rangle = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.1)$$

$$\langle v_i - v_{i+1}, p_i - p_{i+1} \rangle \geq 0, \quad \forall |i - j| > 1 \quad (2.2)$$

Premettiamo il seguente

Lemma 2.2. *Siano p_1, p_2, p_3 punti del piano a due a due distinti e siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ i vettori delle rispettive velocità, tali che*

$$\langle v_2 - v_1, p_2 - p_1 \rangle = 0$$

$$\langle v_3 - v_2, p_3 - p_2 \rangle \geq 0$$

$$\langle v_3 - v_1, p_3 - p_1 \rangle \geq 0$$

Allora vale

$$\langle v_3 - w, p_3 - c \rangle \geq 0$$

dove

$$w = \frac{|c - p_2|}{|p_1 - p_2|} v_1 + \frac{|c - p_1|}{|p_2 - p_1|} v_2$$

è il vettore associato alla velocità di un qualsiasi punto c nell'intervallo aperto (p_1, p_2) .

Per la dimostrazione di questo lemma rimandiamo a [16]. Ora siamo in grado di provare che i moti espansivi permettono movimenti senza intersezioni tra i lati. Vale, infatti, il seguente

Corollario 2.3. *Per ogni moto espansivo, la distanza tra due punti qualsiasi del braccio robotico è non decrescente. In particolare un moto espansivo $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$ che parte da una configurazione iniziale $p(0)$ senza incroci, la mantiene tale.*

Dimostrazione. Sia c un punto sul lato p_1p_2 . Sia p_3 un altro vertice del braccio robotico, allora, dato che $p(t)$ è espansivo, si avrà che la distanza di p_3 da p_1 e p_2 sarà non decrescente durante tutto il moto. Dal Lemma 2.1.1 si ha che anche la distanza tra c e p_3 è non decrescente. Sia ora d un punto sul lato p_4p_5 . Per quanto detto precedentemente, le distanze di c da p_4 e p_5 sono non decrescenti. Applicando il Lemma 2.1.1 al triangolo p_4p_5c si ottiene che anche la distanza tra c e d è non decrescente. É quindi provato che con un moto espansivo, due punti qualsiasi del braccio robotico si allontanano o mantengono la stessa distanza per tutto il tempo e quindi non si hanno intersezioni fra i lati.

□

Ci occupiamo ora di capire quando è possibile effettuare un moto espansivo.

Definizione 2.1. Sia dato un braccio robotico di vertici p_1, \dots, p_n e un moto espansivo di componenti $p_1(t), \dots, p_n(t)$. Un *moto infinitesimale* è un vettore $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ le cui componenti $v_i = \dot{p}_i(0)$ esprimono le velocità dei vertici al tempo $t = 0$.

Un moto espansivo che soddisfi le condizioni (2.1) e (2.2) si dice moto infinitesimale espansivo. Ci chiediamo se sia sempre possibile effettuare una piccola perturbazione che muova localmente la catena in modo che i bracci non si tocchino e che le distanze tra i punti non decrescano. Se questo fosse possibile si potrebbe, sotto certe condizioni, iterare il processo di ricerca di un moto infinitesimale espansivo fino a raddrizzare il braccio robotico. In risposta a questo problema vale il seguente

Teorema 2.4. *Per ogni configurazione $p_1, p_2, \dots, p_n \in X_l$ del braccio robotico esiste un moto infinitesimale espansivo v_1, v_2, \dots, v_n .*

Per provare questo teorema si può rileggere la situazione sotto un altro punto di vista, descritto nel paragrafo successivo.

2.1.2 Strut, stress di equilibrio, teorema di Maxwell-Cremona

Il problema dell'esistenza di un moto infinitesimale espansivo per una catena aperta immersa nel piano può essere riformulato in ambito di teoria della rigidità, analizzando la rigidità della struttura della *tensengrity* ottenuta a partire dal braccio robotico aggiungendo gli *strut*. Una *tensengrity* altro non è che un grafo immerso nel piano tale che ad ogni lato sia assegnato un peso, che nel nostro caso è la lunghezza.

Uno *strut* è un segmento che collega a due a due i vertici che non fanno parte dello stesso lato. A differenza dei lati, che rimangono invariati, gli strut possono aumentare la loro lunghezza o lasciarla costante durante il moto. Indicheremo con $G(p)$ la *tensengrity* ottenuta dalla configurazione $p \in X_l$ di un braccio robotico. Chiamando con L e S rispettivamente gli insiemi dei lati e degli strut di un braccio robotico, e scrivendo $[i, j] \in S$ o $[i, j] \in L$ per indicare che il segmento di estremi p_i, p_j appartiene a S o L rispettivamente, le condizioni (2.1) e (2.2) che descrivono il moto infinitesimale del braccio diventano

$$\langle v_i - v_j, p_i - p_j \rangle = 0, \quad [i, j] \in L \quad (2.3)$$

$$\langle v_i - v_j, p_i - p_j \rangle > 0, \quad [i, j] \in S \quad (2.4)$$

Queste equazioni e disequazioni formano un sistema. Trovare un moto infinitesimale espansivo che raddrizzi la catena aperta significa trovare, se esiste, una soluzione a questo sistema. Per risolverlo è utile applicare la dualità della programmazione lineare risolvendo il problema duale al sistema considerato. Richiamiamo il seguente teorema, che è un caso particolare del Lemma di Farkas-Minkowski.

Teorema 2.5. *Sia $a_i \in \mathbb{R}^N, i = 1, \dots, m$ e sia k un intero $1 \leq k \leq m$. Allora vale solo una delle seguenti condizioni:*

(a) *esiste un vettore $x \in \mathbb{R}^N$ tale che*

$$\langle a_i, x \rangle > 0 \quad \text{per } i = 1, \dots, k,$$

$$\langle a_i, x \rangle = 0 \quad \text{per } i = k + 1, \dots, m.$$

(b) *esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}, \lambda_i \geq 0$ e $\lambda_k > 0$ per almeno un k , tali che*

$$\sum_{i=1}^m (\lambda_i a_i) = 0$$

Questo teorema ci permette trovare una condizione di esistenza per la soluzione del sistema di equazioni e disequazioni (2.3) e (2.4). Infatti ponendo $x = v_1 \oplus \dots \oplus v_n \in \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^2 \oplus \dots \oplus \mathbb{R}^2$ e per ogni $i, j = 1, \dots, n$, $i < j$, $a_{i,j} \in \mathbb{R}^N$ il vettore di i -esima componente e j -esima componente $p_i - p_j$ e $p_j - p_i$ rispettivamente, si ha che il sistema

$$\langle a_{i,j}, x \rangle = 0 \quad [i, j] \in L \quad (2.5)$$

$$\langle a_{i,j}, x \rangle > 0 \quad [i, j] \in S \quad (2.6)$$

ammette una soluzione se e solo se non esiste alcuna funzione che associ ad ogni segmento della struttura un numero reale $\omega_{ij} = \omega_{ji}$, $i \neq j$ tale che

(a) $\omega_{ij} \geq 0$, $[i, j] \in S$

(b) almeno uno tra gli ω_{ij} assegnati ad uno strut è positivo

(c) per ogni $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{j:[i,j] \in L \cup S} \omega_{ij} \cdot (p_j - p_i) = 0 \in \mathbb{R}^2 \quad (2.7)$$

I numeri ω_{ij} sono chiamati *stress*. Associare un peso negativo ad un segmento significa, da un punto di vista meccanico, che questo effettua una spinta sui suoi vertici. Al contrario un peso positivo implica una forza applicata al lato stesso.

Una funzione $\omega : [i, j] \mapsto \omega_{ij}$ che soddisfi (2.7) si dice *stress di equilibrio* (*equilibrium stress*). Uno stress di equilibrio si chiama poi *proprio* se $\omega_{ij} \leq 0 \quad \forall [i, j] \in S$. L'idea è che uno stress di equilibrio proprio impedisce un moto infinitesimale fra i vertici p_i e p_j quando $\omega_{ij} > 0$. Quindi si deduce il seguente teorema, che è equivalente al Teorema 2.4:

Teorema 2.6. *Sia $(p_1, \dots, p_n) \in X_l$ una configurazione di un braccio robotico. Allora $G(p)$ non ammette uno stress proprio di equilibrio.*

L'esistenza di un moto infinitesimale dipende, quindi, dalla non esistenza di uno stress proprio di equilibrio in una data configurazione opportunamente completata da strut. Per capire se è possibile determinare una funzione ω di equilibrio si usa il teorema di Maxwell-Cremona. L'idea è di sollevare la *tensengrity* del braccio robotico nello spazio. Questo si può fare perché per ogni struttura di lati immersa nel piano avente uno stress di equilibrio, esiste una superficie nello spazio i cui lati coincidono con quelli della figura sul piano una volta proiettati ortogonalmente. La struttura da cui si parte per

il sollevamento non ammette però incroci fra segmenti, come accade nella *tensengrity* utilizzata finora. Per ovviare a ciò basta aggiungere un vertice per ogni incrocio. Può succedere che segmenti collineari generino lati sovrapposti, che considereremo fusi in un unico lato. Quest'operazione prende il nome di *planarizzazione* e quello che si ottiene è un grafo planare $G'(p')$. Definiamo lati di $G'(p')$ tutti i segmenti che ricoprono i lati della struttura iniziale e identifichiamo i restanti come strut.

Aggiungere dei vertici non cambia la situazione sugli equilibri. Infatti supponiamo che un lato $[p_i, p_j]$ del grafo iniziale, avente uno stress ω_{ij} , risulti suddiviso in più lati. Allora ciascun nuovo lato, che indicheremo con $[p'_k, p'_l]$ avrà uno stress

$$\omega'_{kl} = \omega_{ij} \cdot \frac{|p_i - p_j|}{|p'_k - p'_l|}$$

quindi la condizione (2.7) rimane vera anche per $G'(p')$. Inoltre se inizialmente si aveva uno stress proprio di equilibrio, lo stesso si avrà in $G'(p')$.

Sollevarre $G'(p')$ in un grafo poliedrico significa considerare un sistema di assi cartesiani xyz , supporre che $G'(p')$ giaccia, ad esempio, sul piano xy ed associare ad ogni vertice una coordinata sull'asse delle z in modo che le immagini dei punti di una faccia di $G'(p')$ siano complanari. Quello che si ottiene è una superficie poliedrica, Γ , grafico di una funzione continua lineare a tratti $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Siano F e F' celle di $G'(p')$.

$$f(x) = \langle a, x \rangle + b, \quad x \in F$$

$$f(x) = \langle a', x \rangle + b', \quad x \in F'$$

con a, a' vettori nello spazio duale di \mathbb{R}^2 e $b, b' \in \mathbb{R}$. Sia ora e il lato che separa le due celle F e F' .

