7 giugno 2007
Prova scritta esame GEOMETRIA II
Durata della prova: 3 ore

1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, con f_h ($h \in \mathbb{R}$) si indica l'endomorfismo che porta gli elementi della base canonica (e_1, e_2, e_3, e_4) ordinatamente nei vettori $e_1 + e_2$, $he_1 + e_2$, e_3 , $-e_3 + 2e_4$.

Determinare:
[a] i valori di h in corrispondenza dei quali f_h è un automorfismo;
[b] una base di $\mathrm{Im}(f_1)$ e di $\mathrm{Ker}(f_1)$;
[c] i valori di h per cui f_h è diagonalizzabile.

2 Nello spazio affine $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ in cui è fissato un riferimento $\Sigma = (O, B)$ $B = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$, sono assegnati il punto $T(3,1,1,1,3)$ e le rette

$r = S_W(P)$, $W = \langle v_2 + v_4 \rangle$, $P(1,0,1,0,1)$,

$s = S_{W'}(O)$, $W' = \langle v_1 - v_3 + v_5 \rangle$.

Verificare che:
[a] r e s sono sghembe ;
[b] $T \in S(r,s)$;
[c] Scrivere un sistema di equazioni della retta t che passa per T ed è complanare con r e con s .

3 Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$, in cui è fissato un riferimento cartesiano, si indichi con S l'insieme delle affinità

$$\varphi_{a,b}: \quad \begin{cases} x'_1 = ax_1 + bx_3 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -bx_1 + ax_3 \end{cases} \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2 - (0,0)$$

[a] Verificare che S è un sottogruppo di $\mathrm{Aff}(\mathbb{E}^3)$.
[b] Per quali valori di a,b $\varphi_{a,b}$ è una isometria?
[c] In S esistono isometrie inverse? (Motivare la risposta)
[d] Verificare che $\varphi_{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}}$ genera un gruppo ciclico di ordine 8.

Punteggio: (1a:2), (2c:4), ogni altra domanda vale 3 punti .