Supergeometria e Geometria non commutativa

Rita Fioresi, Bologna 6 Maggio 2011

La visione di Riemann dello Spazio

Mi pare che la nozione empirica sulla quale e' basata la determinazione metrica dello Spazio, il concetto di corpo solido e di raggio di luce, perdano la loro validita' nell'infinitamente piccolo. E' pertanto ragionevolmente concepibile che le relazioni metriche dello Spazio nell'infinitamente piccolo non siano conformi alle ipotesi della geometria; e infatti uno dovrebbe assumere questo non appena cio' permette un modo piu' semplice di spiegare i fenomeni.

Riemann, "Sulle ipotesi che stanno alla base della geometria", Discorso inaugurale a Gottinga, 1854.

Visione moderna del concetto di spazio tempo

Scala di Planck:

$$10^{-33}\ cm \qquad 10^{-43}\ sec$$

In questo ordine di grandezze, non e' possibile misurare nulla. I modelli convenzionali non possono dare una descrizione dei fenomeni.

La geometria dello spazio alla scala di Planck e' certamente non commutativa:

$$[p, q] = ihI$$

e non ci sono i punti come li concepiamo

Fino ad oggi non esiste una teoria geometrica convincente che abbia la geometria di Riemann-Einstein come suo limite nell'infinitamente piccolo.

Lo Spazio Quantico

Stati del sistema: vettori unitari in uno spazio di Hilbert H. Possiamo dare solo una probabilita' che il sistema si trovi in un dato stato, la misurazione e' soltanto *statistica*.

Simmetrie del sistema (interne o locali): biezioni di H che conservano la misura della probabilita', sono date da operatori *unitari*.

Simmetrie dello spazio tempo (globali): la descrizione del sistema non deve dipendere dall'osservatore. Si chiede quindi l'invarianza per il gruppo di Poincare' (gruppo di Lorentz e traslazioni).

Geometria non commutativa

Lontano dall'essere una sterile opposizione la dualita' tra algebra e geometria diventa estremamente feconda quando diventano alleate nell'esplorare terre sconosciute, come nella nuova geometria algebrica della seconda meta' del ventesimo secolo o nella geometria non commutativa: le due presenti frontiere per la nozione di spazio

Alain Connes (Medaglia Fields 1982), "A View of Mathematics", 2005.

Descrizione di uno spazio geometrico classico

- Spazi topologici compatti di Hausdorff. Le funzioni continue (a valori in $\mathbb{C}$) $C(M)$ sono un'algebra di Banach con la norma sup. Esiste un'involuzione $f \mapsto f^*$ con $f^*(x) = \overline{f(x)}$ che rende $C(M)$ una C^*-*algebra*. In generale una C^*-*algebra* e' un'algebra A di Banach dotata di una involuzione che soddisfa la proprieta': $\|f\|^2 = \|f^* f\|$.

  Teorema di Gelfand-Naimark (1943) *Ogni C^*-algebra commutativa A e' isometricamente isomorfa ad $C(M)$ algebra delle funzioni continue su M spazio compatto di Hausdorff.*

  Lo spazio topologico M e' ricostruito a partire dai caratteri di A, cioe' dai morfismi suriettivi $A \longrightarrow \mathbb{C}$.

Varieta' differenziabili e algebriche

- Varieta' differenziabile reale M di classe C^∞. M e' completamente descritta dall'algebra (commutativa) delle sue funzioni globali.
  Teorema di Milnor. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali massimali di $C^\infty(M)$ e i punti di M.*
- Varieta' algebrica affine M (complessa). M e' completamente descritta dall'algebra (commutativa) delle sue funzioni regolari globali.
  Hilbert Nullstellensatz. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra gli ideali massimali di $\mathcal{O}(M)$ e i punti di M.*

In entrambi i casi, l'algebra commutativa delle funzioni globali su M ci permette di ricostruire sia lo spazio topologico, che il fascio.

Vocabolario di Geometria non commutativa

Spazio X	Algebra di funzioni $\mathcal{O}(X)$
Omeomorfismo	Isomorfismo
Sottospazio chiuso	Ideale
Gruppo G	Algebra di Hopf $\mathcal{O}(G)$
Azione	Coazione

Il piano quantico di Manin

L'algebra dei polinomi in due variabili $\mathbb{C}[x, y]$ descrive il piano affine in geometria algebrica.