Allora

$$\langle a, x \rangle + b = \langle a', x \rangle + b', \quad \forall x \in e$$

Derivando nel verso di e si ottiene

$$a - a' = \omega_e \cdot e^\perp \tag{2.8}$$

Quando $\omega_e < 0$ il lato si solleva ad una *montagna*, se è positivo ad una *valle*, se invece è $\omega_e = 0$ il sollevamento è piatto nell'intorno del lato.

Teorema 2.7. *La funzione che associa ad ogni lato e uno stress ω_e definita da (2.8) è uno stress di equilibrio per $G(p)$. Inoltre, ogni stress di equilibrio per $G(p)$ può essere costituito da una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, affine su ogni cella di $G(p)$ e sul suo bordo. Tale f è unica a meno di trasformazioni affini.*

Questo teorema, noto come Teorema di Maxwell-Cremona dimostra il seguente:

Teorema 2.8. *Sia $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ l'1-scheletro di un poligono (piano) convesso Y . Sia poi $\gamma \subset \Gamma$ una catena aperta. Chiamiamo lati i segmenti che compongono γ e strut quelli che giacciono nel complementare di γ . Allora non esiste una funzione ω che assegni pesi $\omega_e \in \mathbb{R}$ ai segmenti di Γ tale che:*

- (a) $\omega_e \geq 0 \quad \forall e \in \Gamma$;
- (b) $\omega_e > 0$ per almeno un $e \in \Gamma$;
- (c) per ogni vertice p in Γ vale

$$\sum_q \omega_e(q - p) = 0 \in \mathbb{R}^2$$

con q vertice di Γ collegato a p da un segmento ed $e = [p, q]$.

Dimostrazione. Ragionando per assurdo, supponiamo esista una funzione di stress $e \mapsto \omega_e$ che soddisfi (a), (b), (c). Per il teorema di Maxwell-Cremona $\exists f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua a tratti che è affine sulle celle di Y , zero all'esterno e che determina uno stress uguale a γ . Se così fosse, sia $M \subset \mathbb{R}^2$ l'insieme dei punti di \mathbb{R}^2 in cui f assume un massimo. Allora si può provare che ogni vertice convesso (separa due lati che formano un angolo ottuso) $v \in \partial M$ ha almeno tre lati incidenti. Ma i lati sono, in questo caso, i segmenti che formano il cammino poligonale γ , quindi ogni vertice ha al massimo due lati incidenti. Quindi si ha che ∂M non può avere vertici convessi e quindi M è la parte di piano esterna ad un poligono convesso costituito da lati. Questo però va contro la costruzione di γ , che è una catena aperta. □

Abbiamo quindi finalmente dimostrato che ogni braccio robotico ammette un moto infinitesimale espansivo. Cerchiamo ora di descrivere un moto globale che porti al raddrizzamento del braccio.

2.1.3 Moto globale

Cerchiamo ora di descrivere in modo più dettagliato come avviene il moto globale. Sia \tilde{X}_l lo spazio quoziente $X_l/SE(\mathbb{R}^2)$, dove $SE(\mathbb{R}^2)$ gruppo delle isometrie nel piano, come definito precedentemente. Possiamo considerare \tilde{X}_l come sottoinsieme di T^{n-2} . Infatti non è restrittivo porre il primo lato della catena aperta sull'asse delle x . Una configurazione $p \in \tilde{X}_l$, con

$l = (l_1, \dots, l_{n-1})$, sarà quindi rappresentata dalla sequenza:

$$p_1 = (0, 0), p_2 = (l_1, 0), p_3, \dots, p_n \in \mathbb{R}^2.$$

Un vettore tangente V a \tilde{X}_l in p è una sequenza v_1, v_2, \dots, v_n tali che $v_1 = v_2 = 0$ e $\langle v_{i+1} - v_i, p_{i+1} - p_i \rangle = 0, \forall i = 2, \dots, n-1$.

$$V = (v_3, \dots, v_n) \in T_p(\tilde{X}_l), \quad v_i \in T_{p_i}(\mathbb{R}^2)$$

.

Teorema 2.9. *Esiste un campo vettoriale V tangente al toro T^{n-2} tale che:*

- (a) $\forall p \in \tilde{X}_l \subset T^{n-2}$ il vettore tangente V_p è espansivo
- (b) $V_p \in T_p(T^{n-2})$ è nullo se e soltanto se $p \in T^{n-2}$ è una configurazione in cui almeno due lati si sovrappongono oppure è la configurazione in cui tutti i lati sono allineati, che indicheremo con p_0 .
- (c) V/\tilde{X}_l è C^∞ .

Ora sia dato $p \in \tilde{X}_l$. Consideriamo la soluzione $x(p, t) \in T^{n-2}$ del seguente problema di Cauchy

$$\frac{dx}{dt} = V_x, \quad x(p, 0) = p, \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

Qui $x(p, t)$ è un moto del braccio robotico che parte dalla configurazione iniziale $p \in \tilde{X}_l$. Mostriamo ora che $x(p, t)$ converge a p_0 per $t \rightarrow \infty$.

Vale il seguente

Corollario 2.10. *Per ogni $p \in \tilde{X}_l$, la soluzione $x(p, t)$ appartiene a $\tilde{X}_l \subset T^{n-2}$. Inoltre ogni punto limite dell'insieme $x(p, t)$, $t > 0$ sta in \tilde{X}_l .*

Il campo vettoriale V/\tilde{X}_l è continuo per quanto detto in Teorema 2.9 quindi anche $x(p, t)$ soluzione dell'equazione differenziale (2.9) è una funzione continua in p e t . Sia $F : T^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua

$$F(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i+1 < j} |p_i - p_j|^2$$

L'unico punto critico di $F|_{\tilde{X}_l}$ è $p = p_0$, che è il punto di massimo.

Infatti per ogni configurazione $p \in \tilde{X}_l$ esiste un vettore $V_p \in T_p(T^{n-2})$ con derivata $V_p(F) > 0$, $p \neq p_0$, in quanto varrà $\langle v_i - v_j, p_i - p_j \rangle > 0$ per almeno una coppia di i, j . Sia ora q una configurazione limite della traiettoria $x(p, t); t \geq 0$. Si dimostra che $q \in \tilde{X}_l$. Supponiamo per assurdo che sia $q \neq p_0$. Allora si ha $V_q(F) = \varepsilon > 0$ e $x(p, t) \rightarrow q$ per $t \rightarrow \infty$. Infatti, se così non

fosse, esisterebbe U intorno di q tale che $\forall t > 0, \exists T > 0$ tale che $x(p, t) \notin U, \forall T > t$. Si può scegliere $U_0 \subset U$ intorno di q abbastanza piccolo in modo che la distanza tra U_0 ed il complementare di $T^{n-2} - U$ sia maggiore di un certo $\eta > 0$. Sia poi $C > 0$ tale che $|V_p| \leq C, \forall p \in T^{n-2}$. (Tale C esiste perché esistono campi vettoriali che non si annullano sul toro). Esiste una successione t_n che tende all'infinito tale che $x(p, t_n) \in U_0$ e una successione $T_n > t_n$ tale che $x(p, T_n) \notin U$. Non è restrittivo porre $T_n < t_{n+1}$. Si avrà

$$\eta < \int_{t_n}^{T_n} |\dot{x}| dt = \int_{t_n}^{T_n} |V_{x(p,t)}| dt \leq C \cdot (T_n - t_n)$$

ovvero

$$\frac{\eta}{C} < T_n - t_n$$

Quindi

$$F(x(p, T_n)) - F(x(p, t_n)) = \int_{t_n}^{T_n} V_{x(p,t)}(F) dt > \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{\eta}{C}$$

da cui

$$F(x(p, t_{n+1})) \geq F(x(p, T_n)) \geq F(x(p, t_n)) + \frac{\varepsilon \eta}{2C}$$

Ma questo è assurdo, perché F è superiormente limitata. Quindi $x(p, t) \rightarrow q, t \rightarrow \infty$.

Vediamo ora che q è proprio la configurazione in cui tutti i lati sono allineati. Supponiamo che t sia tale che $x(p, \tau) \in U \forall \tau \geq t$. Per il teorema di Lagrange $\exists \xi, t \leq \xi \leq \tau$:

$$F(x(p, \tau)) - F(x(p, t)) = V_{x(p,\xi)}(F) \cdot (\tau - t) > \frac{\varepsilon}{2} \cdot (\tau - t)$$

che contraddice la limitatezza di F . Quindi $q = p_0$

Abbiamo dimostrato che l'unico punto limite di $x(p, t), t > 0$ è p_0 . Quindi abbiamo mostrato che dato un qualunque braccio robotico immerso nel piano, esiste sempre un moto espansivo che allinea tutti i lati partendo da una configurazione qualsiasi.

2.2 Cenni di altri algoritmi

Quello appena descritto non è l'unico modo per allineare un braccio robotico. In questo paragrafo illustreremo brevemente due approcci alternativi. Il primo utilizza proprietà combinatorie della struttura analizzata, il secondo analizza il moto in modo diretto avvalendosi di un punto di vista energetico.

2.2.1 Pseudo-triangolazione

In [21] Ileana Streinu propone un approccio combinatorio al *Carpenter's rule problem*. Nell'articolo vengono per lo più dati esempi di catene chiuse, ma abbiamo visto che una volta dimostrata la possibile convessificazione di ogni poligono nel piano, si risolve anche il problema di allineamento dei bracci robotici. L'idea è quella di *pseudo-triangolare* la catena chiusa e dimostrare l'esistenza di un moto espansivo che renda convesso il poligono costituito dai lati iniziali, avvalendosi di risultati ottenuti in rigidità. Rimandiamo a [17] per un'analisi più approfondita della teoria della rigidità in ambito combinatorio. Il primo passo è quello di suddividere il poligono in *pseudo-triangoli*, in modo che il numero di segmenti totali sia $2n - 3$, dove n è il numero dei vertici. In questo modo si ottiene una struttura che secondo un teorema fondamentale in teoria della rigidità, il teorema di Leman, è *minimally rigid*, ovvero è rigido ma può muoversi una volta tolto un lato. Introduciamo la definizione di catena convessa, proposta in [2].

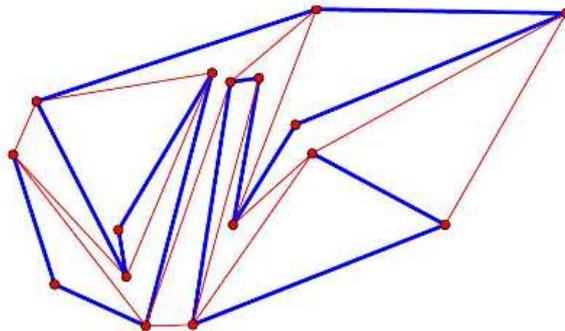


Figura 2.1: Braccio robotico pseudo-triangolato con 16 vertici e 29 lati.

