

# Geometria Riemanniana. Note del corso Geom. Sup. II 2009/2010 (laurea magistrale)

Durata: semestrale (48 ore)

Versione aggiornata al 18 maggio 2010

Libri di Testo<sup>1</sup>:

- S. Gallot D. Hulin J. Lafontaine. *Riemannian Geometry (2nd Edition.)* Springer-Verlag.
- P. Petersen. *Riemannian Geometry (2nd Edition.)* Springer-Verlag.

Fonti consigliate per approfondimenti:

- Wikipedia e la rete in generale.
- J. Jost *Riemannian Geometry and Geometric Analysis (5th Edition.)* Universitext, Springer-Verlag.
- M. P. Do Carmo. *Riemannian Geometry.* Birkhauser.
- Le dispense del Mitico LAZZERI, che metto a disposizione qui<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>I libri di testo e consigliati sono protetti da diritti di autore, quindi non potete scaricare ed usare le varie copie facilmente trovabili in rete.

<sup>2</sup>[http://www.dm.unibo.it/~francavi/did/Lazzeri\\_GDiff.ps](http://www.dm.unibo.it/~francavi/did/Lazzeri_GDiff.ps)



## Indice

Settimana 1. Richiami su Varietà differenziabili	5
1.1. Lezione 1: Sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ ed esempi	5
1.2. Lezione 2: Carte locali, atlanti e varietà astratte	8
1.3. Lezione 3: Localizzazione, partizione dell'unità e Teorema di Whitney	12
1.4. Lezione 4: Esercitazione	16
Settimana 2. Campi di vettori, forme differenziali e derivazioni	18
2.1. Lezione 5: Spazio tangente e campi di vettori	18
2.2. Lezione 6: Integrazione e $k$ -forme su varietà	22
2.3. Lezione 7 Esercitazione	25
2.4. Lezione 8: Derivazioni e Bracket	27
Settimana 3. Flussi, derivata di Lie di campi e forme, campi coordinati	31
3.1. Lezione 9: Flussi e bracket	31
3.2. Lezione 10: Derivata di Lie di forme	33
3.3. Lezione 11: Interpretazione geometrica di $[X, Y]$	37
3.4. Lezione 12: Esercitazione	39
Settimana 4. Fibrati vettoriali e tensori	41
4.1. Lezione 13: Fibrati vettoriali (Vector Bundles)	41
4.2. Lezione 14: Sezioni di fibrati e tensori	46
4.3. Lezione 15: Contrazioni, derivata di Lie e Lemma di liberazione dagli indici	50
4.4. Lezione 16: Esercitazione	54
Settimana 5. Connessioni e derivata covariante	56
5.1. Lezione 17: Derivata covariante	56
5.2. Lezione 18: Proprietà delle connessioni, torsione nulla, localizzazione lungo sottovarietà	59
5.3. Lezione 19: Campi paralleli, simboli di Christoffel	63
5.4. Lezione 20: Esercitazione	68
Settimana 6. Metriche Riemanniane e Connessione di Levi-Civita	74
6.1. Lezione 21: Definizione, forma di volume, Alzamento e abbassamento di indici	74
6.2. Lezione 22: Formula di Koszul e Connessione di Levi Civita	80

6.3.	Lezione 23: Espressioni locali della connessione, isometrie; gradiente, hessiano e laplaciano	84
6.4.	Lezione 24: Esercitazione	92
Settimana 7. Geodetiche		96
7.1.	Lezione 25: Lunghezza di curve, distanza associata, geodetiche	96
7.2.	Lezione 26: Geodetiche Riemanniane, variazione prima dell'energia, mappa esponenziale	99
7.3.	Lezione 27: Lemma di Gauss, Teorema di Hopf-Rinow e caratterizzazione di isometrie	106
7.4.	Lezione 28: Esercitazione	110
Settimana 8. Curvatura		114
8.1.	Lezione 29: Richiami sulle curve e superfici	114
8.2.	Lezione 30: Curvatura geodetica, trasporto parallelo e Gauss-Bonnet	117
8.3.	Lezione 31: Caratteristica di Eulero, Gauss Bonnet Globale e Tensore di Curvatura	122
8.4.	Lezione 32: Le simmetrie del Riemann	125
Settimana 9. Curvatura in secula seculorum: Operatore di curvatura, curvatura sezionale, tensore di Ricci, curvatura scalare, Lemma di Schur, Riemann coi Christoffel. Amen		129
9.1.	Lezione 33: Operatori di curvatura e curvatura sezionale	129
9.2.	Lezione 34: Curvatura di Ricci e curvatura scalare	132
9.3.	Lezione 35: La curvatura in coordinate e un po' di equazioni belle	137
9.4.	Lezione 36: Esercitazione	143
Settimana 10. Curvatura e topologia		152
10.1.	Lezione 37: Variazione seconda di Lunghezza ed Energia e Campi di Jacobi	152
10.2.	Lezione 38: Geodetiche in curvatura negativa e Teorema di Hadamard-Cartan	157
10.3.	Lezione 39: Teorema di Myers. Superfici Minime.	161
10.4.	Lezione 40: Evoluzione di curve nel piano.	169

## Richiami su Varietà differenziabili

### 1.1. Lezione 1: Sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ ed esempi

**1.1.1. Nota sulla regolarità degli oggetti considerati.** Una funzione (da un aperto di  $\mathbb{R}^n$  a un aperto di  $\mathbb{R}^m$ ) si dice di classe  $\mathcal{C}^k$  se è derivabile fino all'ordine  $k$  e tutte le sue derivate, fino alla  $k$ -esima inclusa, sono continue. Una funzione si dice *smooth* — in italiano: liscia — se è di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , ossia se è derivabile tante volte quante si vuole e se ogni sua derivata è continua.

In quanto segue tutte le funzioni saranno sottintese  $\mathcal{C}^\infty$ . Per chi è curioso è bene sapere che tra i mondi continuo,  $\mathcal{C}^1$  e  $\mathcal{C}^2$  ci sono immense differenze e infiniti inframondi. Poi da  $\mathcal{C}^2$  in poi le cose si stabilizzano un po'. Un diffeomorfismo è una funzione smooth, invertibile e con inversa smooth.

**1.1.2. Definizione di varietà (in inglese: manifold).** Se uno ha uno spazio topologico  $X$  e una funzione  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , come fa a sapere se  $f$  è derivabile? E nel caso, chi è la sua derivata? Per rispondere a queste domande, in matematica si introduce la nozione di struttura differenziabile. La definizione euristica di varietà differenziabile può essere data così:

*Le varietà sono oggetti che localmente assomigliano a  $\mathbb{R}^n$  (assomigliano "in modo  $\mathcal{C}^\infty$ ".)*

Cerchiamo di formalizzare questo concetto. Osserviamo innanzitutto che questa definizione include intrinsecamente il concetto di dimensione.

**Definizione 1.1.1** (Sottovarietà di spazi  $\mathbb{R}^N$ ). *Un sottoinsieme  $M$  di  $\mathbb{R}^{n+k}$  si dice una sottovarietà di dimensione  $n$  se:*

*Per ogni  $x \in M$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  in  $\mathbb{R}^{n+k}$  ed una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  con il differenziale surgettivo in ogni punto, tale che  $U \cap M = f^{-1}(0)$ .*

Nota: Le varietà in letteratura prendono nomi come  $M, N, \dots$  per via del nome inglese. La parola *intorno* in inglese è *neighborhood*.

Vediamo se con questa definizione gli oggetti che chiamiamo varietà assomigliano localmente a  $\mathbb{R}^n$ .

**Esempio 1.1.2.**  $\mathbb{R}^n$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$ . Ogni aperto  $A$  di  $\mathbb{R}^n$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$ . Infatti, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  basta considerare  $U = \mathbb{R}^n$  oppure  $U = A$  e la funzione costante zero (nota: qui  $k = 0$ , per cui  $\mathbb{R}^k = \{0\}$ .)

**Esempio 1.1.3.** Lo spazio  $\mathbb{R}^{n+k}$  è canonicamente il prodotto  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  ove  $\mathbb{R}^n$  è identificato con l'insieme

$$\mathbb{R}^n \times \{0\} = \{(x_1, \dots, x_{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k} \text{ t.c. } x_{n+1} = \dots = x_{n+k} = 0\}.$$

In questo senso si può dire che  $\mathbb{R}^n$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{n+k}$ : Per ogni  $x \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$  basta considerare  $U = \mathbb{R}^{n+k}$  ed  $f$  definita da

$$f(x_1, \dots, x_{n+k}) = (x_{n+1}, \dots, x_{n+k}).$$

Bella roba, uno può dire. Beh, il fatto è che a meno di diffeomorfismi, non c'è molto di piú.

**Teorema 1.1.4.**  $M \subset \mathbb{R}^{n+k}$  è una sottovarietà di dimensione  $n$  se e solo se per ogni  $x \in M$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $x$ , un intorno  $V$  di  $0 \in \mathbb{R}^{n+k}$  ed un diffeomorfismo  $F : U \rightarrow V$  tale che  $F(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Cominciamo col “se”. Ossia, dimostriamo che se per ogni  $x \in M$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $x$ , un intorno  $V$  di  $0 \in \mathbb{R}^{n+k}$  ed un diffeomorfismo  $F : U \rightarrow V$  tale che  $F(U \cap M) = V \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$ , allora  $M$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^{n+k}$ .

Basta considerare la funzione  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$  definita da

$$g(x_1, \dots, x_{n+k}) = (x_{n+1}, \dots, x_{n+k})$$

e poi la composizione  $f = g \circ F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ , per cui in  $U = f^{-1}(0)$ . La funzione  $f$  ha differenziale surgettivo perché  $F$  è un diffeomorfismo (e quindi il suo differenziale è surgettivo in ogni punto) e la proiezione  $g$  ha chiaramente il differenziale surgettivo in ogni punto.

Veniamo adesso al “solo se”. Si deve provare che se  $M$  è sottovarietà, allora esistono  $U, V, F$  come richiesti.