Definiamo *piano quantico* l'algebra non commutativa:

$$\mathbb{C}_q^2 := \mathbb{C}_q\langle x, y\rangle / (xy - q^{-1}yx)$$

ove $q = e^h$ e $\mathbb{C}_q := \mathbb{C}[q, q^{-1}]$.

Il piano affine e' il limite classico del piano quantico:

$$\mathbb{C}_q\langle x, y\rangle / (xy - q^{-1}yx) \xrightarrow{h \to 0} \mathbb{C}[x, y]$$

Il piano quantico ammette una coazione naturale delle matrici quantiche.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_q^2 & \longrightarrow & M_q(2) \otimes \mathbb{C}_q^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

I Gruppi Quantici

Esiste una coazione di $M_q(2)$ sull'algebra grassmanniana quantica:

$$\wedge_q^2 := \mathbb{C}_q\langle \xi, \eta \rangle / (\xi^2, \eta^2, \xi\eta + q\eta\xi)$$

$$\begin{array}{ccc} \wedge_q^2 & \longrightarrow & GL_q(2) \otimes \wedge_q^2 \\ \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} \xi & \eta \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \end{array}$$

Possiamo definire il *determinante quantico* $d_q = ad - q^{-1}bc$ e osservare che:

$$\xi\eta \mapsto \xi\eta \otimes (ad - q^{-1}bc)$$

d_q e' centrale. Pertanto possiamo definire i gruppi quantici generale e lineare e speciale lineare.

$$GL_q(2) = M_q(2)[d_q^{-1}], \qquad SL_q(2) = M_q(2)/(d_q - 1)$$

Teoria sviluppata da Manin, Faddeev-Reshetekhin-Taktajan.

Supergeometria

Ci sono due tipi fondamentali di particelle elementari:

- bosoni, spin intero (es. fotoni)
- fermioni, spin semintero (es. neutroni, elettroni)

Principio di esclusione di Pauli: due elettroni (fermioni) all'interno dello stesso sistema non possono occupare lo stesso stato quantico.

Se H rappresenta lo spazio di Hilbert i cui vettori sono stati di un elettrone, se ho n elettroni lo stato del sistema e' descritto da $\wedge^n H$.

Poiche' al contrario i bosoni non debbono soddisfare lo stesso requisito avremo che lo stato di un sistema con n bosoni e' dato da $\otimes^n H$.

Supersimmetria

In alcuni sistemi fisici e' possibile osservare fenomeni in cui particelle vengono create e annichilate:

elettrone $+$ positrone $\longrightarrow$ fotone

fotone $\longrightarrow$ elettrone $+$ positrone

Pertanto e' necessario avere simmetrie che permettano di scambiare fermioni e bosoni cioe' *supersimmetrie*.

Classicamente si richiede che lo spazio tempo debba essere invariante secondo il gruppo di Poincare'. Se ammettiamo supersimmetrie e' necessario richiedere l'invarianza rispetto al *supergruppo di Poincare'*.

Supergeometria Lineare

- **Superspazio vettoriale**: $V = V_0 \oplus V_1$.
  Esempio: $k^{m|n} := k^m \oplus k^n$, superspazio di dimensione $m|n$.
- **Superalgebra**: superspazio vettoriale con prodotto che rispetti la parita'.
- **Superalgebra commutativa**: $ab = (-1)^{p(a)p(b)} ba$.
  Prototipo di superalgebra commutativa: la superalgebra dei polinomi.

$$k[x_1 \dots x_m, \xi_1 \dots \xi_n] = Sym(x_1 \dots x_m) \otimes \wedge(\xi_1 \dots \xi_n)$$

- **Supermoduli**: moduli su superalgebre commutative.
  $A^{m|n} := A \otimes k^{m|n}$ A-modulo libero di dimensione $m|n$.
  $A_0^{m|n} := A_0 \otimes k^m \oplus A_1 \otimes k^n$
  $A_1^{m|n} := A_0 \otimes k^n \oplus A_1 \otimes k^m$

Il Supergruppo Generale Lineare

Supergruppo Generale Lineare $GL(m|n)(A)$: e' il gruppo delle trasformazioni invertibili che conservano la parita' del modulo libero $A^{m|n}$:

$$GL(m|n)(A) := \left\{ \phi : A^{m|n} \longrightarrow A^{m|n}, \ \phi \text{ invertible } \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & \xi \\ \eta & y \end{pmatrix} \right\}$$

Il fatto che ϕ preservi la parita' e sia invertibile equivale a:
• x, y matrici invertibili a blocchi con coefficienti in A_0.
• ξ, η matrici con coefficienti (nilpotenti) in A_1.

