28 giugno 2007
Prova scritta esame GEOMETRIA II
Durata della prova: 3 ore

1 In un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V, 2-dimensionale, in cui è fissata una base ordinata $B = (v_1, v_2)$, siano f_1, f_2, f_3, f_4 gli endomorfismi che portano B rispettivamente ed ordinatamente nelle coppie
$(v_2, v_1 + v_2)$, $(v_1, v_1 + v_2)$, $(v_1 + v_2, v_2)$, $(v_1 + v_2, v_1)$.

[a] Verificare che (f_1, f_2, f_3, f_4) è una base di $\mathrm{End}(V)$.

[b] Quale condizione debbono soddisfare gli scalari k_1, k_2, k_3, k_4 affinché il nucleo di $k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 + k_4 f_4$ abbia dimensione 1?

2 Dopo aver verificato che $b : M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$((a_{ij}), (b_{ij})) \to 3a_{11} b_{11} + 4a_{12} b_{12} + 2a_{21} b_{21} + a_{22} b_{22}$

è un prodotto scalare, si determini una base ortonormale operando con il procedimento di Gram-Schmidt sulla base

$$U = \left(u_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ u_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ u_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ u_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

3 Dopo aver verificato che la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{C})$

è diagonalizzabile, se ne determini una matrice diagonalizzante.

4 Nello spazio E^4 in cui è fissato un riferimento cartesiano sono assegnati il punto $T(2,-1,0,0)$, la retta $r = S_W(P)$ con $P(3,0,0,1)$ e $W = \langle(0,1,0,0)\rangle$ ed il piano $\pi : x_1 + 2x_3 = 0 \ ,\ x_1 - x_4 = 2$

[a] Verificare che la retta r e il piano π sono paralleli.
[b] Scrivere un sistema di equazioni di $S(r, \pi)$.
[c] Scrivere un sistema di equazioni di una retta passante per T e sghemba con r.
[d] Calcolare la distanza di r da π.

5 Nel piano euclideo E^2, in cui è fissato un riferimento cartesiano di origine O, si indichi con T il triangolo con vertici in O, A(1,0) e B(0,1).
[a] Scrivere le equazioni di un'affinità non isometrica che porta T in sé.
[b] Scrivere le equazioni di una isometria non identica che porta T in sé.

Punteggio: (1a:4), (4a:2), ogni altra domanda vale 3 punti.