Per il teorema del Dini in piú variabili (o teorema delle funzioni implicite<sup>1</sup>) se  $x, U, f$  sono come nella Definizione 1.1.1, allora esiste un intorno  $U'$  di  $x$  tale che, eventualmente dopo aver riordinato le coordinate di  $\mathbb{R}^{n+k}$ , esiste una funzione liscia  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  per cui l'insieme  $f^{-1}(0)$  è dato da

$$\{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^{n+k} : (y_1, \dots, y_k) = g(x_1, \dots, x_n)\}.$$

Il diffeomorfismo richiesto è:

$$F((X, Y)) = (X, Y) - (0, g(X))$$

<sup>1</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_delle\\_funzioni\\_implicite](http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_delle_funzioni_implicite)

ove si è usata la notazione  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_k)$ . Il fatto che  $F$  sia un diffeomorfismo si vede esplicitandone il differenziale:

$$dF = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -dg & I_k \end{bmatrix}$$

□

**Esempio 1.1.5.** Il toro  $T^2 \subset \mathbb{R}^4$  definito da  $T^2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 = 1, z^2 + t^2 = 1\}$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^4$ .

Basta considerare la funzione  $f(x, y, z, t) = (x^2 + y^2, z^2 + t^2)$  e l'aperto  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) \neq 0\}$ . Infatti  $U$  contiene ogni punto di  $T^2$  e per la  $f$  vale

$$df = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z & 2t \end{bmatrix}$$

che in  $U$  ha rango 2.

**Definizione 1.1.6.** Una sottovarietà  $N$  di una sottovarietà  $M$  di  $\mathbb{R}^n$  è un sottoinsieme di  $M$  che è a sua volta una sottovarietà.

**Esempio 1.1.7.** L'insieme  $M(n, m)$  delle matrici  $m \times n$  si può identificare naturalmente (come spazio vettoriale) con  $\mathbb{R}^{nm}$ . Molti insiemi di matrici risultano delle varietà. Per esempio:

- $GL(n, \mathbb{R}) = \{x \in M(n, n) : \det x \neq 0\}$ .
- Le matrici simmetriche  $\{x \in M(n, n) : x = x^t\}$ .
- Le matrici antisimmetriche  $\{x \in M(n, n) : x = -x^t\}$ .
- Le matrici ortogonali  $O(n) = \{x \in M(n, n) : x^t = x^{-1}\}$ . (Qual'è la sua dimensione? Identificando  $M(2, 2)$  con  $\mathbb{R}^4$ , il gruppo  $O(2)$  risulta una sottovarietà del toro  $T^2$  descritto nell'esempio 1.1.5?)
- Le matrici che rappresentano prodotti scalari (forme bilineari definite positive) rispetto alla base canonica.

### 1.1.3. Esempi patologici.

Fin qui abbiamo solo visto sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$ . Vorremmo avere però una definizione di varietà intrinseca, che dica quando un oggetto assomiglia a  $\mathbb{R}^n$ . Dire che localmente uno spazio topologico è fatto come  $\mathbb{R}^n$  significa dire che per ogni punto  $x$  di  $M$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  e un omeomorfismo di  $U$  su un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Ma questo non basta per fare una varietà astratta come vorremmo.

**Esempio 1.1.8** (Il piano con due origini). Consideriamo gli spazi  $M_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$  ed  $M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$ . Sia ora  $M = (M_0 \cup M_1) / \sim$  ove  $(x, y, z) \sim (x', y', z')$  se e solo se  $x = x' \neq 0, y = y' \neq 0$ . È facile verificare che  $M$  soddisfa la proprietà di essere localmente omeomorfa a  $\mathbb{R}^2$  ma ci sono in circolazione due origini!!!

$$(0, 0, 0) \quad e \quad (0, 0, 1)$$

**Esempio 1.1.9** (La retta lunga, o retta di Alexandroff<sup>2</sup>). Per questo esempio servono delle nozioni di logica non richieste per l'esame. Sia  $\omega_1$  il primo ordinale non numerabile ossia il piú piccolo tipo di buon ordine di insiemi non numerabili (questo coincide con l'insieme di tutti i tipi di buoni ordinamenti numerabili, ordinati per inclusione.) Consideriamo il prodotto  $\omega_1 \times [0, 1)$  con la topologia dell'ordine lexicografico. Il risultato è la cosiddetta semiretta lunga. Si chiama così perché ogni suo punto ha un intorno omeomorfo a  $\mathbb{R}$  ma non è omeomorfo a  $\mathbb{R}$  in quanto non ha una base di intorni numerabile. Intuitivamente è una versione di  $\mathbb{R}$  mooolto lunga.

**Esempio 1.1.10** (Somiglianze locali incompatibili). Consideriamo come spazio  $M$  l'intervallo  $(0, 4)$  in  $\mathbb{R}$ . Per quanto detto fin'ora questa è una sottovarietà di  $\mathbb{R}$  (è un sottoinsieme aperto.) Consideriamo i punti 1 e 2 di  $M$  e gli intorni  $U_1 = (0, 3)$  e  $U_2 = (1, 4)$ . Consideriamo l'omeomorfismo  $f_1 : U_1 \rightarrow U_1$  definito da  $f_1(x) = x$  e l'omeomorfismo  $f_2 : U_2 \rightarrow (1/2, 5)$  definito da

$$f_2(x) = \begin{cases} x/2 & x \in (1, 2) \\ 2x - 3 & x \in [2, 4) \end{cases}$$

Nel punto  $2 \in U_1 \cap U_2$  la funzione  $f_1 \circ f_2^{-1}$  non è smooth. Questo non è bello per fare i conti.

Cerchiamo di mettere ordine.

## 1.2. Lezione 2: Carte locali, atlanti e varietà astratte

### 1.2.1. Carte locali, atlanti e funzioni lisce.

**Definizione 1.2.1** (Ricoprimento). Sia  $M$  uno spazio topologico. Un ricoprimento aperto di  $M$  è un insieme  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ , dove  $\alpha$  appartiene ad un opportuno insieme di indici, tale che ogni  $U_\alpha$  è un aperto di  $M$  e tale che

$$\bigcup_{\alpha} U_\alpha = M.$$

$\mathcal{U}$  si dice localmente finito se ogni compatto di  $M$  interseca al piú ad un numero finito di elementi di  $\mathcal{U}$ .

**Definizione 1.2.2** (Carte locali). Dato un aperto  $U$  di uno spazio topologico  $M$ , una carta locale per  $M$  su  $U$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  è un omeomorfismo  $\varphi$  di  $U$  su un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Spesso con "carta locale" ci si riferisce alla coppia  $(U, \varphi)$ .

I navigatori del 1500, quando disegnavano carte nautiche, non facevano altro che dare omeomorfismi "il piú fedeli possibile" da pezzi della superficie terrestre a fogli di carta, cioè aperti di  $\mathbb{R}^2$ . La collezione di carte si chiama atlante.

<sup>2</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Long\\_line\\_\(topology\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Long_line_(topology))

**Definizione 1.2.3** (Atlante). Sia  $M$  uno spazio topologico. Un atlante differenziabile di dimensione  $n$  per  $M$  è un insieme  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  tale che:

- L'insieme  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  sia un ricoprimento aperto e localmente finito di  $M$ ;
- ogni  $\varphi_\alpha$  sia una carta locale su  $U_\alpha$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ ;
- per ogni  $\alpha, \beta$  tale che  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  il **cambio di carta**  $\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1}$  sia un diffeomorfismo di classe  $\mathcal{C}^\infty$  (da  $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  a  $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ , che sono entrambi aperti di  $\mathbb{R}^n$ .)

**Esempio 1.2.4.** L'atlante standard per  $\mathbb{R}^n$  consiste di un solo elemento:  $(\mathbb{R}^n, Id)$  (per  $n \neq 4$  va tutto bene, ma  $\mathbb{R}^4$  ha un sacco di strutture differenti da quella standard<sup>3</sup>. In generale: fino alla dimensione 3 tutto tranquillo, non esiste roba strana, ma da 4 in su le cose si complicano<sup>4</sup>.)

Usando gli atlanti si può dire se una funzione sia o meno differenziabile (cosa che a livello solamente topologico non ha senso.)

**Definizione 1.2.5** (Funzioni lisce). Siano  $M$  ed  $N$  due spazi topologici muniti di atlanti differenziabili rispettivamente di dimensione  $n$  ed  $m$  e denotati  $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  e  $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ . Una funzione  $f : M \rightarrow N$  si dice differenziabile, di classe  $\mathcal{C}^k$  o smooth, rispetto agli atlanti dati se, per ogni  $\alpha, \beta$  tali che  $f(U_\alpha) \cap V_\beta \neq \emptyset$ , lo è la funzione

$$\psi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(f^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha) \rightarrow \psi_\beta(f(U_\alpha) \cap V_\beta)$$

che è definita tra un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  a valori in  $\mathbb{R}^m$ .

$$\begin{array}{ccc} U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) & \xrightarrow{f} & V_\beta \cap f(U_\alpha) \\ \varphi_\alpha \downarrow & & \psi_\beta \downarrow \\ \varphi_\alpha(U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)) & & \psi_\beta(V_\beta \cap f(U_\alpha)) \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m \end{array}$$

**Definizione 1.2.6** (Atlanti compatibili). Due atlanti differenziabili su uno spazio topologico  $M$  sono compatibili se la loro unione è ancora un atlante. In altre parole, due atlanti sono compatibili se le carte locali di uno sono smooth quando lette nell'altro.

**Esempio 1.2.7.** Consideriamo l'atlante  $A$  su  $\mathbb{R}$  costituito da un solo aperto  $U = \mathbb{R}$  con carta locale definita da

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$$

L'atlante  $A$  non è compatibile con l'atlante standard di  $\mathbb{R}$  in quanto la  $f$  non è liscia.

<sup>3</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic\\_R4](http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_R4)

<sup>4</sup>Vedi per esempio le sfere esotiche

[http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic\\_sphere](http://en.wikipedia.org/wiki/Exotic_sphere)

Dato un ricoprimento aperto  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ , un raffinamento di  $\mathcal{U}$  è un ricoprimento  $\mathcal{U}'$  tale che per ogni suo elemento  $U$  esiste un indice  $\alpha$  tale che  $U \subset U_\alpha$ . Dato un atlante  $A$  con ricoprimento  $\mathcal{U}$ , un raffinamento di  $A$  è un atlante  $A'$  il cui ricoprimento sia un raffinamento di  $\mathcal{U}$  e le cui carte locali siano restrizione di carte di  $A$ , cioè se  $(U, \varphi) \in A'$  allora esiste  $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in A$  tale che  $U \subset U_\alpha$  e  $\varphi = \varphi_\alpha|_U$ .