$GL(m|n)$ e' un funtore *rappresentabile*.

$GL(m|n)$: (salg) $\longrightarrow$ (sets), $GL(m|n)(A) = Hom(k[GL(m|n)], A)$.

(salg) $=$ categoria delle superalgebre commutative
(sets) $=$ categoria degli insiemi

Il Bereziniano

$$Ber\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = det(D)^{-1}det(A - BD^{-1}C)$$
$$= det(A)^{-1}det(D - CA^{-1}B)$$

Ber gode della proprieta' moltiplicativa, cioe' e' un morfismo di gruppi, $Ber : GL(m|n)(R) \longrightarrow R^*$

$$Ber(XY) = Ber(X)Ber(Y)$$

Si noti che la matrice

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

e' invertibile se e solo se A e D sono invertibili, poiche' B e C sono nilpotenti (formate da elementi nilpotenti).

Il concetto di Superspazio e Supervarieta'

Un *superspazio* $S = (|S|, \mathcal{O}_S)$ e' uno spazio topologico $|S|$ con un fascio di superalgebre $\mathcal{O}_S$ tali che il germe del fascio $\mathcal{O}_{S,x}$ sia una superalgebra locale.

Un superspazio e' una *supervarieta' differenziabile* se e' localmente isomorfo al superspazio $\mathbb{R}^{p|q}$, cioe' come spazio topologico e' $\mathbb{R}^p$ e il suo fascio strutturale e'

$$C^\infty_{\mathbb{R}^p} \otimes \wedge(\xi^1 \dots \xi^q).$$

Un superspazio e' un *superschema* se il suo spazio topologico corrisponde allo spazio topologico di uno schema X_0 e il suo fascio strutturale e' un fascio quasicoerente di $\mathcal{O}_{X_0}$ moduli.

Esempi: $k^{m|n}$, $GL(m|n) \subset M(m|n)$.

Il Funtore dei punti in supergeometria

Ad ogni superspazio, supervarieta' e superschema possiamo associare il *funtore dei punti* che caratterizza completamente il relativo spazio geometrico.

- Supervarieta' differenziabili. Definiamo il funtore dei punti di M come:

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{smflds}) & \xrightarrow{h_M} & (\mathrm{sets}) \\ T & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{(\mathrm{smflds})}(T, M) \quad = \mathrm{Hom}_{(\mathrm{salg})}(\mathcal{O}(M), \mathcal{O}(T)) \end{array}$$

- Supervarieta' algebriche. Definiamo il funtore dei punti di M come:

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{sschemes}) & \xrightarrow{h_M} & (\mathrm{sets}) \\ T & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{(\mathrm{sschemes})}(T, M) \end{array}$$

Il Gruppo Generale lineare

Esempio rivisitato: $GL(m|n)$.

- Caso differenziabile.

$$GL(m|n)(T) = \mathrm{Hom}_{(\mathrm{salg})}(C^\infty(x_{ij}) \otimes \wedge(\xi_{kl})[u^{-1}, v^{-1}], C^\infty(T))$$

$$u = det(x_{ij})_{1 \leq i,j \leq m}, \qquad v = det(x_{ij})_{m+1 \leq i,j \leq n}$$

- Caso algebrico.

$$GL(m|n)(T) = \mathrm{Hom}_{(\mathrm{salg})}(k[x_{ij}, \xi_{kl}][u^{-1}, v^{-1}], \mathcal{O}(T))$$

Il Funtore dei punti

Lemma di Yoneda *Esiste una corrispondenza biunivoca tra le trasformazioni naturali tra i funtori dei punti delle supervarieta' M e N e i morfismi tra le supervarieta'.*

Rappresentabilita'. Quand'e' che un funtore $F : (\text{sschemes}) \longrightarrow (\text{sets})$ (o anche $F : (\text{smflds}) \longrightarrow (\text{sets})$) e' rappresentabile?