Definizione 2.2. Sia T un triangolo di vertici $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ e sia $X \subset T$ un insieme finito di punti. Un sottoinsieme $Y \subset X$ è una *catena convessa* (in T) da p_0 a p_2 se l'*inviluppo convesso* di $Y \cup p_0, p_2$ è un poligono convesso di $|Y| + 2$ vertici.

Uno *pseudo-triangolo* è un poligono costituito da tre catene convesse unite in modo che il triangolo che ha come vertici i punti di unione delle catene lo contenga interamente. Tra tutte le pseudo triangolazioni, siamo interessati in quelle che preservano l'aciclicità della struttura, ovvero tali che per ogni vertice vale che tutti i segmenti uscenti sono contenuti in un semipiano. Tali triangolazioni si chiamano *minime* e si dimostra che per ogni catena poligonale esiste sempre una pseudo-triangolazione minima. A questo punto togliamo

un segmento, che non sia uno dei lati della catena chiusa originale, ottenendo un *meccanismo pseudo-triangolato* che ammette un movimento espansivo. Quindi seguiamo i seguenti passi dell'algoritmo finché non otteniamo la figura convessificata:

- (a) immobilizziamo un lato qualsiasi e muoviamo il meccanismo nell'unica traiettoria espansiva, considerando uno pseudo triangolo, finché non avviene l'allineamento (questo avverrà proprio per come è stata definita la catena convessa)
- (b) avvenuto l'allineamento, fare un'operazione di *freeze*, se l'allineamento è avvenuto tra segmenti che erano tutti lati, o di *flip* altrimenti, come in Figura 2.2.

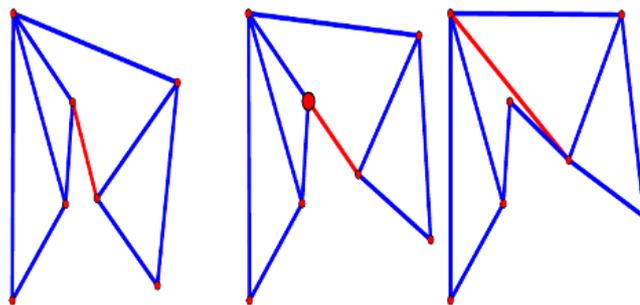


Figura 2.2: Operazione di flip.

Si dimostra che iterando (a) e (b) si mantiene invariata la natura della catena chiusa e si arriva ad una configurazione convessa.



Figura 2.3: Esempio di convessificazione di una catena chiusa tramite algoritmo di pseudotriangolazione.

2.2.2 Algoritmo con funzione energetica

Un altro algoritmo per raddrizzare le catene aperte (o convessificare catene chiuse) nel piano è presentato in [7] ed utilizza un approccio di energia guidata. L'idea di base è quella di definire una *funzione energetica*, $E \in C^2$, che sia

1. *charge*: diventa infinita se i lati della catena si incrociano;
2. *repulsive*: diminuisce con l'allontanarsi reciproco dei vertici e dei lati (moti espansivi);
3. *separable*: le parti connesse, man mano che si allontanano, contribuiscono in modo minore con la loro forza repulsiva al gradiente energetico
4. minima per la configurazione in cui tutti i lati sono allineati;

Un esempio di una funzione energetica su un braccio robotico \mathcal{G} può essere

$$E(\mathcal{G}) = \sum_{[v,w] \text{ lato}, u \notin [v,w]} \frac{1}{(|u-v| + |u-w| - |v-w|)^2}$$

Data una funzione energetica si definisce il moto $p(t)$ del braccio che parte da una configurazione p nel modo seguente

$$p(t) = p - \int_0^t \nabla E(p(t)) dt$$

Il teorema principale in [7] dimostra che, definita una funzione energetica E su una catena aperta soddisfacente le quattro condizioni elencate sopra, il moto dato dal flusso del gradiente di E porta, in un tempo finito, alla configurazione allineata.

Questo metodo può essere applicato anche con alle catene chiuse. Vediamo alcuni esempi che comparano il metodo di energia guidata con quello proposto in [16] e [14]. L'algoritmo proposto in [7] presenta molti vantaggi rispetto ai due precedenti. La funzione del moto è lineare a tratti ed espressa esplicitamente in funzione degli angoli che i segmenti formano con l'asse delle x e che danno una configurazione esatta per ogni $(n-1)$ -pla $(\theta_1, \dots, \theta_{n-1})$. Ci sono inoltre dei grandi vantaggi dal punto di vista computazionale, che è quello che maggiormente interessa gli autori, ed è facile da implementare.

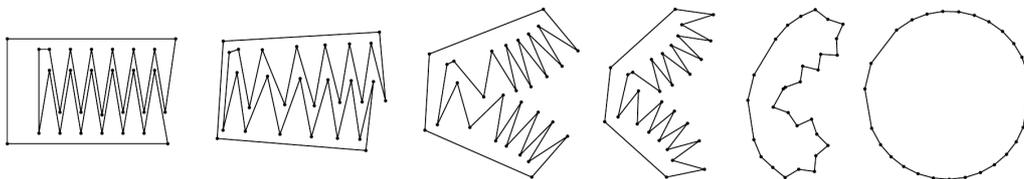


Figura 2.4: Convessificazione con algoritmo di energia-guidata.

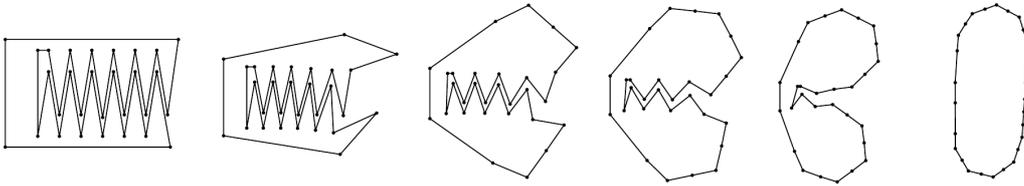


Figura 2.5: Convessificazione con algoritmo di Cantarella-Demaine-Rote.

Può essere interessante confrontare quest'ultimo algoritmo con quello proposto da Cantarella-Demaine-Rote. Si può notare che mentre quello riportato in [14] agisce prima localmente per poi espandersi in modo continuo, l'approccio energetico individua mano a mano le singolarità sciogliendole in modo globale. Considerando la catena chiusa dentata si nota che un algoritmo scioglie un dente alla volta partendo dall'esterno, Figura 2.4, mentre l'altro apre direttamente il nodo della mascella e allarga successivamente tutti i denti contemporaneamente utilizzando la forza repulsiva, Figura 2.5, in modo apparentemente più mirato ed efficace.

Capitolo 3

Alberi nel piano

Finora ci siamo occupati di un caso particolare di linkage, ovvero le catene aperte, o bracci robotici. Abbiamo visto che esiste sempre un movimento nel piano che porta da una configurazione ad un'altra, qualsiasi esse siano fra quelle possibili, ovvero fra quelle che non ammettono sovrapposizioni o intersezioni di lati. In particolare si può sempre portare un braccio robotico alla configurazione che vede tutti i lati che lo compongono allineati su un'unico segmento. Analogamente, qualsiasi catena chiusa può essere resa convessa nel piano.

Lo stesso non vale, però per alcuni casi particolari. Ad esempio, combinando i casi di catene chiuse e aperte, non sempre è possibile convessificare un braccio robotico contenuto in una catena chiusa (vedere [14]).

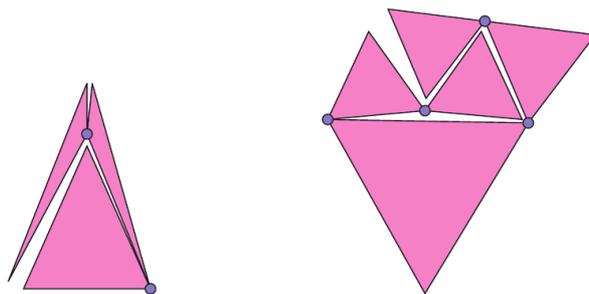


Figura 3.1: Due esempi di catene aperte con forme poligonali attaccate ai lati che hanno spazio delle configurazioni non connesso per archi.

Altri casi di patologie si hanno attaccando figure geometriche ai segmenti di una catena aperta, come analizzato in [12], Figura 3.1, o aumentando il numero di lati incidenti in un vertice. Nei prossimi capitoli analizzeremo in dettaglio quest'ultimo caso.

3.1 Il problema degli alberi

Consideriamo un linkage $\mathcal{G}(V, E, d)$ immerso nel piano. Il numero di lati incidenti in un vertice V_i del linkage si chiama *grado* del vertice. Per la Definizione 1.3, un braccio ha solo vertici di grado due o uno. Attaccando altri segmenti ad uno o più vertici di un braccio robotico si ottiene un albero. Adotteremo questa particolare definizione di albero:

Definizione 3.1. Un *albero* è un linkage senza cicli poligonali (catene chiuse) e con almeno un vertice di grado maggiore di due.

Lo spazio delle configurazioni di un albero, analogamente al braccio robotico, è costituito da tutte le possibili realizzazioni nel piano senza sovrapposizioni o incroci di lati. A differenza delle catene aperte (e chiuse), lo spazio delle configurazioni di un albero può avere più di una componente connessa. Infatti nella dimostrazione del Teorema 2.8 cadrebbe l'ipotesi che in ogni vertice, per come era stato costruito γ , incidono soltanto due lati, avendo l'albero vertici di grado almeno tre. Questo significa che un albero può avere due configurazioni ammissibili che non sono però raggiungibili l'una dall'altra attraverso un movimento continuo dei lati nel piano. Un albero che ha lo spazio delle configurazioni costituito da più di due componenti connesse si dice *bloccato*.

3.2 Un albero bloccato

Diamo ora un esempio di albero il cui spazio delle configurazioni ha più di una componente connessa. In particolare mostriamo due configurazioni che non possono essere collegate da un moto, seguendo la spiegazione data in [5], che utilizza semplici proprietà geometriche dell'albero. L'albero che consideriamo in questo paragrafo è costituito da un centro ed n petali uguali attaccati ad esso, come in Figura 3.2. Intuitivamente si vede che non è possibile portare l'albero alla configurazione appiattita, dato che per aprire un petalo bisognerebbe allargare gli altri, cosa impossibile non essendo ammesse intersezioni tra i lati.