**Teorema 1.2.8.** *Dati due ricoprimenti aperti localmente finiti di  $M$  esiste sempre un raffinamento comune localmente finito. Dati due atlanti di  $M$ , passando a raffinamenti, ci si può sempre ricondurre al caso che i due atlanti abbiano lo stesso ricoprimento.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  due ricoprimenti localmente finiti.  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  è ancora un ricoprimento localmente finito. Ne segue che il ricoprimento definito da  $\mathcal{W} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$  è un raffinamento comune localmente finito. Dati due atlanti subordinati rispettivamente a  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ , basta considerare gli atlanti ottenuti usando il raffinamento comune  $\mathcal{W}$  per restrizione delle carte locali.  $\square$

**Definizione 1.2.9** (Struttura differenziabile). *Una struttura differenziabile di dimensione  $n$  su uno spazio topologico  $M$  è una classe di equivalenza di atlanti differenziabili di dimensione  $n$  (ove la relazione di equivalenza è data dalla compatibilità.)*

**Teorema 1.2.10.** *Se una funzione è liscia letta in un atlante allora lo è letta in qualsiasi atlante compatibile col primo. Ossia, la classe di differenziabilità di una funzione definita su una varietà non dipende dall'atlante scelto per fare i conti nella classe di equivalenza.*

**DIMOSTRAZIONE.** Dipende dal fatto che i cambi di carta sono lisci. Sia  $f : M \rightarrow N$  una funzione tra spazi topologici dotati di atlanti  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  rispettivamente. Siano  $\mathcal{U}'$  e  $\mathcal{V}'$  atlanti compatibili con  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  rispettivamente. Come abbiamo visto, possiamo supporre che  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{U}'$  siano subordinati allo stesso ricoprimento, cosí come  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{V}'$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 & & U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta) & \xrightarrow{f} & V_\beta \cap f(U_\alpha) \\
 & \swarrow \varphi'_\alpha & \downarrow \varphi_\alpha & & \downarrow \psi_\beta \\
 \varphi'_\alpha(U_\alpha) & & \varphi_\alpha(U_\alpha) & & \psi_\beta(V_\beta) \\
 & & & & \searrow \psi'_\beta \\
 & & & & \psi'_\beta(V_\beta)
 \end{array}$$

Si ha

$$\psi'_\beta f(\varphi'_\alpha)^{-1} = \psi'_\beta \psi_\beta^{-1} \psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1} \varphi_\alpha (\varphi'_\alpha)^{-1} = (\psi'_\beta \psi_\beta^{-1}) \psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1} (\varphi_\alpha (\varphi'_\alpha)^{-1})$$

e quindi  $\psi'_\beta f(\varphi'_\alpha)^{-1}$  è liscia se e solo se lo è  $\psi_\beta f \varphi_\alpha^{-1}$  in quanto sia  $\psi'_\beta \psi_\beta^{-1}$  che  $\varphi_\alpha (\varphi'_\alpha)^{-1}$  sono lisce per la compatibilità degli atlanti.  $\square$

**1.2.2. Varietà astratte.** Adesso siamo finalmente pronti per dare la definizione di varietà differenziabile, senza ambiguità e patologie

**Definizione 1.2.11** (Varietà differenziabile astratta). *Una varietà differenziabile di dimensione  $n$  è uno spazio topologico*

- (1) di Hausdorff<sup>5</sup>,
- (2) la cui topologia sia a base numerabile,
- (3) dotato di una struttura differenziabile di dimensione  $n$ .

**Definizione 1.2.12** (Sottovarietà). *Un sottoinsieme  $M$  di una varietà astratta  $N$  si dice sottovarietà di codimensione  $k$ , se in ogni carta è una sottovarietà. Ossia, se per ogni  $x \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  e una funzione liscia  $f$  definita su  $U$  a valori in un  $\mathbb{R}^k$  tale che letta in ogni carta il differenziale di  $f$  sia surgettivo in ogni punto e tale che  $M \cap U = f^{-1}(0)$ .*

**Definizione 1.2.13** (Sottovarietà proprie (proper sub-manifolds)). *Un sottoinsieme  $M$  di una varietà astratta  $N$  si dice sottovarietà propria di codimensione  $k$  se per ogni punto  $x \in N$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  e una funzione liscia  $f$  definita su  $U$  a valori in un  $\mathbb{R}^k$  tale che letta in ogni carta il differenziale di  $f$  sia surgettivo in ogni punto e tale che  $M \cap U = f^{-1}(0)$ .*

**Esercizio 1.2.14.** *Notare le differenze tra le due definizioni.*

**Esempio 1.2.15.** *Una spirale in  $\mathbb{R}^2$  che si accumula sul cerchio di raggio 1 è una sottovarietà, ma non è propria. Per esempio la curva parametrizzata da  $((1 - e^{-t}) \cos t, (1 - e^{-t}) \sin t)$ .*

**Definizione 1.2.16** (Orientabilità). *Una varietà si dice orientabile se esiste un atlante tale che determinanti dei cambi di carta siano tutti positivi.*

**Esercizio 1.2.17.** *Dimostrare che il nastro di Möbius, definito da  $[0, 1] \times (-1, 1) / \sim$  ove  $(0, t) \sim (1, -t)$ , possiede una struttura di varietà ma non è orientabile.*

**Esercizio 1.2.18.** *Dimostrare che ogni varietà di dimensione 1 è orientabile.*

**Definizione 1.2.19** (Diffeomorfismi, immersioni, sommersioni, embedding). *Una funzione  $f$  tra due varietà  $M$  ed  $N$  è un diffeomorfismo se è un omeomorfismo liscio con inversa liscia; è sommersione se è liscia e letta in carte locali ha il differenziale surgettivo in ogni punto; è un'immersione se è liscia e letta in carte locali ha il differenziale iniettivo in ogni punto; è un embedding (qui manca la parola italiana ragionevolmente equivalente) se è un'immersione che sia un omeomorfismo con l'immagine (dotata della topologia indotta da  $N$ .)*

<sup>5</sup>[http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio\\_di\\_Hausdorff](http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_di_Hausdorff)

Un'immersione di un aperto di  $\mathbb{R}^n$  in una varietà è anche detta una *parametrizzazione locale* e in generale un embedding di una varietà in un'altra è detto una *parametrizzazione*.

**Definizione 1.2.20** (Strutture equivalenti). *Due strutture differenziabili su  $M$  si dicono equivalenti se esiste una funzione  $f : M \rightarrow M$  tale che sia un diffeomorfismo se letto nelle due strutture.*

**Teorema 1.2.21.** *Sia  $f : M \rightarrow N$  un embedding di una varietà  $k$ -dimensionale in una varietà  $n$ -dimensionale. Allora  $f(M)$  è una sottovarietà  $k$ -dimensionale di  $N$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per definizione di embedding, esistono due carte locali  $(U, \varphi)$  intorno a  $x$  in  $M$  e  $(V, \psi)$  intorno a  $f(x)$  in  $N$  tali che la funzione

$$F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

che è definita su un aperto di  $\mathbb{R}^k$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ , sia liscia e con differenziale iniettivo in ogni punto e tale che  $F(U) = \psi(f(M) \cap V)$ . Possiamo riordinare le coordinate di  $\mathbb{R}^n$  in modo che il minore di  $dF$  corrispondente alle prime  $k$  coordinate sia non nullo in un intorno di  $\varphi(x)$ , al quale restringiamo il dominio della  $F$ . Scriviamo adesso la  $F$  come  $F = (G, H)$ , ove  $G$  è la proiezione di  $F$  sulle prime  $k$  coordinate e chiamiamo le coordinate di  $\mathbb{R}^n$   $(X, Y)$  con  $X = (x_1, \dots, x_k)$  e  $Y = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ . Abbiamo che  $dG$  è invertibile. Per il teorema della funzione inversa,  $G$  ammette un'inversa liscia, e la funzione

$$(X, Y) \mapsto Y - H(G^{-1}(X))$$

è liscia, con differenziale surgettivo in ogni punto e il cui luogo di zeri definisce esattamente un intorno di  $f(M)$  letto nella carta locale  $(V, \psi)$ .  $\square$

**Definizione 1.2.22.** *Un'applicazione tra insiemi si dice propria se la preimmagine di ogni compatto è compatta.*

**Esercizio 1.2.23.** *Dimostrare che se  $f : M \rightarrow N$  è un embedding proprio di una varietà  $k$ -dimensionale in una varietà  $n$ -dimensionale. Allora  $f(M)$  è una sottovarietà  $k$ -dimensionale e propria di  $N$ .*

### 1.3. Lezione 3: Localizzazione, partizione dell'unità e Teorema di Whitney

**Esercizio 1.3.1.** *Dimostrare che tutte le strutture differenziabili su  $\mathbb{R}$  sono equivalenti. Notare che abbiamo già visto atlanti non compatibili su  $\mathbb{R}$ .*

**SOLUZIONE.** Basta dimostrare che ogni struttura è equivalente all'atlante standard. Sia  $A$  un atlante per  $\mathbb{R}$ . Usando raffinamenti e sottoricoprimenti possiamo trovare un atlante  $A_1$  compatibile con  $A$  tale che gli aperti siano intervalli che ogni punto appartenga al più a

due intervalli e tale che nessun intervallo sia completamente contenuto in un altro. In altre parole, possiamo numerare gli aperti  $I_n$  con  $n \in \mathbb{Z}$  in modo che  $I_n$  intersechi solo  $I_{n-1}$  e  $I_{n+1}$ . Restringendo un po' gli aperti, si trova un atlante  $A_2$  dello stesso tipo con la proprietà addizionale che i cambi di carta siano di classe  $\mathcal{C}^\infty$ , con tutte le derivate limitate ed estendibili al bordo (in quanto restrizione dei cambi di carta di  $A_1$ .) Se poniamo  $I_n = (a_n, b_n)$ , per ogni  $n$  abbiamo  $a_n < b_{n-1} < a_{n+1} < b_n$ .

Per ogni  $n$ , la carta locale  $f_n$  è un omeomorfismo di  $I_n$  con un aperto di  $\mathbb{R}$  che è quindi della forma  $(x, y)$  con  $x, y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Siccome  $A_2$  era ottenuto restringendo un po' gli aperti di  $A_1$ , a posteriori sia  $x$  che  $y$  non sono  $\infty$ .

