9 giugno 2003

Prova scritta esame **Geometria 2**
Durata della prova: 3 ore.

1.Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ è assegnato l'endomorfismo

$$f_k:(x_1,x_2,x_3,x_4)\mapsto(2x_1+x_2,kx_1+x_2,x_3,-2x_3+2x_4)$$

dipendente dal parametro reale k.

(a) Per quali valori di k, f_k è un automorfismo?

(b) Si determini una base di $\mathrm{Im}(f_k)$ ed una base di $Ker(f_k)$ in corrispondenza dei valori di k per cui f_k <u>non</u> è un automorfismo.

(c) Per quali valori di k, f_k è diagonalizzabile?

2.Nello spazio $\mathbf{E}^4$ in cui è fissato un riferimento cartesiano $\Sigma=(O,B)$, $B=(v_1,v_2,v_3,v_4)$, sono assegnate le rette

$$r:\ x_1-x_2+1=0,\ x_3-1=0,\ x_4-1=0$$

$$s:\ x_1=0,\ x_3=0,\ x_2+x_4-1=0$$

e l'iperpiano π: $x_1-x_2+x_3-x_4=0$.

(a) Verificare che r ed s sono sghembe e che $S(r,s)$ è un iperpiano parallelo a π.

(b) Determinare, mediante un sistema di equazioni, una coppia di rette sghembe fra loro e parallele a π.

(c) Provare che i punti che hanno distanza $d=1$ da π appartengono a due iperpiani paralleli a π.

(d) Scrivere le equazioni di un'affinità, diversa da una isometria, che porta π in sé.

(e) Le isometrie che portano π in sé costituiscono un sottogruppo del gruppo $Isom^+(\mathbf{E}^4)$ delle isometrie dirette?

(f) Sia $n=v_1-v_2+v_3-v_4$. Provare che la funzione che porta un punto P nel punto P' tale che

$$P'-P=-2\frac{<P-O,n>}{<n,n>}n,$$

è una isometria.

Punteggio: (**1**a:2) (**1**b:3) (**1**c:5) (**2**a,b,c,d:3) (**2**e:4) (**2**f:5)