Analizziamo in dettaglio la struttura di un petalo e vediamo quali sono le condizioni dei lati e degli angoli affinché la configurazione sia bloccata. Chiameremo O il punto in cui si incontrano tutti i petali. L'angolo che ciascun petalo forma con il successivo è chiamato *angolo al centro*. Nella configurazione iniziale, la sinistra della Figura 3.2, gli angoli al centro sono tutti congruenti tra loro, $\bar{\theta} = 2\pi/n$. Supponiamo che i lati OA, AB e BC misurino rispettivamente $1, l_1, l_2$. Per bloccare l'albero, occorre che l_1, l_2 siano

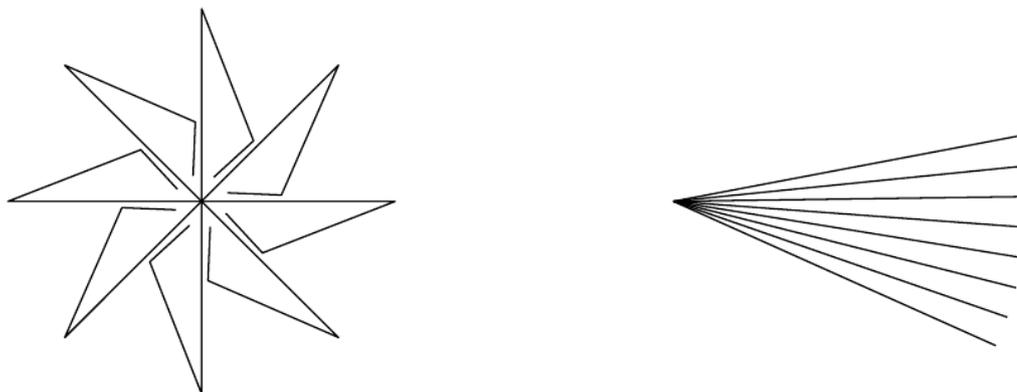


Figura 3.2: Non esiste un moto che porti l'albero dalla configurazione di sinistra a quella appiattita di destra.

lunghe abbastanza da fare in modo che, schiacciando gli altri $n - 1$ petali il più possibile, non sia comunque possibile allungare il braccio restante. Chiamando \mathcal{C} la circonferenza di raggio l_1 centrata in A e indicando con $\beta = \arcsin l_1$ il valore dell'angolo al centro quando \mathcal{C} è tangente ad OA' , si ha che $\beta \in (0, 2\pi)$ e che quando $\theta < \beta$ la circonferenza \mathcal{C} interseca la retta contenente OA' in due punti, sia P quello più vicino ad O . Perché la configurazione sia realizzabile, l_2 non può essere troppo lungo. In particolare, usando la notazione di Figura 3.3, vogliamo che C sia interno al quadrilatero $\square ORBS$ quindi deve valere

$$l_2 < \cos \theta - \sqrt{l_1^2 - \sin^2 \theta}$$

D'altra parte $l_2 > \sin \beta \cos \beta$ e $l_1 + l_2 > 1$ perché il petalo non si apra. Definiamo $\alpha = (2\pi - \beta)/(n - 1)$, che è l'ampiezza dell'angolo al centro che dovrebbero raggiungere gli $n - 1$ petali per far allineare l' n -esimo. Indicando con θ_m il valore minimo che può assumere con un movimento un petalo dell'albero, ovvero l'angolo al centro ottenuto spostando C su O , si verifica che un albero bloccato è tale che $\theta_m > \alpha$.

Tra le configurazioni ammissibili di un albero con una struttura del tipo illustrato in Figura 3.2, chiamiamo *limitate* quelle in cui:

- $\theta < \beta$;
- B si trova sull'arco aperto PQ di \mathcal{C} ;
- C è contenuto nel quadrilatero aperto $\square ORBS$.

Vale il seguente

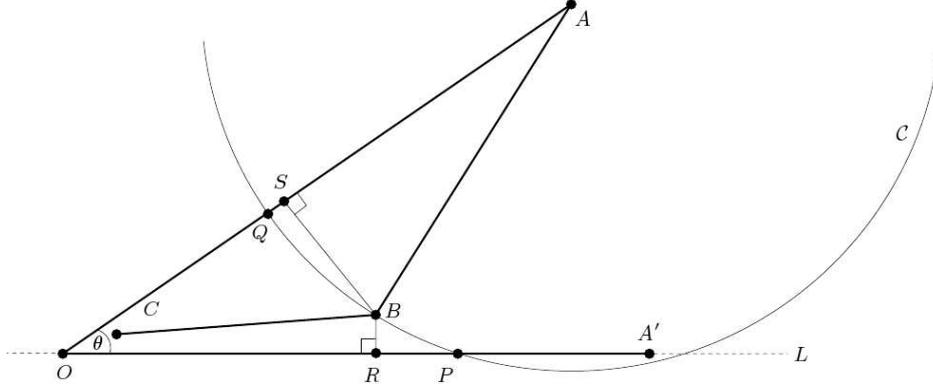


Figura 3.3: struttura di un petalo dell'albero considerato.

Lemma 3.1. *Si consideri un petalo in una configurazione ristretta. Allora $\theta \geq \theta_m$. Inoltre durante tutto il moto in cui $\theta < \beta$, il petalo rimane in una configurazione ristretta.*

Allora si può dimostrare il seguente teorema

Teorema 3.2. *Si consideri un albero costituito da n petali in una configurazione tale che $\theta_i \in (\alpha, \beta)$, $\forall 0 \leq i \leq n$ e ogni petalo sia in una configurazione ristretta. Allora, per ogni movimento, ogni angolo al centro resta nell'intervallo aperto (α, β) .*

Dimostrazione. Si dimostra facilmente che l'intervallo (α, β) è non vuoto in quanto $\alpha < \theta_m < \bar{\theta} < \beta$. Supponiamo ora, per assurdo, che durante un movimento esista un angolo al centro $\theta_i \notin (\alpha, \beta)$. Indichiamo con t_α l'istante in cui un angolo al centro raggiunge α e t_β l'istante in cui un altro angolo al centro diventa β . Se $t_\beta < t_\alpha$, allora al tempo t_β tutti gli angoli al centro sono maggiori di α a parte uno che è β quindi si ha

$$2\pi = \sum_{i=0}^{n-1} \theta_i > (n-1)\alpha + \beta = 2\pi$$

che è una contraddizione, quindi $t_\alpha \leq t_\beta$. Durante il moto le ampiezze degli angoli al centro cambiano in modo continuo, quindi, dato che $\alpha < \theta_m$ e $\theta_k(t) \searrow, t \nearrow$, esisterà t_0 tale che $\theta_k \in (\alpha, \theta_m)$ al tempo t_0 . Ma $t_0 < t_\alpha \leq t_\beta$, quindi al tempo t_0 tutti gli angoli al centro sono più piccoli di β . Per il Lemma 3.1 tutti i petali sono in una configurazione limitata fino al tempo t_0 , quindi, sempre per il Lemma 3.1 applicato al petalo k , si ha $\theta_k \geq \theta_m$, contraddicendo la scelta di t_0 .

□

Questo teorema prova che non esiste un moto continuo che porti l'albero dalla configurazione con tutti i $\theta_i \in (\alpha, \beta)$ ad una *appiattita* come quella a destra in Figura 3.2, in cui i θ_i misurano tutti meno di α . Equivalentemente, esistono almeno due componenti connesse nello spazio delle configurazioni di un albero costituito da n petali, con i lati soddisfacenti le condizioni elencate sopra per una configurazione limitata.

Abbiamo visto, quindi, che per ottenere un albero bloccato occorre imporre delle restrizioni sulle lunghezze dei lati e sulla struttura della figura. Per i bracci robotici e le catene chiuse, invece, non si consideravano né la lunghezza né la forma della configurazione: tutti gli algoritmi lavoravano in modo generico senza distinguere casi particolari.

3.3 Algoritmo per alberi bloccati

In questo paragrafo descriveremo un algoritmo per analizzare se un albero è bloccato. Tale procedimento, descritto in [13], utilizza le proprietà di teoria della rigidità, in particolare la rigidità di primo ordine e gli stress di equilibrio, applicate stavolta ad alberi che ammettono anche configurazioni in cui i lati si sovrappongono. Studiando le proprietà delle *tensengrity* di questi alberi, infatti, si può risalire a risultati su configurazioni senza incroci né sovrapposizioni. Prima di andare a vedere nel dettaglio l'algoritmo proposto da Connelly-Demaine-Rote, introduciamo alcune nozioni generali sulle configurazioni con lati sovrapposti (*self-touching linkages*).

3.3.1 Configurazioni con lati sovrapposti

In una *tensengrity* con lati sovrapposti, ogni segmento è associato ad una molteplicità, che indica il numero di bracci che sono sovrapposti. Una rappresentazione potrebbe essere quella proposta in Figura 3.4, in cui sono evidenziati anche i vari vertici del linkage, con i lati entranti ed uscenti. Durante il moto i vertici possono toccare lati a cui non appartengono, purché non li attraversino.

Studiamo ora le restrizioni sulle configurazioni, necessarie per evitare incroci tra i lati.

- vincolo vertice-lato

Innanzitutto occorre assicurarsi che un vertice vicino ad un lato a cui non appartiene rimanga sempre dalla stessa parte, per fare in modo che non lo attraversi. Più formalmente, siano p_i, p_j di uno stesso lato $[i, j]$ e sia p_k un vertice vicino ad esso. Allora p_k deve restare nello

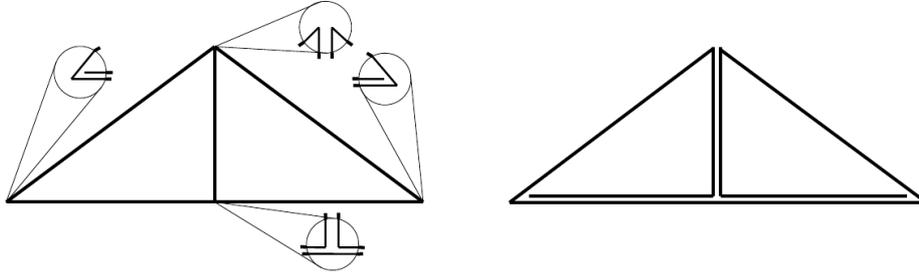


Figura 3.4: esempio di configurazione con sovrapposizioni di lati ricavata da una configurazione semplice.

stesso semipiano individuato da $[i, j]$, o al massimo giacere sul lato. Questa condizione può essere espressa in funzione dell'area del triangolo formato dai tre vertici p_i, p_j, p_k : se p_k si mantiene dalla stessa parte del lato $[i, j]$ l'area rimane positiva.

Indicando con r_0 la più piccola lunghezza dei lati, possiamo scrivere la restrizione formalmente:

$$area(\Delta p_i p_j p_k) \geq 0$$

per ogni p_i, p_j, p_k vertici t.c. $[i, j] \in E$, $d(p_k, [i, j]) \leq r_0/2$ e $|p_k - p_l| \geq r_0/2, l = i, j$.

Questa costrizione si indica con $L(i, j; k)$, con $[i, j]$ lato e p_k vicino al lato.