Per tale ogni intervallo  $(x, y)$  è facile trovare un diffeomorfismo tra  $(x, y)$  e un intervallo del tipo  $(k, k+3)$  componendo una omotetia con una traslazione. In oltre, per ogni coppia di punti  $a < b \in (x, y)$  si può trovare esplicitamente un diffeomorfismo di  $(x, y)$  su  $(k, k+3)$  che mandi  $a$  in  $k+1$  e  $b$  in  $k+2$ . Si può quindi supporre che le carte locali siano omeomorfismi di  $I_n$  su  $(2n, 2n+3)$  che mandano  $b_{n-1}$  su  $2n+1$  e  $a_{n+1}$  su  $2n+2$  e tali che i cambi di carta siano di classe  $\mathcal{C}^\infty$  con derivate limitate ed estendibili al bordo.

Se le carte locali su  $I_n \cap I_{n+1}$  (che sono entrambe a valori in  $(2n+2, 2n+3)$ ) coincidessero, allora un diffeomorfismo tra  $\mathbb{R}$  con l'atlante  $A_2$  e l' $\mathbb{R}$  standard sarebbe facilmente costruito incollando una dopo l'altra le carte locali  $\varphi_n$ .

**Localizziamo il problema.** Abbiamo un intervallo  $I = (a, b)$  (l'intersezione di due aperti di  $A_2$ ) su cui son definiti due omeomorfismi  $\varphi_0$  e  $\varphi_1$ , entrambi a valori in  $(0, 1)$  (entrambi che preservano l'ordine) e tali che  $\varphi_0\varphi_1^{-1}$  sia un diffeomorfismo che si estende a  $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ .

Vogliamo trovare una funzione  $F : I \rightarrow (0, 1)$  che coincida con  $\varphi_0$  vicino a  $a$  e con  $\varphi_1$  vicino a  $b$  e tale che sia liscia, ossia tale che  $F(\varphi_0^{-1}(x))$  e  $F(\varphi_1^{-1}(x))$  siano lisce.

L'idea è quella di fare una combinazione

$$f_0\varphi_0 + f_1\varphi_1$$

con opportune funzioni  $f_1$  ed  $f_2$ . Supponiamo **momentaneamente** che ci sia una palletta  $B \subset (0, 1)$  su cui  $\varphi_1\varphi_0^{-1}(x) > x$ . Sia  $f_0$  una funzione positiva e liscia su  $(0, 1)$ , che vale costantemente 1 prima di  $B$  scende monotonamente verso zero dentro  $B$  ed è costantemente 0 dopo  $B$ . Consideriamo la funzione  $f_1 = 1 - f_0$ .  $f_1$  è positiva, liscia, zero prima di  $B$  e 1 dopo  $B$  (per ora niente disegno in LaTeX, provveda il lettore con carta e penna.)

Consideriamo adesso la funzione  $g : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$

$$g(x) = xf_0(x) + \varphi_1\varphi_0^{-1}(x)f_1(x)$$

tale funzione è ovviamente differenziabile, verifichiamo è un diffeomorfismo fino al bordo. Questo è equivalente a controllare che la

derivata sia sempre positiva

$$g'(x) = f_0(x) + xf_0'(x) + (\varphi_1\varphi_0^{-1})'(x)f_1(x) + \varphi_1\varphi_0^{-1}(x)f_1'(x)$$

da cui

$$g'(x) = f_0(x) + (\varphi_1\varphi_0^{-1})'(x)f_1(x) + f_1'(x)(\varphi_1\varphi_0^{-1}(x) - x)$$

i primi due termini sono positivi (perché  $\varphi_1\varphi_0^{-1}$  è un diffeomorfismo che preserva l'ordine.) L'ultimo termine è positivo perché dove  $f_1'$  è non nulla si ha  $\varphi_1\varphi_0^{-1}(x) - x > 0$  per ipotesi momentanea e  $f_1' > 0$  per definizione.

Adesso creiamo la funzione  $F : I \rightarrow (0, 1)$  ponendo

$$F(x) = g(\varphi_0(x)) = \varphi_0(x)f_0(\varphi_0(x)) + \varphi_1(x)f_1(\varphi_0(x))$$

La  $F$  è liscia perché letta nella carta  $\varphi_0$  è semplicemente la  $g$ , coincide con  $\varphi_0$  vicino ad  $a$  e con  $\varphi_1$  vicino a  $b$ .

Occupiamoci adesso dell'ipotesi momentanea. Che fare nel caso in cui risulti sempre  $\varphi_1\varphi_0^{-1}(x) < x$ ? Si usa un truccetto simile a quello appena visto.

Per ogni  $\varepsilon > 0$  sia  $f_\varepsilon : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$  una funzione liscia, positiva con derivata strettamente positiva e tale che: coincida con l'identità fino ad  $\varepsilon$  e dopo  $1 - \varepsilon$  e che sia maggiore di  $1 - 2\varepsilon$  a partire da  $2\varepsilon$ . La funzione  $\varphi_1\varphi_0^{-1}(f_\varepsilon(x))$  ha sempre derivata positiva e coincide con  $\varphi_1\varphi_0^{-1}$  vicino a 0 e 1, in oltre, da  $2\varepsilon$  in poi è maggiore di  $\varphi_1\varphi_0^{-1}(1 - 2\varepsilon)$ , che risulterà maggiore di  $x$  per  $x = 2\varepsilon$  ed  $\varepsilon$  sufficientemente piccolo.

Sostituendo  $\varphi_1\varphi_0^{-1}$  con  $\varphi_1\varphi_0^{-1}(f_\varepsilon(x))$  e ripetendo l'argomento di cui sopra si trova una  $F$  come si voleva.

Torniamo adesso al problema del diffeomorfismo tra  $\mathbb{R}$  con l'altante  $A_2$  e l' $\mathbb{R}$  standard.

Su ogni intersezione  $I_n \cap I_{n+1}$ , come abbiamo fatto nel problema locale, costruiamo una funzione  $F_n$  che sia liscia fino al bordo e che coincida con la carta  $\varphi_{n+1}$  vicino a  $b_n$  e con la carta  $\varphi_n$  vicino a  $a_{n+1}$ . Il diffeomorfismo richiesto sarà adesso facilmente dato da

$$\Phi(x) = \begin{cases} F_{n-1} & x \in (2n, 2n + 1] \\ \varphi_n(x) & x \in [2n + 1, 2n + 2) \\ F_n(x) & x \in [2n + 2, 2n + 3) \end{cases}$$

□

Quello di localizzare un problema è una tattica standard in geometria differenziale e Riemanniana. Spesso, quando si appresta a leggere un conto, uno incappa nella frase “in coordinate locali...” vediamo cosa significa.

Una carta locale di una varietà  $M$  già sappiamo cos'è. È un omeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  dove  $U$  è un aperto di  $M$ . In  $\mathbb{R}^n$  le coordinate sono  $n$  funzioni  $x_1, \dots, x_n$  che assegnano ad ogni punto  $p$  la  $n$ -upla  $(x_1(p), \dots, x_n(p))$  delle sue coordinate rispetto alla base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .

Un sistema di coordinate locali in un punto  $p$  di una varietà  $n$ -dimensionale  $M$  è il dato di  $n$  funzioni  $x_1, \dots, x_n$  definite in un intorno  $U$  di  $p$  tali che la funzione  $x \mapsto (x_1(x), \dots, x_n(x))$  sia una carta locale compatibile con la struttura di  $M$ . Equivalentemente, data una carta locale  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dette  $x_1, \dots, x_n$  le coordinate di  $\mathbb{R}^n$ , le funzioni  $x_1(\varphi(x)), \dots, x_n(\varphi(x))$  sono coordinate locali in  $U$ .

### 1.3.1. Partizione dell'unità e teorema di Whitney.

Uno strumento indispensabile per localizzare un problema, è la cosiddetta **partizione dell'unità**, che non è altro che la generalizzazione delle funzioni  $f_1$  ed  $f_2$  dell'esercizio 1.3.1.

Dato un ricoprimento aperto  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  localmente finito di una varietà  $M$ , una partizione dell'unità subordinata a  $\mathcal{U}$  è un insieme di funzioni  $f_\alpha$  con le seguente proprietà:

- Ogni  $f_\alpha$  è liscia;
- $\forall \alpha, 1 \geq f_\alpha \geq 0$ ;
- $\sum_\alpha f_\alpha = 1$ ;
- per ogni  $\alpha$  il supporto di  $f_\alpha$  è contenuto in  $U_\alpha$ .

L'esistenza di partizioni dell'unità esula gli scopi di questo corso ma non è difficile da mostrare. L'esistenza di partizioni dell'unità costituisce una delle grandi differenze tra il mondo  $\mathcal{C}^\infty$  e il mondo analitico (dove le partizioni dell'unità non esistono in quanto una funzione analitica nulla su un aperto è nulla ovunque.)

Veniamo adesso ad un teorema che rassicura gli animi preoccupati dalle varietà astratte:

**Teorema 1.3.2.** *Ogni varietà astratta e connessa  $M$  è diffeomorfa ad una sottovarietà di  $\mathbb{R}^N$  per un  $N$  abbastanza grande.*

**DIMOSTRAZIONE.** Diamo la dimostrazione solo nel caso compatto. Dato un atlante con ricoprimento  $\mathcal{U}$ , siccome  $M$  è compatta, passando a un sottoricoprimento, ci possiamo ricondurre al caso in cui  $\mathcal{U}$  sia finito (ma questo punto si sistema anche in generale.) Siano  $(U_1, \varphi_1), \dots, (U_k, \varphi_k)$  le carte locali a valori in  $\mathbb{R}^n$  ove  $n$  è la dimensione di  $M$ . Sia  $f_1, \dots, f_k$  una partizione dell'unità subordinata ad  $\mathcal{U}$ . la funzione  $F$  che manda  $x \in M$  nel punto  $F(x)$  di  $\mathbb{R}^{kn+k}$  definito da

$$F(x) = (f_1(x)\varphi_1(x), \dots, f_k(x)\varphi_k(x), f_1(x), \dots, f_k(x))$$

è un diffeomorfismo con una sottovarietà. Dimostriamolo. Per prima cosa si noti che  $F$  è liscia e iniettiva. Infatti è definita usando solo roba liscia e se  $F(x) = F(y)$  allora necessariamente  $f_i(x) = f_i(y)$  per ogni  $i$ ; in particolare  $x$  e  $y$  appartengono ad uno stesso aperto  $U_i$  su cui sappiamo che  $\varphi_i(x) = \varphi_i(y) \Rightarrow x = y$  per cui, essendo  $f_i(x) = f_i(y)$ , si ha  $f_i(x)\varphi_i(x) = f_i(y)\varphi_i(y) \Rightarrow x = y$ .

