18 luglio 2008
Prova scritta esame Geometria 2
Durata della prova 3 ore

1. Nello spazio $\mathbf{R}^4$ in cui è assegnato l'endomorfismo

$$f: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4, \ (x_1,x_2,x_3,x_4) \mapsto (2x_2,-x_3,-2x_4,x_1),$$

determinare:
(a) i valori di $k \in \mathbf{R}$ in corrispondenza dei quali $g_k = f^2 + kId_{\mathbf{R}^4}$ è un automorfismo;
(b) la matrice di g_k rispetto alla base ordinata

$$B = (v_1 = (1,1,1,1), \ v_2 = (1,1,1,0), \ v_3 = (1,1,0,0), \ v_4 = (1,0,0,0)).$$

(c) Verificare che la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ a & b & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbf{R})$$

è diagonalizzabile qualunque siano $a,b \in \mathbf{R}$;
(d) determinarne una matrice diagonalizzante con $a = b = 1$.

2. Nello spazio $\mathbf{E}^5$ in cui è fissato un riferimento cartesiano, sono assegnati i sottospazi

$$L: \ x_1 + x_2 - 1 = 0, \ x_4 - x_5 = 0; \ L': \ x_2 + x_3 - 1 = 0, \ x_5 - x_1 = 0, \ x_4 - x_1 = 0.$$

Determinare:
(a) un sistema di equazioni cartesiane dei sottospazi $L \cap L'$ e $S(L,L')$;
(b) la distanza di L dall'origine del sistema di riferimento.

3. Nello spazio $\mathbf{E}^3$ in cui è fissato un riferimento cartesiano, è assegnata l'affinità

$$h: \ x_1' = lx_2, \ x_2' = mx_3, \ x_3' = nx_1, \ lmn \neq 0.$$

(a) Determinare i valori di l,m,n in corrispondenza dei quali h è una isometria e, in particolare, una isometria diretta.
(b) Verificare che per $l = m = n = 1$ è $h^3 = Id_{\mathbf{E}^3}$.
Punteggio: 3 punti a (**3**.a) e (**3**.b); 4 punti a ciascuna delle altre domande.