- vincolo vertice-catena

Può capitare che il vertice p_k sia vicino ad un altro vertice, supponiamo sia p_i . Allora p_k deve stare nel cuneo di ampiezza α individuato dai lati che hanno come vertice p_i , siano $[i, l]$ e $[j, i]$. Parametrizzando in coordinate polari e ponendo $c = \cos(\alpha/2)$, $s = \sin(\alpha/2)$, $r = \|p_k - p_i\|$, si ha

$$p_k - p_i = r \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}^2 \frac{p_j - p_i}{\|p_j - p_i\|}$$

con $s \geq 0$, in modo che p_k sia nella porzione di piano individuata da α . Inglobando i fattori r e la norma nella matrice ed estendendo la

condizione anche al lato $[i, l]$ si ha

$$\begin{cases} p_k - p_i = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^2 (p_j - p_i) \\ p_l - p_i = \begin{pmatrix} \bar{a} & -\bar{b} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^2 (p_j - p_i) \\ a, \bar{a} \in \mathbb{R}, b, \bar{b} \geq 0, a\bar{b} \geq \bar{a}b \end{cases}$$

Anche in questo caso valutiamo tutte le coppie di vertici p_i, p_k che distano tra loro meno di $r_0/2$.

- vincolo lato-lato

Imponendo solo le restrizioni precedenti, però, non si evita il caso di due lati con un vertice comune che scambino la loro posizione reciproca nel piano. Siano $[i, j], [k, l]$ due lati con p_i sovrapposto a p_l . Evitare che i due lati si incrocino significa imporre

$$(L(i, j; k) \wedge L(i, j; l)) \vee (L(k, l; i) \wedge L(k, l; j))$$

per tutti i lati $[i, j], [k, l]$ con $\|p_i - p_l\| < r_0/2$.

Queste tre condizioni sono sufficienti a descrivere lo spazio dei moti possibili di un meccanismo qualsiasi, in particolare di un albero, con lati sovrapposti, in un intorno di una configurazione.

Per analizzare i moti infinitesimali, occorre tradurre queste restrizioni in vincoli sulle velocità dei vertici. In particolare si ha, dal vincolo vertice-lato

$$(p_i - p_j)^\perp \cdot v_k + (p_j - p_k)^\perp \cdot v_i + (p_k - p_i)^\perp \cdot v_j \geq 0,$$

che si indica con $L'(i, j; k)$, per evidenziare il fatto che sia il derivato di $L(i, j; k)$. Rimandiamo a [13] per un'analisi dettagliata dei possibili casi e delle singolarità. Un altro modo di interpretare $L'(i, j; k)$ può essere quello di aggiungere un vertice ausiliario p_l sulla perpendicolare a $[i, j]$ per p_k che si colleghi con due lati a p_i e p_j e con uno strut a p_k , per impedire il passaggio di p_k attraverso il lato, come in Figura 3.5. In [13] vengono presentati ulteriori modi di completare la configurazione con lati sovrapposti, ad esempio sostituendo ogni strut descritto sopra con un lato che permetta al punto p_k di muoversi anche sul lato $[i, j]$.

In ogni caso si ha che la struttura ottenuta è infinitesimalmente rigida, o rigida, se e solo se la configurazione iniziale con lati sovrapposti era infinitesimalmente rigida, o rigida.

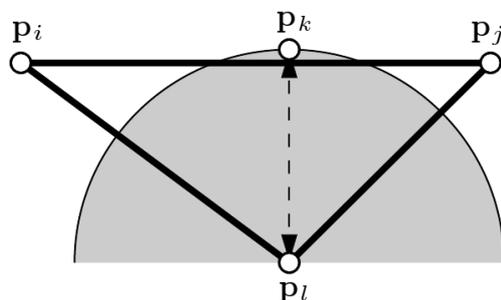


Figura 3.5: una costruzione con aggiunta dei lati $[i, l]$ e $[l, j]$ e dello strut $[k, l]$ di lunghezza zero.

3.3.2 Connessione tra rigidità delle configurazioni con lati sovrapposti e alberi bloccati

Per analizzare la rigidità di alberi nel piano si può studiare la corrispondente configurazione con lati sovrapposti, descritta nel paragrafo precedente, considerando la configurazione semplice come una perturbazione di quest'ultima. Più formalmente

Definizione 3.2. Una δ -perturbazione di una configurazione con lati sovrapposti è un riposizionamento dei vertici, in un disco di raggio δ centrato nei vertici originari, che lascia invariata la descrizione combinatoria originale.

Una δ -perturbazione permette ai lati di modificare le loro lunghezze in un margine di 2δ . E' ancora da dimostrare se data una qualunque configurazione con lati sovrapposti e per ogni $\delta > 0$ esista una δ -perturbazione che sia una configurazione semplice, in [13] si ipotizza di sì.

Sappiamo che un albero si dice bloccato se il suo spazio delle configurazioni ha più di una componente connessa, diversamente si dice flessibile. In questa nuova ottica diamo un'ulteriore definizione di configurazioni bloccate.

Definizione 3.3. Una configurazione con lati sovrapposti si dice *bloccata entro* ε se non esiste un cammino nello spazio delle configurazioni dell'albero che possa uscire da un intorno di raggio ε .

Definizione 3.4. Una configurazione con lati sovrapposti si dice *bloccata in senso forte* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$, tale che per ogni δ -perturbazione è bloccata entro ε .

Dalla teoria della rigidità si ha che se una tensengrity è infinitesimalmente rigida, ovvero se non permette moti infinitesimali diversi da quelli banali,

allora è rigida. Lo stesso vale per tensesgrity che sono configurazioni con lati sovrapposti di alberi nel piano. Vale inoltre il seguente teorema, per la cui dimostrazione rimandiamo a [13].

Teorema 3.3. *Se una configurazione con lati sovrapposti è rigida, allora è bloccata in senso forte.*

3.3.3 Algoritmo e applicazioni

Andiamo adesso ad elencare in modo informale i passi dell'algoritmo proposto da Connelly-Demaine-Rote per provare che un albero, o un linkage in generale, è bloccato in senso forte.

1. Costruire la configurazione dell'albero come δ -perturbazione di una configurazione con lati sovrapposti
2. Controllare se la configurazione con lati sovrapposti è infinitesimalmente rigida:
 - (a) verificare che la struttura ottenuta aggiungendo strut di lunghezza zero come descritto nel paragrafo precedente sia infinitesimalmente rigido
 - (b) provare che non esiste uno stress di equilibrio proprio per la configurazione con lati sovrapposti
3. Se la configurazione è infinitesimalmente rigida, allora è bloccata in senso forte, quindi perturbazioni vicine alla configurazione originale saranno bloccate entro ε positivo, scelto a piacere

Come espresso in [13], il principale lato positivo di questo algoritmo è che il secondo e terzo passo possono essere fatti in modo automatico, dopo aver intuito la configurazione a lati sovrapposti associata alla configurazione data. Un limite è che il test è conservativo: un albero che è infinitesimalmente flessibile può essere bloccato in senso forte e anche se la configurazione con lati sovrapposti non è bloccata in senso forte. Resta ancora aperto il problema di calcolare la complessità di stabilire se un particolare linkage sia bloccato o no, ma questo algoritmo rimane buono per molti esempi.

3.4 Alcune proprietà di alberi bloccati

3.4.1 Struttura degli alberi bloccati

L'algoritmo appena descritto viene usato da Connolly-Demaine-Rote per dimostrare ulteriormente che l'albero ad n petali presentato nel primo para-

grafo è bloccato nel piano. Non è ancora chiaro se esistano delle condizioni proprie dell'albero che possano definire a priori il numero di componenti connesse dello spazio delle configurazioni e trovare una classificazione delle varie tipologie di alberi è difficile in quanto sono ancora molti i problemi aperti e ancora adesso vengono formulate o smentite congetture a riguardo. Di certo una struttura regolare a petali è quasi sempre bloccata sotto certe condizioni sui lati e sugli angoli, come visto nell'esempio, mentre una costruzione casuale sembra quasi sempre aprirsi, come quello in Figura 3.6

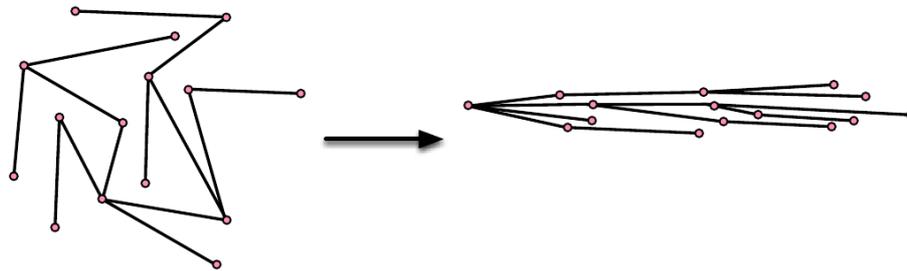


Figura 3.6: esempio di albero con una struttura non a n petali che può essere appiattito.

In [3] vengono illustrati alcuni esempi di alberi con struttura a petali¹, che riportiamo in Figura 3.7.

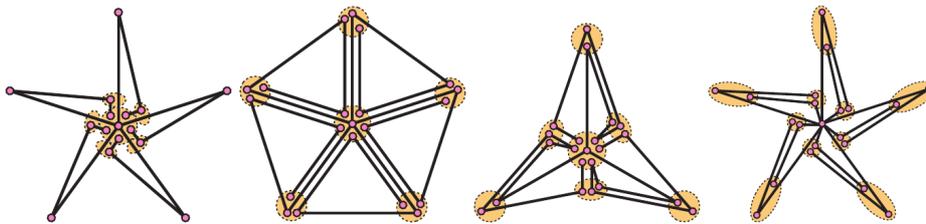


Figura 3.7: alcuni esempi di alberi bloccati con struttura regolare a petali.

Ci chiediamo quindi se esista un vincolo nella forma dell'albero per renderlo bloccato o se esistano alberi che abbiano una configurazione che non sia in alcun modo simmetrica ma che siano bloccati.

¹Si può notare che il terzo degli alberi in figura ha un vertice di grado tre, che è l'unico che abbia grado maggiore di due. Questo dimostra ulteriormente che il Teorema 2.1 vale soltanto per le catene, in quanto è sufficiente un solo vertice di ordine tre per far sì che lo spazio delle configurazioni possa non essere connesso per archi.

3.4.2 Alberi minimi e alberi ortogonali

La risposta affermativa sembra trovarsi in [3] e [9] in cui vengono forniti alcuni esempi di alberi che non hanno struttura a petali. In particolare viene descritto l'albero bloccato avente il numero minimo di lati, mostrato in Figura 3.8.

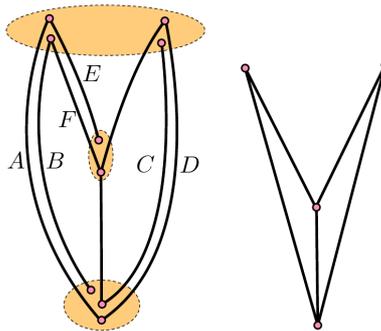


Figura 3.8: Albero di otto lati nella configurazione con lati sovrapposti a destra e in una δ -perturbazione a sinistra.

