7. 7. 03

Prova scritta esame **Geometria 2**
Durata della prova: 3 ore.

1. Nello spazio $M_2(\mathbf{R})$, costituito dalle matrici 2×2 ad elementi reali, sono assegnate le basi ordinate

$$U=\left(u_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\ u_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right),$$
$$B=\left(v_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ v_3=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\ v_4=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\right).$$

(a) Determinare le matrici $M_U(f)$ ed $M_B(f)$ dell'automorfismo f in cui $f(u_i)=v_i$, $i=1,2,3,4$.

(b) Dopo aver verificato che la funzione

$$b: M_2(\mathbf{R})\times M_2(\mathbf{R})\to \mathbf{R}$$
$$((a_{ij}),(b_{ij}))\mapsto a_{11}b_{11}+2a_{12}b_{12}+3a_{21}b_{21}+4a_{22}b_{22}$$

è un prodotto scalare, si determini una base ortonormale operando sulla base B mediante il procedimento di Gram-Schmidt.

2. Nello spazio $\mathbf{E}^4$ in cui è fissato un riferimento cartesiano $\Sigma=(O,B)$, sono assegnati i punti $P(1,-1,0,0)$, $Q(1,1,1,1)$ ed il piano

$$\alpha:\ x_1-x_3-1=0,\ x_2+x_4+1=0\ .$$

(a) Come devono essere scelti i punti A e B in modo che $\beta=S(A,B,P)$ sia un piano che interseca α unicamente in P?

(b) Qual'è la dimensione del sottospazio generato da α e dalla retta $S(A,B)$ congiungente due punti che soddisfano la condizione (a)?

(c) Scrivere una equazione degli iperpiani che passano per Q, sono paralleli ad α ed hanno distanza $d=1$ dall'origine.

(d) Scrivere le equazioni delle affinità che portano in sè ciascuno degli assi del sistema di riferimento.

(e) Tra le affinità considerate in (d) esistono isometrie non identiche? Esistono isometrie inverse?

3. Dimostrare che nel piano $\mathbf{E}^2$, in cui è fissato un riferimento cartesiano, un'affinità che porta in sè la circonferenza γ: $x^2+y^2=1$ è necessariamente una isometria.

Punteggio:
(**1**a,3), (**1**b,4)
(**2**a,4), (**2**b,3), (**2**c,4), (**2**d,4), (**2**e,3), (**3**,5)