

12 febbraio 2009

Prova scritta dell'esame di Geometria II

Durata della prova: 3 ore

1. Nello spazio vettoriale  $\mathbf{R}^4$  in cui è assegnata la base

$$B = (v_1, v_2, v_3, v_4), \quad v_1 = (1, 0, 0, -1), v_2 = (0, 2, 1, 0), v_3 = (0, 0, -2, 0), v_4 = (3, 0, 0, 0),$$

determinare:

- (a) l'immagine di  $w = (2, -1, 0, 0)$  nell'endomorfismo  $f$  in cui  
 $f(v_1) = f(v_2) = v_4, f(v_3) = 2v_3, f(v_4) = v_1 + v_2$ ;
- (b) una base del nucleo e dell'immagine dell'endomorfismo  $g_k$  in cui  $g_k(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + kx_4, x_1 + kx_4, 2x_3 + (k+1)x_4, 3x_3 + kx_4)$  e  $k$  indica un parametro;
- (c) i valori di  $k$  per i quali  $g_k$  è diagonalizzabile.

2. Nello spazio  $\mathbf{E}^4$  in cui è fissato un riferimento cartesiano, sono assegnati i piani

$$\pi: x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, 3x_1 - x_4 = 1 \quad \text{e} \quad \pi': 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 0.$$

Determinare:

- (a) un sistema di equazioni parametriche del sottospazio generato da  $\pi$  e  $\pi'$ ;
- (b) un sistema di equazioni cartesiane di una retta per  $P(0, 0, 0, -1)$  sghemba con  $\pi'$ ;
- (c) un sistema di equazioni di un piano sghembo sia con  $\pi$  che con  $\pi'$ ;
- (d) le equazioni di un'affinità non identica in cui  $\pi$  e  $\pi'$  sono piani fissi;
- (e) la distanza di  $\pi$  da  $\pi'$ .

Punteggio: 1(c):7 punti; 2(c) e 2(e):4 punti; 3 punti a ciascuna delle altre domande.