Si dimostra che l'albero in figura è rigido applicando i seguenti lemmi, presi da [12] e riportate da [3]

Lemma 3.4. *Se un lato b è in un δ -intorno di un altro lato b' di uguale lunghezza e altri due lati incidenti in b' agli estremi formano con esso un angolo minore di $\pi/2$ dalla stessa parte di b , allora ogni moto del linkage deve mantenere b e b' nella stessa posizione reciproca per un intervallo di tempo positivo.*

Lemma 3.5. *Se un lato b si trova in un δ -intorno di un lato b' , incidente ad esso e della stessa lunghezza, che forma con un altro lato incidente b'' un angolo convesso attorno a b , allora ogni moto deve mantenere b e b' nella stessa posizione reciproca per un intervallo positivo di tempo.*

Allora, usando le notazioni di Figura 3.8, si ha che i lati A e B devono rimanere fermi, così come C e D per il Lemma 3.4 e analogamente i lati E e F devono rimanere reciprocamente fermi per il Lemma 3.5. A questo punto si ha che la configurazione è come quella a destra di Figura 3.8, che è banalmente rigida, avendo quattro vertici e cinque lati, quindi l'albero considerato è bloccato in modo forte. Si può dimostrare che questo è l'albero bloccato con il minimo numero di lati. Ci chiediamo se quello presentato in figura è anche l'unico albero di otto lati bloccato che sia possibile realizzare o se è possibile costruirne altri.

Si è visto anche che è possibile costruire alberi che abbiano angoli ai vertici tutti retti, contrariamente a quanto aveva ipotizzato Shueng-Hung Poon in [20].

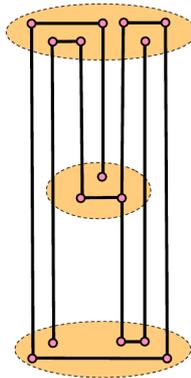


Figura 3.9: Albero bloccato ortogonale

Quello proposto in Figura 3.9 è la versione ad angoli retti dell'albero con otto lati esaminato in precedenza. Altri esempi di alberi ortogonali possono essere visti in [9]. Un'altra ipotesi smentita riguarda l'esistenza di alberi bloccati equilateri, ovvero con lati tutti della stessa lunghezza. In [3] viene dato un esempio di albero bloccato con lati unitari attaccati al centro da bracci di raggio 2, mentre in [5] si propone un albero quasi equilatero di bracci al centro unitari.

Al di là della forma che una configurazione può assumere, il punto cruciale che rende un albero bloccato resta il grado dei vertici, che è superiore a due. Può essere interessante osservare in Figura 3.10 come può essere convessificato un poligono che abbia una forma simile a quella di un albero bloccato.

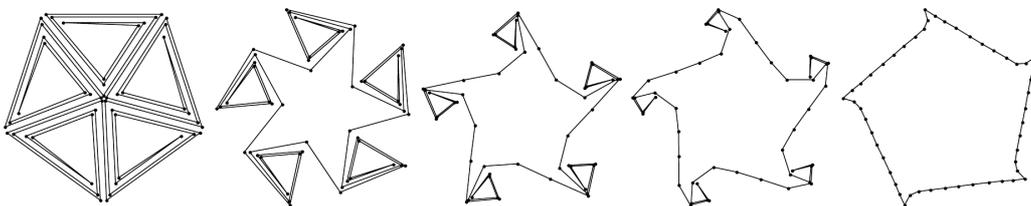


Figura 3.10: convessificazione con metodo Cantarella-Demaine-Rote di una catena chiusa la cui configurazione ricorda quella di un albero bloccato ad n petali.

Capitolo 4

Linkage immersi in tre dimensioni

Finora abbiamo analizzato i linkage nel piano distinguendoli in catene aperte, catene chiuse ed alberi e studiando il loro spazio delle configurazioni, in particolare il numero di componenti connesse per archi di cui erano formati.

In questo capitolo illustreremo brevemente cosa succede immergendo le diverse tipologie di linkage in dimensioni superiori a due.

4.1 Linkage nello spazio

In questo primo paragrafo ci occuperemo di linkage immersi nello spazio, vedendo sotto quali condizioni bracci robotici e catene chiuse possono bloccarsi.

4.1.1 Bracci robotici

Nello spazio, a differenza del piano, non vale il Teorema 2.1. Questo significa che non tutti i bracci robotici possono essere raddrizzati nello spazio. In [4] vengono definite due famiglie di catene aperte che possono essere allineate nello spazio: catene aperte con proiezione semplice e catene giacenti su un poliedro.

Analizziamo il primo caso. Si dice che una catena aperta ha una *proiezione semplice* se la sua proiezione ortogonale su un piano è una catena aperta, che si trovi in una configurazione semplice, ovvero senza sovrapposizioni o incroci di lati. Usando la notazione di [4], sia P' la proiezione semplice di una catena P di vertici p_0, \dots, p_n . Indichiamo le proiezioni dei vertici p'_0, \dots, p'_n

come in Figura 4.1. Per ogni vertice p'_i , consideriamo il cilindro costituito da

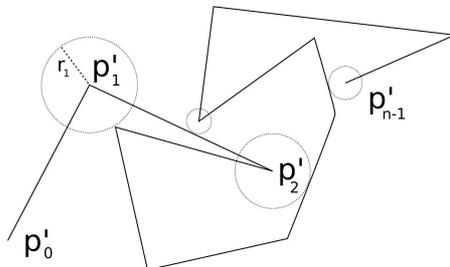


Figura 4.1: Proiezione semplice di una catena aperta.

una circonferenza basata in p'_i , di raggio tale da non intersecare lati diversi da quelli incidenti in v'_i , con asse perpendicolare al piano di proiezione. Per raddrizzare P si raggruppano tutti i lati in modo da renderli complanari e stretti a fisarmonica. Indichiamo, come in Figura 4.2, il lato $[i, i + 1]$ con e_{i+1} e con e'_{i+1} la sua proiezione. Il primo passo è quello di muovere e_0 , facendolo ruotare attorno a p_1 sul piano passante per e_0 e e'_0 , indicato con Π_0 . Una volta entrato in C_1 , si ruota il segmento attorno all'asse del cilindro fino a portarlo su Π_1 , come illustrato in Figura 4.2a.

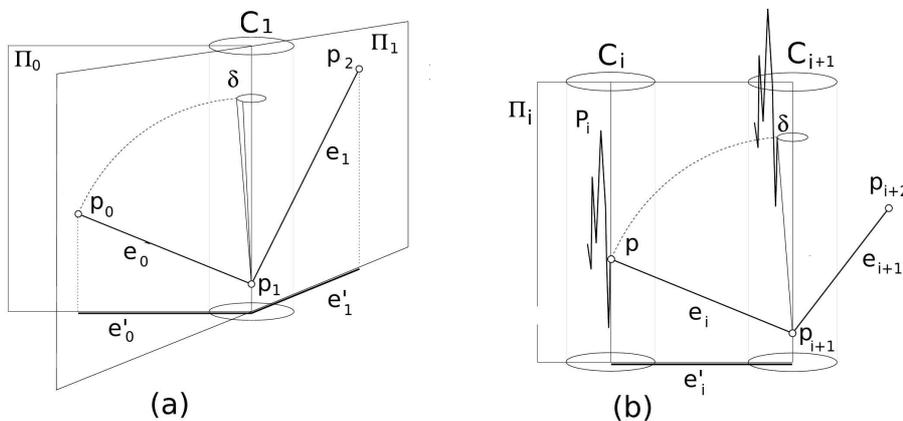


Figura 4.2: (a) Rotazione di e_0 attorno a v_1 su Π_0 e successiva rotazione in C_1 fino a Π_1 . (b) i -esimo passo: la catena P_i si muove mantenendosi perpendicolare al piano di proiezione.

Indichiamo con P_i la catena di vertici p_0, \dots, p_i . All' i -esimo passo di questo procedimento si avrà, come illustrato in Figura 4.2b, che la catena P_i sarà contenuta in C_i e i lati che la compongono complanari. Una volta effettuata

l'ultima rotazione, si può passare ad allineare un segmento alla volta partendo da un vertice in modo progressivo fino ad ottenere la catena P raddrizzata in $O(n)$ mosse. Analogamente si procede per allineare una catena che si trova su un politopo convesso, sostituendo il piano di proiezione con la superficie del politopo e gli assi dei cilindri con le perpendicolari alle facce. Più in dettaglio, se p_i è un vertice di P , allora basterà portare con una rotazione la catena P_i sulla normale a una delle facce che toccano p_i , scelta arbitrariamente. Si nota facilmente che le catene aperte con proiezione semplice rappresentano un caso particolare della seconda famiglia di catene aperte raddrizzabili analizzata. Come per gli alberi nel piano, per le catene aperte immerse nello spazio il fatto di poter essere allineati o no dipende in qualche modo da alcune condizioni sui lati. Consideriamo il seguente esempio di braccio robotico P in tre dimensioni, rappresentato in Figura 4.3.

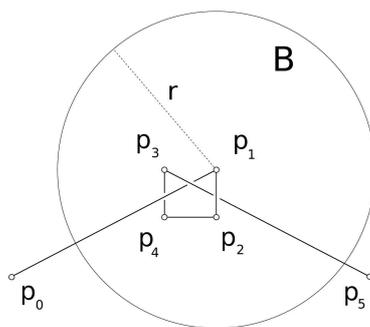


Figura 4.3: Braccio robotico bloccato.

Il braccio P ha vertici p_0, \dots, p_5 . Indicando con l_1, \dots, l_5 le lunghezze dei lati contati a partire dal vertice p_0 , si ha che

$$l_1 > l_2 + l_3 + l_4; \quad l_5 > l_2 + l_3 + l_4. \quad (4.1)$$

La configurazione della Figura 4.3, detta a ferri da calza, non può essere portata con un moto nello spazio nella configurazione raddrizzata. Infatti consideriamo la sfera B centrata in p_1 di raggio r , con $l_2 + l_3 + l_4 < r < l_5 - (l_2 + l_3 + l_4)$. Un raggio r così fatto esiste per (4.1). Non è restrittivo immobilizzare p_1 al centro di B per quanto visto nel capitolo 2. Allora si ha che qualunque movimento della catena manterrà i vertici p_1, p_2, p_3, p_4 in B e i vertici p_0 e p_5 fuori da B . Esiste sempre una catena aperta K congiungente p_0 a p_5 costituita da segmenti molto corti e lunga abbastanza da non impedire alcun movimento del braccio e tale che unita con il segmento $[p_0, p_5]$ non formi un nodo. $K \cup P$ formano una versione poligonale del nodo trifoglio. Se P si potesse sciogliere si avrebbe che $K \cup P$ potrebbe essere convessificato,

dato che i vertici p_0 e p_5 , che uniscono P a K che è convessa, non entrano mai dentro B , entrando in contraddizione con il fatto che $K \cup P$ è il nodo trifoglio. Cadendo le ipotesi sulle lunghezze dei lati, si avrebbe un braccio robotico raddrizzabile. In [8] si dimostra infatti il seguente

Teorema 4.1. *Lo spazio delle configurazioni di una catena aperta di cinque lati (l_1, \dots, l_5) ha tre componenti connesse se $l_1, l_5 \geq l_2 + l_3 + l_4$ e una componente connessa altrimenti. Nel primo caso, una componente connessa contiene la configurazione allineata, mentre le altre due contengono due versioni non isotopiche del nodo: quella sinistra e quella destra.*

Il teorema descrive il caso analizzato di braccio a ferri da maglia, ma la dimostrazione fornita in [8] è più complessa. Questo significa anche che non è possibile costruire catene bloccate che abbiamo solo cinque lati di lunghezza unitaria. Un altro risultato interessante offerto da Cantarella-Johnston in [8] è il seguente

Teorema 4.2. *Lo spazio delle configurazioni di una catena aperta di n lati è connesso per archi indipendentemente dalla lunghezza dei lati per ogni $n < 5$.*

Rimane ancora aperto il problema di esistenza di catene aperte bloccate con lati unitari per $n > 5$. In conclusione nello spazio, a differenza del piano, esistono catene aperte bloccate, sotto alcune condizioni sui lati, per numero o lunghezza.

