9 settembre 2008
Prova scritta esame Geometria 2
Durata della prova 3 ore

1. Determinare:

(a) un'applicazione lineare f: $\mathbf{R}^4 \to M_2(\mathbf{R})$ che porta il sottospazio $S = L((0,-1,1,2),(1,1,0,0),(2,0,-1,0))$ nel sottospazio

$$S' = L\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

ed in cui $\mathrm{Im}(f) \neq S'$;

(b) il nucleo di f;

(c) un endomorfismo non nullo g: $M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ tale che sia $g \circ f = 0$.

(d) g è diagonalizzabile? Quali sono i suoi autospazi?

(e) Verificare che la forma bilineare b: $M_2(\mathbf{R}) \times M_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$,

$$b: \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) \mapsto aa' + bb' + cc' + dd',$$

è un prodotto scalare.

Nello spazio $M_2(\mathbf{R})$ munito del prodotto scalare b, g è un operatore unitario? (Motivare la risposta)

2. Nello spazio euclideo $\mathbf{E}^4$ in cui è fissato un riferimento cartesiano, sono assegnati il punto $P(2,0,-1,0)$, la retta r: $x_1 - x_4 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 - 3x_4 = 2$ ed il piano π: $x_1 - x_4 = 2,\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -1$.

Scrivere:

(a) un sistema di equazioni del sottospazio $S(r, \pi)$;

(b) un sistema di equazioni di una retta sghemba con r ed incidente π;

(c) le equazioni di un'affinità, τ, in cui $\tau(P) = P$, $\tau(r) = r$ ed r non è una retta di punti fissi.

(d) Esistono isometrie nelle quali r e π sono sottospazi fissi?(motivare la risposta)

(e) Calcolare la distanza di P da r.

Punteggio: 2 punti a (**2**.a) e 4 punti a (**2**.c); 3 punti a ciascuna delle altre domande.