Vediamo adesso che  $dF$  è iniettivo in ogni punto. In carte locali,  $dF$  si scrive così:

$$dF = \begin{bmatrix} \varphi_1 \otimes df_1 + f_1 d\varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_k \otimes df_k + f_k d\varphi_k \\ df_1 \\ \vdots \\ df_k \end{bmatrix}$$

se un vettore  $V$  sta nel nucleo di  $dF$  allora in particolare  $df_i \cdot V = 0$  per ogni  $i$ , per cui  $dF \cdot V = 0$  si riduce a  $d\varphi_i \cdot V = 0$  per ogni  $i$  tale che  $f_i \neq 0$  il che è impossibile in quanto ogni  $\varphi_i$  è invertibile.

Se mostriamo che  $F$  è un omeomorfismo con l'immagine abbiamo finito per il Teorema 1.2.21. Per fare ciò è sufficiente mostrare che per ogni  $x \in M$  e per ogni intorno  $U$  di  $x$  esistono un intorno  $U' \subset U$  di  $x$  e  $V$  di  $F(x)$  tali che  $F(U') \cap V = F(U')$ . Sia  $x_j$  una successione di punti tali che  $F(x_j)$  converga a  $F(x)$ ; in particolare  $f_i(x_j) \rightarrow f_i(x)$  per ogni  $i$ , quindi definitivamente  $x_j$  sta in uno stesso aperto  $U_i$  contenente  $x$ , ove si ha  $\varphi_i(x_j) \rightarrow \varphi_i(x) \Rightarrow x_j \rightarrow x$ . Quindi per ogni intorno  $U' \subset U_i$  di  $x$  esiste un intorno  $V$  di  $F(x)$  tali che  $F(x_j) \in V$  implica che  $F(x_j) \in F(U')$ , ossia  $F(U') \cap V = F(U')$ . (Quest'ultimo argomento può essere semplificato usando la compattezza di  $M$ : essendo  $F$  continua manda compatti in compatti e siccome  $M$  è compatta i chiusi di  $M$  coincidono con i suoi compatti, per cui  $F$  manda chiusi in chiusi e quindi l'inversa è continua.)  $\square$

#### 1.4. Lezione 4: Esercitazione

Svolto in classe l'esercizio 1.3.1.

##### 1.4.1. Esercizi.

**Esercizio 1.4.1.** *Dimostrare che per ogni  $c$  l'insieme*

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = c\}$$

*è una sottovarietà. Che dimensione ha?*

**Esercizio 1.4.2.** *Dimostrare che per ogni  $c \neq 0$  l'insieme*

$$\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_n^2 - x_0^2 = c\}$$

*è una sottovarietà. Che succede per  $c = 0$ ?*

**Esercizio 1.4.3** (Blow up<sup>6</sup>). *Lo scoppimento di un punto in  $\mathbb{R}^n$  è definito come il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)$*

$$\{(x, [x]), x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0\} \cup (\{0\} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^n)).$$

*Dimostrare che è una varietà. Che diavolo vien fuori? Che succede per  $n = 2$ ? E se si cambia  $\mathbb{R}$  con  $\mathbb{C}$ ?*

<sup>6</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Blowing\\_up](http://en.wikipedia.org/wiki/Blowing_up)

**Esercizio 1.4.4.** *Dimostrare che l'insieme*

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2y^2 - 2xy = -4\}$$

*è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$ .*

**Esercizio 1.4.5.** *Dimostrare che l'insieme*

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y/x, x \neq 0\}$$

*è una sottovarietà.*

**Esercizio 1.4.6.** *Dimostrare che una sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$  possiede una struttura naturale di varietà astratta tale che l'inclusione in  $\mathbb{R}^n$  sia liscia.*

**Esercizio 1.4.7.** *Fornire un esempio di sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  che possieda una struttura di varietà astratta ma che non sia una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$ .*

**Esercizio 1.4.8.** *Dimostrare che lo spazio proiettivo ammette una struttura di varietà differenziale.*

**Esercizio 1.4.9.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia. Dimostrare che il grafico di  $f$  è una sottovarietà differenziabile di  $\mathbb{R}^2$ . È vero il viceversa? Ossia, è vero che se il grafico di  $f$  è una sottovarietà allora  $f$  è liscia?*

**Esercizio 1.4.10.** *Sia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia ove  $U$  è un aperto di  $\mathbb{R}$ . Sia  $M \subset \mathbb{R}^3$  l'insieme ottenuto per rotazione dal grafico di  $f$ :*

$$M = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 = f(x)^2, x \in U\}$$

*Dare una condizione necessaria e sufficiente affinché  $M$  sia una varietà.*

**Esercizio 1.4.11.** *Dimostrare, generalizzando le idee della dimostrazione del Teorema 1.2.21, che se una funzione  $f : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  ha il differenziale di rango  $m$  in ogni punto, allora esistono carte locali di  $\mathbb{R}^k$  ed  $\mathbb{R}^n$  tali che la  $f$  si legge come*

$$(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$$

**Esercizio 1.4.12.** *Dimostrare che la circonferenza  $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$  è una varietà.*

**Esercizio 1.4.13.** *Dimostrare che una varietà astratta di dimensione 1 è diffeomorfa o a  $\mathbb{R}$  o a  $S^1$ .*

**Esercizio 1.4.14.** *Dare un'immersione di  $S^1$  in un  $\mathbb{R}^N$  seguendo passo passo la dimostrazione del Teorema 1.3.2.*

## Campi di vettori, forme differenziali e derivazioni

### 2.1. Lezione 5: Spazio tangente e campi di vettori

#### 2.1.1. Spazio tangente, mappa differenziale.

Fin'ora abbiamo usato frasi come “la  $f$  letta in carte locali ha il differenziale così e così”, è giunta l'ora di dotarci di notazioni e strumenti per snellire le nostre dimostrazioni.

**Definizione 2.1.1.** *Sia  $M$  una sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$  definita, in un intorno di  $x$ , da una funzione  $f$  (ossia localmente  $M = f^{-1}(0)$ .) Lo spazio tangente di  $M$  in  $x$ , denotato  $T_x M$ , è definito in uno dei seguenti modi equivalenti (verificare per esercizio che sono effettivamente equivalenti)*

- $\{v \in \mathbb{R}^n : \exists c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ liscia} : c'(0) = v\}$
- $\ker df_x$
- *L'immagine di  $d\varphi_0$  ove  $\varphi$  è una parametrizzazione locale di  $M$  con  $\varphi(0) = x$ .*

Quando abbiamo una varietà astratta, lo spazio tangente a  $M$  in un punto  $x$  può essere definito via carte locali:

Se  $(U, \varphi)$  è una carta locale in  $\mathbb{R}^n$ , il tangente a  $x \in U \subset \mathbb{R}^n$  e sull'intersezione di due aperti il differenziale del cambio di carta fornisce un'identificazione delle due copie di  $\mathbb{R}^n$ .

Oppure, equivalentemente, in modo intrinseco

**Definizione 2.1.2** (Spazio tangente). *Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $x \in M$ . Lo spazio tangente di  $M$  in  $x$  è costituito dall'insieme delle classi di equivalenza di curve lisce  $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  con  $c(0) = x$ , ove  $c_1$  è equivalente a  $c_2$  se lette in carte locali hanno la stessa derivata in 0. Ossia se  $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$  per una (e quindi per tutte) carte locali  $\varphi$ . Lo spazio tangente  $T_x M$  è dotato della struttura lineare indotta da una carta locale  $\varphi$  (il ché non dipende da  $\varphi$  in quanto il differenziale di un cambio di carta è un isomorfismo lineare.)*

**Definizione 2.1.3** (Differenziale di una funzione). *Data una funzione liscia  $f : M \rightarrow N$  tra due varietà il differenziale di  $f$  nel punto  $x$ , denotato con  $df_x$ , è la funzione dallo spazio tangente  $T_x M$  a quello  $T_{f(x)} N$  definita da*

$$df_x(c) = f \circ c$$

Nonostante la definizione astratta è bene che si ricordi che  $T_x M$  è uno spazio vettoriale che rappresenta l'insieme dei vettori tangenti ad  $M$  in  $x$ , e continuare a immaginarsi lo spazio tangente di una sottovarietà. In carte locali tutto funziona come in  $\mathbb{R}^n$ .

Bene. Ad ogni punto di una varietà abbiamo associato uno spazio vettoriale, chiamato spazio tangente. Fin'ora i vari spazi tangenti non hanno nulla a che vedere l'uno con l'altro, a parte sapere che sono tutti isomorfi a  $\mathbb{R}^n$  ove  $n$  è la dimensione della varietà ambiente. Verdemo come dotare l'insieme di tali spazi, non solo di una topologia, ma anche di una struttura di varietà. Tale varietà è l'ambiente naturale per fare i conti in geometria Riemanniana. Ma andiamo con ordine.

### 2.1.2. Campi di vettori su $\mathbb{R}^n$ (in inglese: vector fields).

Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ , ad ogni punto  $x \in U$  è associato lo spazio tangente  $T_x U = \mathbb{R}^n$ . Ossia, per  $U$  c'è una **identificazione standard** tra ogni  $T_x U$  e  $\mathbb{R}^n$  data dall'inclusione  $U \subset \mathbb{R}^n$ .

**Definizione 2.1.4.** *Un campo di vettori  $X$  su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$  è una funzione liscia  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .*

Un campo  $X$  si deve pensare come una funzione che associa ad ogni punto  $x \in U$  un vettore tangente a  $x$ .

Se  $e_1, \dots, e_n$  è una base di  $\mathbb{R}^n$ , i campi di vettori costanti

$$X_i(x) = e_i$$

si dicono campi coordinati. Notazioni usuali ed equivalenti per indicare i campi coordinati sono

$$\frac{\partial}{\partial_i}, \quad \partial_i, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}$$

**Fatto 2.1.5.** *Ogni campo di vettori  $X$  su  $U$  si scrive in modo unico come*

$$X = \sum_i a_i(x) \partial_i$$

ove ogni  $a_i(x)$  è una funzione liscia.