4.1.2 Catene chiuse

Nel piano ogni catena chiusa può essere resa convessa. Lo stesso non può avvenire nello spazio. Per quanto detto precedentemente sulle catene aperte, infatti, risulta intuitivo che unendo gli estremi di un braccio robotico non raddrizzabile si otterrà un poligono non convessificabile. In questo paragrafo analizzeremo meglio alcuni esempi, riportati in [4],[8],[22].

Iniziamo duplicando il braccio robotico K in Figura 4.3. Si aggiungano quattro vertici p'_1, p'_2, p'_3, p'_4 in un intorno abbastanza piccolo dei vertici p_1, p_2, p_3, p_4 e li si congiunga come in Figura 4.4. Quello che si ottiene è una catena K' chiusa di dieci lati immersa nello spazio.

Dimostriamo ora che è bloccata.

Se non lo fosse, esisterebbe un moto che la renderebbe convessa. Questo vorrebbe dire che, rimuovendo da p_0 e p_5 la copia di K , avremmo trovato un moto che porti la catena K alla configurazione allineata, in contraddizione al Teorema 4.1. Potrebbe essere un problema interessante calcolare il numero di componenti connesse dello spazio delle configurazioni di K' . Abbiamo quindi

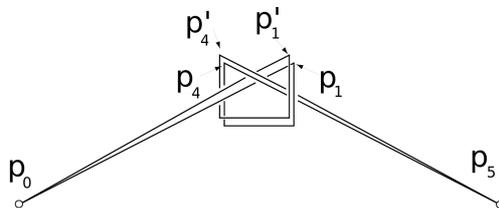


Figura 4.4: Poligono ottenuto dalla duplicazione di un braccio robotico bloccato.

trovato in modo empirico un poligono di dieci lati non convessificabile. Ci chiediamo ora se esistano poligoni con meno lati che non possano essere resi convessi, in particolare vogliamo sapere qual è il numero minimo di lati per cui una catena chiusa può bloccarsi. Per il Teorema 4.2 si ha che un braccio robotico di n lati, con $n < 5$, non può bloccarsi. In [8] una catena poligonale viene considerata un caso particolare di una catena aperta, quindi il risultato può essere esteso anche ai poligoni. D'altra parte possiamo immaginare una catena poligonale a stella, quindi di cinque lati, bloccata nello spazio.

In [8] e [22] si studiano le catene chiuse di 6 lati. Usando la notazione di Cantarella-Johnston, chiamiamo $Pol_6(l_1, \dots, l_n)$ lo spazio delle configurazioni di una catena chiusa di sei lati di lunghezze rispettive $l_i, i = 1, \dots, 6$ e semplicemente con Pol_6 lo spazio delle configurazioni di una catena chiusa di sei lati di lunghezza arbitraria.

Da [22] vale il seguente

Teorema 4.3. *Esistono l_1, \dots, l_6 tali che $Pol_6(l_1, \dots, l_6)$ abbia almeno cinque classi di configurazioni.*

Quindi esistono almeno quattro modi di bloccare una catena di sei lati nello spazio, dato che una classe rappresenta la configurazione convessa.

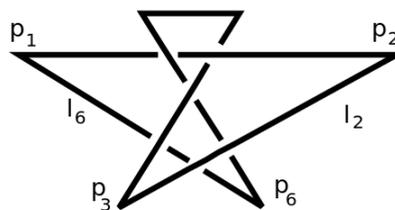


Figura 4.5: Catena poligonale di sei lati bloccata nello spazio.

La prima classe di configurazione annodata viene proposta da Cantarella-Johnston in [8]. La catena chiusa considerata è quella in Figura 4.5.

Per dimostrare che è annodata, Cantarella si avvale della teoria delle trecce e delle stringhe. Una stringa, dalla teoria classica dei nodi, è una serie di archi che connettono due piani paralleli in \mathbb{R}^3 . Un'isotopia tra stringhe è un movimento dei vertici sul piano di appartenenza che porta una stringa nell'altra.

Per prima cosa costruiamo la treccia corrispondente al poligono dato. Come al solito non è restrittivo immobilizzare un lato della catena chiusa per analizzare lo spazio delle configurazioni, sia il lato $[p_1p_2]$. Consideriamo due piani paralleli passanti per i vertici p_1 e p_2 , a questo punto il poligono sarà sempre contenuto nella parte di spazio compresa tra i due piani. Inoltre, per come è costruita la catena, si avrà che il vertice p_3 si troverà sotto al vertice p_6 durante qualsiasi movimento. Non è quindi restrittivo sostituire i lati $[p_1p_6]$ e $[p_2, p_3]$ rispettivamente con due segmenti A, B , opportunamente lunghi, che intersechino i due piani in altri due punti. In questo modo si ha una coppia di stringhe poligonali annodate, vedi Figura 4.6.

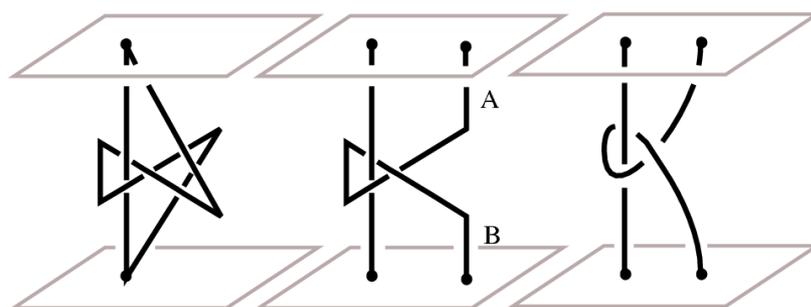


Figura 4.6: Corrispondenza tra il poligono considerato e una coppia di stringhe.

A questo punto, la teoria classica dei nodi applicata alle stringhe ci dice che unendo con un arco le coppie di vertici appartenenti allo stesso piano si ottiene un nodo trifoglio, Figura 4.7.

Questo intuitivamente mostra come il poligono di partenza sia bloccato. Affinché il vertice p_3 si trovi sempre sotto al vertice p_6 e si possa effettuare la cruciale sostituzione con i lati A e B , si deve imporre la seguente condizione sui lati

$$(l_3 + l_4)^2 < l_1 l_2 - l_1^2/2$$

dove gli l_i indicano le lunghezze dei lati a partire da p_1 . Per una dimostrazione più rigorosa si rimanda a [8].

Questo risultato può essere esteso a Pol_n , sostituendo un segmento con una catena, in modo da rispettare la condizione sui lati.

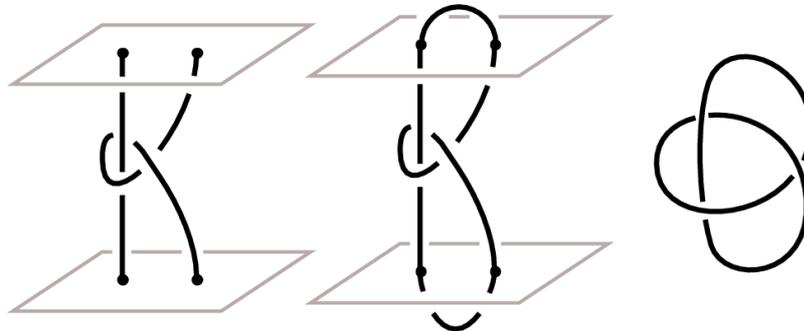


Figura 4.7: Nodo trifoglio ottenuto dalla treccia di stringhe.

Tre anni dopo la pubblicazione di Cantarella-Johnston, Toussaint in [22] illustra un'altra classe di poligoni di sei lati nello spazio che non può essere resa convessa, Figura 4.8.

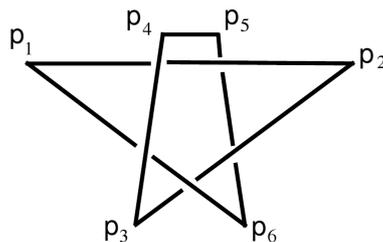


Figura 4.8: Configurazione bloccata di un poligono di sei lati.

Il poligono in figura è bloccato, infatti se così non fosse si avrebbe che togliendo uno qualsiasi dei lati, si otterrebbe una catena aperta raddrizzabile. Togliendo il lato $[p_1p_2]$ si ha però la catena a ferri da maglia, di figura 4.3, che abbiamo visto essere bloccato. Si ha inoltre che questa configurazione non può essere nemmeno portata a quella proposta da Cantarella in Figura 4.5. Infatti se così fosse, anche togliendo un lato ad entrambe le catene chiuse si dovrebbero ottenere due catene aperte riconfigurabili, ma si vede che togliendo il lato $[p_1p_2]$ al poligono in Figura 4.5 e il lato $[p_1p_2]$ al poligono in Figura 4.8 si ottiene da una parte un linkage raddrizzabile, mentre nel secondo caso, come appena visto, un braccio bloccato. In conclusione si hanno almeno cinque classi in Pol_6 date da: configurazione convessa, configurazione di Cantarella-Johnston, configurazione di Toussaint e le due versioni speculari di queste ultime.

4.1.3 Alberi

Abbiamo visto che gli alberi sono l'unica tipologia di linkage capace di bloccarsi nel piano. Anche nello spazio mantengono questa caratteristica; sono pochi però, a differenza del caso planare, gli esempi e le proprietà degli alberi immersi nello spazio studiate in letteratura. L'unico esempio concreto di albero bloccato nello spazio è quello di Figura 4.9, fornito da Sheung-Hung Poon in [19].

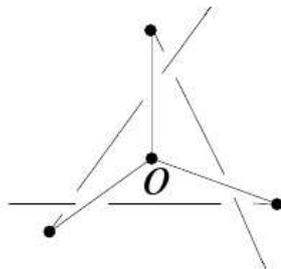


Figura 4.9: Albero di diametro 4 in configurazione bloccata nello spazio.