Topologie di Grothendieck (1960). Generalizzano la nozione di spazio topologico e ricoprimento aperto in modo categoriale. Pensate per la geometria algebrica classica, sono abbastanza generali da comprendere la supergeometria e dare una risposta al problema della rappresentabilita'.

Morfismi tra supervarieta': Supersimmetrie

L'approccio tramite il funtore dei punti e' il piu' naturale per descrivere i morfismi.

Esempio:

$$\begin{array}{cccc} \phi_T: & \mathbb{R}^{1|2}(T) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{1|2}(T) \\ & t & \mapsto & t+\theta_1\theta_2 \\ & \theta_1 & \mapsto & \theta_1 \\ & \theta_2 & \mapsto & \theta_2 \end{array}$$

- Supervarieta' differenziabili. **Teorema della carta**. *Esiste una biezione tra i morfismi tra superdomini $\mathbb{R}^{m|n} \longrightarrow \mathbb{R}^{p|q}$ e l'insieme dell $p+q$-uple $(t_1 \dots t_p, \theta_1 \dots \theta_q)$ di funzioni in $\mathcal{O}(\mathbb{R}^{m|n})$.*
- Supervarieta' algebriche. **Teorema.** *Esiste una equivalenza categoriale tra superschemi affini su k e k-superalgebre commutative. In altre parole, i morfismi tra due superschemi (supervarieta') $X \longrightarrow Y$ corrispondono biettivamente ai morfismi tra le superalgebre delle loro funzioni regolari globali: $\mathcal{O}(Y) \longrightarrow \mathcal{O}(X)$.*

Supergruppi e Gruppi Quantici

- Supergruppi: Supervarieta' con una struttura di gruppo. Nel caso differenziabile e algebrico affine abbiamo

$$\text{Supergruppi} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Superalgebre di Hopf}$$

- Gruppi Quantici:

$$\text{Gruppi Quantici} \quad \longleftrightarrow \quad \text{Algebre di Hopf}$$

  Attenzione: per i gruppi quantici non e' disponibile il funtore dei punti!

Spazi omogenei

Classicamente se G e' un gruppo (di Lie o algebrico) e H un suo sottogruppo chiuso, esiste un'unica struttura di varieta' (differenziale o algebrica) su G/H che verifica la proprieta' universale:

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl] \arrow[d] \\ K & G/H \arrow[l] \end{tikzcd}$$

In supergeometria possiamo porci la stessa domanda.

Teorema(F.-Lledo-Varadarajan, 2007). *Sia G un supergruppo di Lie, H un sottogruppo di Lie chiuso. Allora sullo spazio topologico G/H esiste un'unica struttura di supervarieta' differenziabile che gode della proprieta' universale.*

Caso algebrico: Problema aperto (soluzione proposta da A. Masuoka, A. Zubkov).

Bibliografia

Geometria Non Commutativa in generale:

- A. Connes, *A View of Mathematics*, www.alainconnes.org, (2005).
- A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, (1994).
- Yu. Manin *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer, (1984).

Gruppi Quantici

- Chari V. Pressley A. *A guide to quantum groups*, Cambridge University Press, (1994).
- Yu. Manin *Quantum groups and noncommutative geometry* CRM, (1988)
- L. Faddeev., N. Reshetikhin, L. Takhtajan, *Quantization of Lie groups and Lie algebras*, Leningrad Math. J. 1 (1990).

Bibliografia

Supergeometria

- F. A. Berezin. *Introduction to superanalysis*. D. Reidel Publishing Company, Holland, 1987.
- F. A. Berezin., Leites, *Supermanifolds*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, Vol. 224, no. 3, 505–508, 1975.
- D. A. Leites, *Introduction to the theory of supermanifolds*, Russian Math. Surveys **35**: 1 (1980), 1-64.
- B. Kostant. Graded manifolds, graded Lie theory, and prequantization. *Differential geometrical methods in mathematical physics* (Proc. Sympos., Univ. Bonn, Bonn, (1975), pp. 177–306. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 570, Springer, Berlin, 1977.
- V. S. Varadarajan. *Supersymmetry for mathematicians: an introduction*. Courant Lecture Notes. Courant Lecture Notes Series, New York, 2004.