**DIMOSTRAZIONE.** Ciò non è altro che la riscrittura del fatto che in coordinate si ha  $X = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ .  $\square$

Le notazioni  $\partial_i$  e  $\partial/\partial_i$  vengono dal fatto che i campi di vettori servono principalmente per fare le derivate.

**Definizione 2.1.6.** *Data una funzione liscia  $f$  e un campo di vettori  $X$  su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$ , si definisce  $X(f)$  come la derivata di  $f$  nella direzione  $X$ :*

$$X(f) = df[X].$$

Se  $X = \sum_i a_i \partial_i$  si ha

$$X(f) = \sum_i a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Si noti che la funzione  $X(f)$  è una nuova funzione liscia su  $U$ . La notazione  $X.f$  al posto di  $X(f)$  è spesso usata in letteratura.

**2.1.3. 0- e 1-forme differenziali in  $\mathbb{R}^n$ .** Come dovremmo sapere, il duale  $(\mathbb{R}^n)^*$  di  $\mathbb{R}^n$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , ma l'isomorfismo non è canonico. La nozione di forma differenziale è duale a quella di campo di vettori e va trattata con precisione sin dall'inizio per non creare confusione.

**Definizione 2.1.7.** Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una 0-forma differenziale su  $U$  è una funzione liscia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definizione 2.1.8.** Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una 1-forma differenziale su  $U$  è una funzione liscia  $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}^*$ .

Il funzionale lineare che associa ad un punto di  $\mathbb{R}^n$  la sua  $i$ -esima coordinata, si denota in geometria differenziale e Riemanniana con  $dx^i$ :

$$dx^i(x_1, \dots, x_n) = x_i$$

Si noti che l'indice  $i$  **sta in alto**. Questa convenzione risulterà estremamente comoda in futuro: informalmente (per ora) si conviene che gli indici in alto denotano robe duali di quelle con gli indici in basso.

**Fatto 2.1.9.** Ogni 1-forma differenziale  $\omega$  su  $U$  si scrive in modo unico come

$$\omega = \sum_i \alpha_i(x) dx^i$$

ove ogni  $\alpha_i$  è una funzione liscia su  $U$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Stiamo semplicemente dicendo che l'insieme di forme  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  è una base per  $\mathbb{R}^*$ .  $\square$

**Esempio 2.1.10.** In  $\mathbb{R}^2$ ,  $\omega = xdy - ydx$  è una 1-forma differenziale.

Visto che le 1-forme in ogni punto sono duali ai campi di vettori, possiamo applicare questa dualità punto per punto:

**Definizione 2.1.11** (Contrazione). La contrazione di un campo  $X = \sum_i a^i(x) \partial_i$  e una 1-forma  $\omega = \sum \alpha_i dx^i$  è la funzione

$$i_X \omega = \sum_i a^i(x) \alpha_i(x)$$

La funzione  $i_X \omega$  è anche detta *prodotto interno* tra  $X$  e  $\omega$  (per questo si indica con la lettera  $i$ ) ed è un funzionale bilineare punto per punto.

Se abbiamo una 0-forma, e cioè una funzione liscia  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , il suo differenziale in ogni punto è un funzionale lineare, quindi  $df$  è una 1-forma, in coordinate si ha

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$$

da cui si ritrova  $X(f)$  come contrazione

$$X(f) = i_X(df).$$

#### 2.1.4. Cambi di coordinate: pull-back e push-forward e integrazione.

Siccome in geometria differenziale e tutt'un cambiare di coordinate, bisogna stabilire come cambiano i campi e le forme quando si cambia di coordinate, tenendo a mente che si vorrà fare tutto in astratto.

**Esempio 2.1.12** (Come NON si cambiano le coordinate dei campi di vettori). *Supponiamo di avere un diffeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  e un campo  $X$  su  $U$ . Chi è il campo  $X$  letto su  $V$ ? Uno potrebbe dire “semplice:  $X(v)$  è  $X(\varphi^{-1}(v))$ ”. Se questo andava bene per le funzioni, non va più bene per i campi. Infatti, in astratto,  $X(\varphi^{-1}(v))$  è un vettore tangente a  $U$ , non a  $V$ .*

**Definizione 2.1.13** (Push-forward). *Dati due aperti  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , un diffeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow V$  ed un campo  $X$  su  $U$ , si definisce il push-forward di  $X$ , denotato con  $\varphi_*X$ , come il campo su  $V$  definito da*

$$\varphi_*X(\varphi(u)) = d\varphi_u[X(u)]$$

Ossia, la definizione giusta non è  $X(\varphi^{-1})$  ma  $d\varphi X(\varphi^{-1})$ , cioè si usa  $d\varphi$  per portare i vettori tangenti a  $U$  in vettori tangenti a  $V$ . Notare che nella formula il  $d\varphi$  si accompagna con  $\varphi^{-1}$  (sta roba si chiama **controvarianza**.)

**Definizione 2.1.14** (pull-back). *Dati due aperti  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $V \subset \mathbb{R}^m$ , una funzione liscia  $f : U \rightarrow V$  ed una 1-forma  $\omega$  su  $V$ , si definisce il pull-back  $f^*\omega$  come la 1-forma definita puntualmente dal funzionale lineare*

$$f^*\omega(x)[V] = \omega(f(x))[dfV] \quad \forall V \in \mathbb{R}^n$$

Notare che nella formula  $df$  si accompagna con  $f$  (sta roba si chiama **covarianza**.)

Se  $f$  è un diffeomorfismo si possono mandare avanti e indietro (push-forward e pull-back) sia forme che campi e si ha

$$f^* = (f^{-1})_*$$

## 2.2. Lezione 6: Integrazione e $k$ -forme su varietà

Cominciamo con un paio di conticini di riscaldamento.

**Fatto 2.2.1.**  $i_X\omega$  è invariante per diffeomorfismi, ossia se  $f : U \rightarrow V$  è un diffeomorfismo,  $X$  un campo e  $\omega$  una 1-forma su  $U$ , si ha

$$i_X\omega(x) = (i_{f_*X}f_*\omega)(f(x))$$

o, forse piú elegantemente, se  $\omega$  è una forma su  $V$

$$i_X(f^*\omega)(x) = (i_{f_*X}\omega)(f(x))$$

DIMOSTRAZIONE. Siano  $X(x) = \sum a^i(x)\partial_i$  e  $\omega(x) = \sum_i \alpha_i(x)dx^i$ , Si ha

$$f_*X(y) = dfX = \sum_i a^i(f^{-1}(y))df[\partial_i] = df\left[\sum_i a^i(f^{-1}(y))\partial_i\right]$$

e

$$f_*\omega(y) = (f^{-1})^*\omega = \sum_i \alpha_i(f^{-1}(y))df^{-1}[dx^i] = df^{-1}\left[\sum_i \alpha_i(f^{-1}(y))dx^i\right]$$

I termini  $df$  e  $df^{-1}$  si semplificano facendo il prodotto interno e ponendo  $y = f(x)$  si ottiene l'uguaglianza cercata.  $\square$

Nota abbastanza informale, ma non troppo: In generale, gli oggetti *covarianti* sono quelli che cambiano secondo il differenziale di  $f$ , ed avranno in sorte l'indice in alto; gli oggetti *controvarianti* sono quelli che cambiano secondo l'inversa del differenziale di  $f$ , ed avranno in sorte l'indice in basso.

Data una 1-forma  $\omega = \alpha(x)dx$  su un intervallo  $I = (a, b)$ , si definisce l'integrale di  $\omega$  come:

$$\int_I \omega = \int_a^b \alpha(t) dt \quad \left( = \int_a^b i_{\partial/\partial t}\omega dt \right)$$

e in generale, se  $\gamma : (a, b) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$  è una curva liscia e  $\omega$  è una 1-forma su  $U$  si definisce l'integrale

$$\int_\gamma \omega = \int_I \gamma^*\omega \quad \left( = \int_a^b i_{\partial/\partial t}\gamma^*\omega dt = \int_a^b i_{\gamma_*\partial/\partial t}\omega dt \right)$$

che è indipendente dalla parametrizzazione della curva. Infatti, se  $f : (c, d) \rightarrow (a, b)$  è un diffeomorfismo, e  $\omega = \alpha(t)dt$  è una 1-forma su  $(a, b)$  si ha

$$\int_{[c,d]} f^*\omega = \int_c^d \alpha(f^{-1}(s))\frac{1}{f'} ds = \int_a^b \alpha(t) dt = \int_{[a,b]} \omega$$

Quindi  $\int_\gamma \omega$  dipende solo dalla sottovarietà unidimensionale costituita dall'immagine di  $\gamma$  e non dalla sua parametrizzazione.

### 2.2.1. K-Forme.

Generalizziamo adesso la nozione di 1-forma come duale di oggetti unidimensionali a dimensioni maggiori. Una 1-forma dà in un certo senso una misura dell'elemento di lunghezza di un vettore. Una 2-forma dovrà dare quindi una misura dell'elemento di area tra due vettori e così via. Le aree  $k$ -dimensionali si calcolano con i determinanti che sono forme bilineari alternanti.

**Definizione 2.2.2.** *Sia  $U$  un aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Una  $k$ -forma differenziale su  $U$  è una funzione liscia definita su  $U$  a valori nello spazio delle forme  $k$ -lineari alternanti su  $\mathbb{R}$ .*

Il funzionale  $k$ -lineare alternante che associa ad una  $k$ -upla di vettori  $X_1, \dots, X_k$  di  $\mathbb{R}^n$  il determinante ottenuto dal minore delle prime  $k$  coordinate degli  $X_i$  si denota con

$$dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$$

allo stesso modo, il funzionale che associa il determinante ottenuto dalle coordinate  $i_1, \dots, i_k$  si denota con  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . In altre parole, dati  $X_1, \dots, X_k$  si costruisce la matrice  $A = [X_1^t, \dots, X_k^t]$  che ha come colonne i vettori  $X_j$ . Sia  $R_j$  la  $j$ -esima riga di  $A$  e sia  $A_{i_1, \dots, i_k}$  la matrice che ha come  $j$ -esima riga  $R_{i_j}$ . Si ha

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) = \det(A_{i_1, \dots, i_k})$$

**Fatto 2.2.3.** *Se  $\sigma$  è una permutazione degli indici  $i_1, \dots, i_k$ , allora*

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \text{segno}(\sigma) dx^{\sigma(i_1)} \wedge \dots \wedge dx^{\sigma(i_k)}.$$

Tali forme sono una base delle forme  $k$ -lineari. Ne segue quindi che una  $k$ -forma  $\omega$  in  $U \subset \mathbb{R}^n$  si scrive in modo unico come

$$\omega = \sum_{\substack{I = (i_1, \dots, i_k) \\ i_1 < \dots < i_k}} \alpha_I(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

**Notazione** Se  $I = (i_1, \dots, i_k)$  è un multiindice con  $i_1 < \dots < i_k$ , denotiamo con  $dx^I$  la  $k$ -forma  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ .

Il **pull-back** di una  $k$ -forma si definisce esattamente come per le 1-forme

$$f^*\omega(X_1, \dots, X_k) = \omega(df X_1, \dots, df X_k)$$

**Osservazione 2.2.4.** *Se  $k = n$  c'è un unico elemento della base:  $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  per cui ogni  $n$ -forma si scrive come*

$$\omega = \alpha(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

*Se  $k > n$  l'unica forma  $k$ -lineare alternante è quella nulla.*

Se  $\omega$  è una  $k$ -forma su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^k$  si definisce l'integrale di  $\omega$  su  $U$  come

$$\int_U \omega = \int_U \alpha(x) dx_1 \dots dx_n$$

Come nel caso delle 1-forme, tale espressione non dipende dalla parametrizzazione — A PATTO CHE IL CAMBIO DI PARAMETRIZZAZIONE PRESERVI L'ORIENTAZIONE — per cui, dato un aperto  $U$  di una sottovarietà  $k$ -dimensionale  $N$  di  $\mathbb{R}^n$ , parametrizzato da  $f : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow U$  e data una  $k$ -forma  $\omega$  su  $\mathbb{R}^n$ , si definisce

$$\int_U \omega = \int_V f^* \omega.$$

Data una sottovarietà  $k$ -dimensionale  $N$  di  $\mathbb{R}^n$  ed una  $k$ -forma  $\omega$  su  $\mathbb{R}^n$ , si definisce  $\int_N \omega$  via partizioni dell'unità. Ossia, si considera un ricoprimento numerabile  $\mathcal{U} = \{U_i\}$  localmente finito di  $N$  e una partizione dell'unità  $\{f_i\}$  subordinata a  $\mathcal{U}$ . Siano adesso  $\varphi_i : V_i \rightarrow U_i$  parametrizzazioni locali (ogni  $V_i$  è un aperto di  $\mathbb{R}^k$ ) si pone

$$\int_N \omega = \sum_i \int_{V_i} \varphi_i^*(f_i \omega).$$

Per quanto detto finora ciò non dipende dalle parametrizzazioni scelte se i cambi di carta han tutti determinante jacobiano positivo. Ossia, l'integrale di una  $k$ -forma su una  $k$ -varietà  $M$  è ben definito se  $M$  è, non solo orientabile (*munibile* di un atlante con cambi di carta con jacobiano positivo) ma orientata (*munita* di un atlante con cambi di carta con jacobiano positivo)

**Definizione 2.2.5** (Prodotto esterno, in inglese Wedge). *Date una  $k$ -forma  $\omega = \sum_I \alpha_I dx^I$  e una  $h$ -forma  $\eta = \sum_J \beta_J dx^J$ , il loro prodotto esterno è definito naturalmente in carte locali come la  $(k+h)$ -forma*

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J dx^I \wedge dx^J.$$

*Si noti che è un'operazione lineare.*

**2.2.2. Differenziazione esterna, forme chiuse ed esatte.** Il differenziale di una funzione è in modo naturale una 1-forma. In generale, il differenziale di una  $k$ -forma sarà una  $(k+1)$ -forma.

**Definizione 2.2.6.** *Data una  $k$ -forma  $\omega = \sum_I a_I(x) dx^I$  su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$  il differenziale  $d\omega$  è la  $(k+1)$ -forma definita da*

$$d\omega = \sum_I \sum_i \frac{\partial a_I}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^I$$

Per scrivere  $d\omega$  in forma standard si deve riordinare il termine  $dx^i \wedge dx^I$ , il che farà comparire un eventuale segno meno davanti al coefficiente. Si noti che se  $i = i_j$  per qualche  $j$  allora il termine  $dx^i \wedge dx^I$  è nullo.

**Fatto 2.2.7.** *Si ha  $d \circ d = 0$ . Ossia, per ogni  $k$ -forma  $\omega$  si ha  $d(d\omega) = 0$  come  $(k+2)$ -forma.*

DIMOSTRAZIONE. Segue facendo i conti dal fatto che per ogni  $f$  liscia si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

□

Anche se è banale, vale la pena ripeterlo: in coordinate locali vale il lemma di Schwartz e derivare prima in  $x$  e poi in  $y$  è la stessa cosa che derivare prima in  $y$  e poi in  $x$ .

Con la notazione introdotta fin qui, ponendo  $X_i = \partial_i$  si ha

$$X_i(X_j(f)) = X_j(X_i(f))$$

Ciò non sarà piú vero quando i campi non sono coordinati.

**Definizione 2.2.8** (Forme e campi su varietà). *Un campo di vettori su una varietà  $M$  con atlante  $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i)\}$  è il dato di un campo di vettori  $X_i$  su ogni aperto  $\varphi_i(U_i)$  tali che se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  i campi  $X_i$  e  $X_j$  siano legati dalla relazione*

$$X_i = (\varphi_i)_* \varphi_j^{(-1)*} X_j$$

sugli aperti  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  e  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ .

Una forma su  $M$  è il dato di una forma  $\omega_i$  su ogni aperto  $\varphi_i(U_i)$  tali che se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$  le forme  $\omega_i$  e  $\omega_j$  siano legate dalla relazione

$$\omega_i = (\varphi_i)_* \varphi_j^{(-1)*} \omega_j$$

sugli aperti  $\varphi_i(U_i \cap U_j)$  e  $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ .

Tutte le operazioni, integrazione, differenziazione esterna etc... si definiscono localmente.

**Definizione 2.2.9.** *Una  $k$ -forma  $\omega$  si dice chiusa se  $d\omega = 0$ , si dice esatta se esista una  $(k-1)$ -forma  $\alpha$  tale che  $\omega = d\alpha$ .*

**Teorema 2.2.10** (Lemma di Poincaré). *Una forma chiusa è localmente esatta<sup>1</sup>. Piú precisamente, se  $\omega$  è una forma su un aperto stellato di  $\mathbb{R}^n$  allora  $\omega$  è chiusa se e solo se è esatta.*

**Teorema 2.2.11** (Teorema di Stokes<sup>2</sup>). *Per ogni  $k$ -varietà  $M$  compatta con bordo e per ogni  $(k-1)$ -forma  $\omega$  su  $M$  si ha*

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

Le dimostrazioni di questi fatti esulano gli scopi di questo corso, ma si possono trovare in un qualsiasi libro di geometria differenziale.

### 2.3. Lezione 7 Esercitazione

Discussione su definizione e integrazione di forme. Svolti gli esercizi 2.3.7, 2.3.8 e 2.3.9.

<sup>1</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Closed\\_and\\_exact\\_differential\\_forms](http://en.wikipedia.org/wiki/Closed_and_exact_differential_forms)

<sup>2</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Stokes'\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Stokes'_theorem)

**2.3.1. Esercizi.**

**Esercizio 2.3.1.** *Dimostrare che tutte le definizioni che abbiamo dato dello spazio tangente sono equivalenti.*

**Esercizio 2.3.2.** *Dimostrare che lo spazio tangente a  $M$  in un punto  $x$  ha la stessa dimensione di  $M$ .*

**Esercizio 2.3.3.** *Si scriva un campo di vettori liscio su  $\mathbb{R}^2$  che sia ovunque tangente a un cerchio centrato nell'origine.*

**Esercizio 2.3.4.** *Si scrivano due campi di vettori su  $\mathbb{R}^3$  lisci, differenti tra loro e che siano ovunque tangenti a una sfera centrata nell'origine.*

**Esercizio 2.3.5.** *Dire se la seguente è una 1-forma differenziale su  $\mathbb{R}^2$*

$$\omega(x)[V] = \|V\|$$

**Esercizio 2.3.6.** *Dimostrare il Fatto 2.2.3.*

**Esercizio 2.3.7.** *Sia  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  e sia*

$$\omega = \sum_{\substack{I=(i_1, \dots, i_k) \\ i_1 < \dots < i_k}} \alpha_I(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

*una  $k$ -forma su  $\mathbb{R}^n$ . Si scriva esplicitamente il pull-back  $f^*\omega$ .*

**Esercizio 2.3.8.** *Sia  $F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  una parametrizzazione per una sottovarietà  $k$ -dimensionale  $N \subset \mathbb{R}^n$ . Sia  $\omega = \sum_I \alpha_I dx^I$  una  $k$ -forma su  $\mathbb{R}^n$ . Si dimostri che*

$$\int_N \omega = \int_U \left( \sum_I \alpha_I(F(x)) \text{Jac}(F)_I \right) dx_1 \dots dx_k$$

*ove se,  $I = (i_1, \dots, i_k)$  con  $i_1 < \dots < i_k$ ,  $\text{Jac}(F)_I$  è il determinante di della matrice ottenuta dalle righe  $i_1, \dots, i_k$  di  $dF$ .*

**Esercizio 2.3.9.** *Sia  $N$  una varietà orientata, con atlante  $\mathcal{U}$ . Dimostrare che se  $\mathcal{V}$  è un atlante tale che  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  sia ancora un atlante orientato allora  $\int_N \omega$  non dipende dall'atlante usato per fare i conti. Cosa succede se  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$  sono entrambi orientati ma l'unione non lo è?*

**Esercizio 2.3.10.** *Sia  $\omega = z dx \wedge dy + x dy \wedge dz$  una 2-forma su  $\mathbb{R}^3$ . Sia calcoli  $\int_{S^2} \omega$ .*

**Esercizio 2.3.11.** *Sia  $\omega = x^2 dz \wedge dy + (z + y)(dx \wedge dy + dx \wedge dz)$  una 2-forma su  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $S$  la superficie ottenuta per rotazione attorno all'asse  $X$  del grafico della funzione  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + x^2$ . Calcolare  $\int_S \omega$*

**Esercizio 2.3.12.** *Esibire esempi di forme che siano chiuse ma non esatte.*

## 2.4. Lezione 8: Derivazioni e Bracket

**2.4.1. Campi come derivazioni e bracket.** Abbiamo visto che dato un campo  $X$  e una funzione liscia  $f$  si può definire una nuova funzione

$$X(f) = df[X]$$

Si noti che tale espressione è invariante per cambio di carta, quindi tutto ciò ha senso non solo in  $\mathbb{R}^n$  ma anche in una varietà astratta  $M$ . Si ricordi altresì che  $X(f)$  e  $X.f$  sono notazioni equivalenti. Dalla proprietà della derivata del prodotto segue immediatamente che

$$X(f + g) = X(f) + X(g)$$

$$X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

$$X(cf) = cX(f)$$

per ogni costante  $c$  e funzioni lisce  $f, g$ . La terza condizione è equivalente al fatto che  $X(c) = 0$ .