Anche in questo caso, come avveniva nel piano, lo spazio delle configurazioni dell'albero è non connesso per archi solo imponendo delle condizioni sulla lunghezza lati. Si dimostra infatti che la versione unitaria dell'albero in Figura (4.9) può essere riconfigurata nella configurazione allineata, Figura 4.10.

In (4.10) Poon congettura che non esistano alberi unitari che si bloccano nello spazio.

4.1.4 Cenni al caso 4 dimensionale

Aumentando ulteriormente la dimensione dello spazio in cui sono immersi i linkage si ha che vale il seguente

Teorema 4.4. *Lo spazio delle configurazioni di ogni catena aperta, di ogni catena chiusa e di ogni albero immersi in uno spazio di dimensione $d \geq 4$ è connesso per archi.*

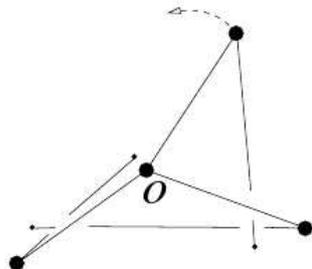


Figura 4.10: Albero immerso nel piano non bloccato.

L'idea alla base della dimostrazione è che in 4 dimensioni, o più, non è possibile ingabbiare un segmento tra altri. Prendiamo ad esempio il caso del braccio robotico in figura (4.3). Il lato $[p_0p_1]$ non è completamente libero di muoversi perché il moto è ostacolato dagli altri quattro segmenti che compongono il linkage. Immobilizziamo il punto p_0 e costruiamo una sfera S^2 centrata in esso di raggio la lunghezza del lato. Ogni punto della sfera rappresenta una configurazione di p_1 , ma non tutte sono raggiungibili dal vertice, in quanto il braccio è bloccato. Proiettando da p_0 su S^2 gli altri lati del braccio si ottiene una rete di geodetiche che segna la parte di spazio in cui il vertice p_1 è confinato. Procedendo analogamente in 4 dimensioni si ha che la sfera di centro p_0 è una S^3 . Le proiezioni dei lati del braccio sulla sfera, che sono 1-dimensionali, sono sempre unidimensionali come prima, ma stavolta i gradi di libertà di p_1 sulla sfera sono 3 invece di due, quindi il punto non è più ingabbiato e può raggiungere ogni configurazione possibile. In altre parole il braccio può essere allineato. Lo stesso discorso vale immergendo il braccio in uno spazio di dimensione $d \geq 4$.

Rimandiamo a [10] per una trattazione più approfondita dell'argomento e una descrizione dettagliata degli algoritmi di allineamento dei bracci in dimensione $d \geq 4$.

In conclusione si ha

	catene aperte	catene chiuse	alberi
2D	non si bloccano	non si bloccano	possono bloccarsi
3D	possono bloccarsi	possono bloccarsi	possono bloccarsi
$d \geq 4$	non si bloccano	non si bloccano	non si bloccano

Ci chiediamo, quindi, se ci sia una connessione tra la dimensione degli oggetti considerati e quella dell'ambiente in cui sono immersi per cui lo spazio delle configurazioni possa dirsi connesso per archi o meno. In altre parole sarebbe interessante trovare degli oggetti di dimensioni maggiori o uguali a due che possano in qualche modo bloccarsi in uno spazio di dimensione $d \geq 4$.

Conclusioni

La presente tesi ha esplorato un'affascinante area di sovrapposizione fra le teorie del piazzamento geometrico e lo studio delle configurazioni di bracci robotici. Sono stati esaminati, confrontati e commentati diversi approcci, problemi e soluzioni nelle tre aree relative a bracci poligonali nel piano, alberi nel piano e bracci poligonali nello spazio tridimensionale.

Bibliografia

- [1] O. Aichholzer, E. Demaine, J. Erickson, F. Hurtado, M. Overmars, M. Soss, G.T. Toussaint, *Reconfiguring convex polygons*, Computational Geometry 20:85-95 (2001)
- [2] G. Ambrus, I. Barany, *Longest convex chains*, Random Structures and Algorithms,35 (2009), no. 2, 137–162.
- [3] B. Ballinger, D. Charlton, E.D. Demaine, M. L. Demaine, J. Iacono, C.H. Liu, S.-H. Poon, *Minimal Locked Trees*, Proceedings of the 11th International Symposium on Algorithms and Data Structures, pag. 73-85, 2009
- [4] T. Biedl, E. Demaine, M. Demaine, S. Lazard, A. Lubiw, J. O'Rourke, M. Overmars, S. Robbins, I. Streinu, G. Toussaint, and S. Whitesides. *Locked and unlocked polygonal chains in three dimensions*, Discrete & Computational Geometry, 26(3):283–287, October 2001. The full version is Technical Report 060, Smith College, 1999, and arXiv:cs.CG/9910009, <http://www.arXiv.org/abs/cs.CG/9910009>.
- [5] T. Biedl, E. Demaine, M. Demaine, S. Lazard, A. Lubiw, J. O'Rourke, S. Robbins, I. Streinu, G. Toussaint, S. Whitesides, *On Reconfiguring Tree Linkages: Trees Can Lock*, Arxiv preprint cs/9910024, 1999
- [6] T.C. Biedl, E.D. Demaine, S. Lazard, S. M. Robbins, M.A. Soss, *Convexifying Monotone Polygons*, Lecture notes in computer science, pag. 415-424, 1999
- [7] J.H. Cantarella, E.D. Demaine, H.N. Iben, J.F. O'Brien, *An Energy-Driven Approach to Linkage-Unfolding*, in Symposium of Computational Geometry, 2004
- [8] J. Cantarella, H. Johnston, *Nontrivial embeddings of polygonal intervals and unknots in 3-space*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications, vol. 7, No 8(1998):1027-1039

-
- [9] D. Charlton, E.D. Demaine, M.L. Demaine, *A Locked Orthogonal Tree*, Arxiv preprint arXiv:0801.4405, 2008
- [10] R. Cocan, J. O'Rourke, *Polygonal Chains Cannot Lock in 4D*, Proc. 11th Canad. Conf. Comput. Geometry, Vancouver, 1999, pag. 5-8, reperibile anche in arXiv:cs/9908005v3 [cs.CG] 20 Feb 2001
- [11] R. Connelly, *Expansive motions*, Preprint 2006
- [12] R. Connelly, E.D. Demaine, M.L. Demaine, S.P. Fekete, S. Langerman, J.S.B. Mitchell, A. Ribò, G. Rote, *Locked and Unlocked chains of planar shapes*, Proceedings of the 22nd Annual ACM Symposium on Computational Geometry, pag. 61-70, Sedona, Arizona, Giugno 2006
- [13] R. Connelly, E.D. Demaine, G. Rote, *Infinitesimally Locked Self-Touching Linkages with Applications to Locked Trees*, Discrete and Computational Geometry, 30(5), 205-239, 2003.
- [14] R. Connelly, E. D. Demaine, G. Rote, *Straightening Polygonal Arcs and Convexifying Polygonal Cycles*, Discrete and Computational Geometry 30(2003):205-239
- [15] H. Everett, S. Lazard, S. Robbins, H. Schröder, S. Whitesides, *Convexifying Star Shaped Polygons*, Montreal, Canada, Agosto 1998, <http://cgm.cs.mcgill.ca/cccg98/proceedings/cccg98-everett-convexifying.ps.gz>.
- [16] M. Farber, *Invitation to Topological Robotics*, Zurich Lecture Notes in Advanced Mathematics, European Mathematical Society, 2008
- [17] J. Graver, B. Servatius, H. Servatius, *Combinatorial Rigidity*, Amer. Math. Soc., Graduate Studies in Mathematics vol. 2, 1993
- [18] D. Jordan, M. Steiner, *Configuration Spaces of Mechanical Linkages*, Discrete and Computational Geometry, 22(1999):297-315
- [19] S-H Poon, *On Straightening Low-Diameter Unit Trees*, in Revised Papers from the 13th International Symposium on Graph Drawing, LNCS 3843, pag 519-521, Limerick, Ireland, Settembre 2005
- [20] S.H. Poon, *On unfolding lattice polygons/trees and diameter-4 trees*, Proceedings of the 12th Annual International Computing and Combinatorics Conference, pag. 186-195, 2006

-
- [21] I. Streinu, *A combinatorial approach to planar non-colliding robot arm motion planning*, in Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundation of Computer Science, Redondo Beach, California, pages 443-453, November 2000
- [22] G. Toussaint, *A New Class of Stuck Unknots in Pol_6* , *Contributions to Algebra and Geometry*, vol. 42 (2001), No. 2: 301-306

Ringraziamenti

Se state leggendo queste righe significa che è successo davvero. E se è successo davvero, non posso fare a meno di ringraziarvi. Da sola non ce l'avrei mai fatta.

Ringrazio i miei genitori, Grazia e Pèlo, per avermi permesso di fare questa esperienza, per avermi sostenuto e per chiedermi, recidivi, di continuarla e mio fratello Luigi per il suo affetto e per aver vissuto un'esperienza all'estero al posto mio..

Ringrazio il mio relatore Massimo Ferri per la sua disponibilità e per la fiducia che mi ha dimostrato.

Ringrazio Silvia, Vanna e Gianluca per averci creduto, spesso al posto mio. Ringrazio il dipartimento, tutto: dall'atrio all'ottavo piano non c'è persona alla quale non abbia chiesto aiuto e che non me l'abbia dato. In particolare ringrazio Andrea, Jacopo, Diego, il Pier, FedeDidio, Eugenio e tutti quelli a cui ho promesso una cena. Ringrazio anche Eliana e i tecnici del laboratorio. Ringrazio i miei coinquilini, Davide e Andrea, perché solo loro sanno cosa significa vivere con una come me sotto tesi e anche Luca e Flavio per la pazienza e i consigli.

Ringrazio Fede(rico) per seguirmi anche da lontano e per non avermi sempre capito.

Ringrazio la mia Mila, al secolo Annalisa, credo l'unica non matematica che mi abbia ascoltato ripetere prima degli esami.

Ringrazio tutti i miei compagni di teatro che mi trattano come una cucciola, seguendomi passo passo, in particolare Franco, Anna, Dan, Riccardo, Albert, Cia e la Frency.

Ringrazio Laura, le mie amiche marchigiane Francesca e Marta e la vecchia formazione di Pensione Cerrè per i tanti ricordi.

Ringrazio Punta Negra, il mare, il catamarano e il mirto, indispensabili per la preparazione di alcuni esami.

Ringrazio la musica, i libri, il teatro, Istanbul, i Peanuts, Youtube e tutti i diversivi che sono riuscita a trovare in questi anni.

Infine ringrazio me per aver sciolto questi nodi, di malinconia.