8 gennaio 2008
Prova scritta esame GEOMETRIA II
Durata della prova: 3 ore

1 Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ con f_h, $h \in \mathbb{R}$, è indicato l'endomorfismo che porta gli elementi della base canonica (e_1, e_2, e_3, e_4) ordinatamente nei vettori
$e_1 + e_2$, $2e_1$, $he_1 + 2e_2 + he_4$, $he_1 + he_2 + he_3 + 2e_4$.

Determinare:

a) la matrice $M_B(f_1)$ di f_1 relativa alla base ordinata

$B = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$;

b) una base di $\mathrm{Ker}(f_h)$ ed una base di $\mathrm{Im}(f_h)$ in corrispondenza dei valori di h per cui f_h non è un automorfismo;

c) i valori di h per cui f_h è diagonalizzabile.

2 Nello spazio $\mathbb{E}^4$, in cui è fissato un riferimento cartesiano di origine O, sono assegnate le rette

$r: \; x_1 - x_4 + 1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1$;

$s: \; x_1 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 - x_2 - 1 = 0$.

Scrivere :

a) un sistema di equazioni del sottospazio $S(r,s)$ generato da r e da s;

b) un sistema di equazioni di una retta sghemba con r e con s ed inclusa in $S(r,s)$ e di una retta sghemba con r e con s e non inclusa in $S(r,s)$;

c) un sistema di equazioni del piano per O parallelo ad r e s ;

d) una equazione dell'iperpiano per O ortogonale ad r ;

e) una equazione degli iperpiani per s ed O che hanno distanza 1 dal punto $P(1,1,1,1)$;

f) le equazioni di una traslazione non identica che porta r in sé .

g) Esistono traslazioni non identiche che portano r in sé ed s in sé? Motivare la risposta.

Punteggio: (1a:4), (1b:2), (1c:3), (2a:3), (2b:4), (2c,d:2), (2e:4), (2f:2), (2g:4).