**Definizione 2.4.1** (Derivazioni). *Sia  $M$  una varietà differenziabile. Una derivazione sul modulo delle funzioni lisce su  $M$  è una funzione  $\delta$  dall'insieme delle funzioni lisce in sé tale che*

$$(1) \quad \delta(f + g) = \delta(f) + \delta(g)$$

$$(2) \quad \delta(fg) = \delta(f)g + f\delta(g)$$

$$(3) \quad \delta(cf) = c\delta(f)$$

per ogni costante  $c$  e funzioni lisce  $f, g$ .

Nota. Alcuni tralasciano di includere la terza condizione nella definizione. Con la nostra definizione  $\delta(1) = \delta(1 \cdot 1) = 2\delta(1)$  per cui  $\delta(1) = 0$  e  $\delta(c) = c\delta(1) = 0$ . Altrimenti, le derivazioni possono non essere zero sulle costanti.

Questa definizione è molto comoda per formalismi che prescindono da coordinate e per generalizzazioni varie. Nel nostro contesto, le derivazioni non sono altro che i campi di vettori.

**Teorema 2.4.2.** *Per ogni derivazione  $\delta$  su una varietà  $M$  esiste un unico campo di vettori  $X$  su  $M$  tale che  $\delta(f) = X(f)$  per ogni funzione liscia su  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'unicità è facile: se  $df[X - Y] = 0$  per ogni  $f$  allora in ogni carta  $X - Y = 0$ . Viceversa, sia  $\delta$  una derivazione. Mettendoci sempre in carte locali, ogni funzione liscia ha uno sviluppo di Taylor (anche se siamo in più variabili<sup>3</sup>)

$$f(x) = f(x_0) + \sum_j (x - x_0)^j g_j(x - x_0)$$

---

<sup>3</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor's\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Taylor's_theorem)  
[http://it.wikipedia.org/wiki/Serie\\_di\\_Taylor](http://it.wikipedia.org/wiki/Serie_di_Taylor)

ove  $x^j$  denota la funzione che al punto  $x$  associa la  $j$ -esima coordinata e  $g_j$  sono opportune funzioni lisce tali che  $g_j(0) = (\partial f / \partial x_j)(x_0)$ . Da cui si ha

$$(4) \quad \delta(f) = \sum_j \delta((x - x_0)^j g_j(x - x_0))$$

$$(5) \quad = \sum_j \delta(x^j) g_j(x - x_0) + (x - x_0)^j \delta(g_j)(x - x_0)$$

calcolando in  $x_0$ , si ha

$$\delta(f)(x_0) = \sum_j \delta(x^j)(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = df_{x_0}[(\delta(x^1)(x_0), \dots, \delta(x^n)(x_0))]$$

per cui il campo di vettori  $X = \sum_j \delta(x^j) \partial_j$  soddisfa  $X(f) = \delta(f)$  per ogni  $f$ .  $\square$

**Esercizio 2.4.3.** *Controllare che  $X = \sum_j \delta(x^j) \partial_j$  sia un campo di vettori. Il problema è che l'abbiamo definito localmente, bisogna controllare che si comporti bene sui cambi di carta.*

SOLUZIONE DA LEGGERE SOLO DOPO AVER PROVATO DA SOLI!!

Si deve controllare che se abbiamo una derivazione  $\delta$  e  $\Phi$  è un diffeomorfismo tra aperti  $U$  e  $V$  con coordinate  $x^j$  e  $y^j$ , detti  $X = \sum_j \delta(x^j) \frac{\partial}{\partial x^j}$  e  $Y = \sum_j \delta(y^j) \frac{\partial}{\partial y^j}$  allora  $Y = \Phi_* X$ . Ricordiamo che per ogni funzione  $f$  su  $U$  si ha  $\delta(f) = \sum \delta(x^j) \frac{\partial f}{\partial x^j}$ . Scriviamo  $\Phi$  in coordinate rispetto a  $y^j$ :

$$\Phi(x) = (\Phi^1(x), \dots, \Phi^n(x))$$

Il campo  $Y$  nel punto  $y = \Phi(x)$  si scrive come

$$\sum_k \delta(y^k) \frac{\partial}{\partial y^k} = \sum_k \delta(\Phi^k(\Phi^{-1}(y))) \frac{\partial}{\partial y^k} = \sum_k \delta(\Phi^k(x)) \frac{\partial}{\partial y^k}$$

d'altronde, il campo  $\Phi_* X$  nel punto  $\Phi(x)$  si scrive come

$$\begin{aligned} d\Phi_x[X] &= d\Phi_x \begin{bmatrix} \delta(x^1) \\ \vdots \\ \delta(x^n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_j \frac{\partial \Phi^1}{\partial x^j} \delta(x^j) \\ \vdots \\ \sum_j \frac{\partial \Phi^n}{\partial x^j} \delta(x^j) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_k \left( \sum_j \frac{\partial \Phi^k}{\partial x^j} \delta(x^j) \right) \frac{\partial}{\partial y^k} = \sum_k \delta(\Phi^k(x)) \frac{\partial}{\partial y^k} \end{aligned}$$

e quindi i due campi  $Y$  e  $\Phi_* X$  coincidono.  $\square$

Essendo funzioni dallo spazio delle funzioni in sé, le derivazioni si possono comporre. La composizione di due derivazioni però, è moralmente una derivata seconda. Per esempio

$$X(Y(f))$$

è la derivata seconda di  $f$  prima rispetto a  $Y$  e poi rispetto a  $X$ . Occhio, se i campi non son campi coordinati, non c'è nessun motivo che il lemma di Schwartz valga! (ossia  $X(Y(f))$  non ha motivi di essere uguale a  $Y(X(f))$ ) E infatti di solito non vale. La magia però è che ciò che misura quanto due campi non commutano è ancora un campo. Ossia la differenza delle derivate in croce è ancora un campo. Detto meglio:

**Teorema 2.4.4.** *Date due derivazioni  $\delta_1$  e  $\delta_2$  su una varietà  $M$ , il loro commutatore  $\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$  è ancora una derivazione.*

DIMOSTRAZIONE. Controlliamo le tre proprietà delle derivazioni. Per ogni costante  $c$  e funzioni lisce  $f, g$  su  $M$  si ha:

$$\delta_1(\delta_2(cf)) = \delta_1(c\delta_2(f)) = c\delta_1\delta_2(f)$$

e quindi lo stesso vale per  $\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$ .

$$\delta_1(\delta_2(f+g)) = \delta_1(\delta_2(f) + \delta_2(g)) = \delta_1(\delta_2(f)) + \delta_1(\delta_2(g))$$

e quindi lo stesso vale per  $\delta_1 \circ \delta_2 - \delta_2 \circ \delta_1$ . Vediamo ora cosa succede a  $\delta_1(\delta_2(fg))$ .

$$\begin{aligned} \delta_1(\delta_2(fg)) &= \delta_1(\delta_2(f)g + f\delta_2(g)) = \\ &= \delta_1(\delta_2(f))g + \delta_2(f)\delta_1(g) + \delta_1(f)\delta_2(g) + f\delta_1(\delta_2(g)) \end{aligned}$$

Il termine  $\delta_2(f)\delta_1(g) + \delta_1(f)\delta_2(g)$  non ci dovrebbe essere per avere una derivazione, ma questo termine sparisce magicamente quando si fa  $\delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$  che quindi risulta essere una derivazione.  $\square$

Abbiamo visto quindi che dati due campi  $X$  e  $Y$ , la differenza di derivate seconde  $XY - YX$  è ancora un campo.

**Definizione 2.4.5** (Bracket). *Il bracket, bracket di Lie, o commutatore, di due campi di vettori  $X$  e  $Y$  su una varietà  $M$  è il campo di vettori definito da*

$$[X, Y] = XY - YX$$

Nota. In coordinate locali possiamo fare  $X(Y)$  derivando le componenti di  $Y$  lungo  $X$ . Ossia, se  $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$  si considera il campo  $(X(Y^1), \dots, X(Y^n))$ . Perché questo non è un campo di vettori? (controllare cosa succede sui cambi di coordinate.)

#### 2.4.2. Esercizi.

**Esercizio 2.4.6.** *Siano in  $X, Y$  i seguenti campi in  $\mathbb{R}^2$*

- $X = \sin(x+y)\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$
- $Y = y\frac{\partial}{\partial y}$

*Si calcoli  $[X, Y]$*

**Esercizio 2.4.7.** *Siano in  $X, Y$  i seguenti campi in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$*

- $X = x\sqrt{x^2 + y^2}\partial_y - y\sqrt{x^2 + y^2}\partial_x$

- $Y = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_y$

*Si calcoli  $[X, Y]$*

**Esercizio 2.4.8.** *Siano in  $X, Y$  i seguenti campi in  $\mathbb{R}^2$*

- $X = x\partial_y - y\partial_x$
- $Y = x\partial_x + y\partial_y$

*Si calcoli  $[X, Y]$*

## Flussi, derivata di Lie di campi e forme, campi coordinati

### 3.1. Lezione 9: Flussi e bracket

**3.1.1. Flusso (flow) di un campo e derivata di Lie.** Un modo per ottenere campi di vettori è considerare la derivata di un flusso. Per esempio, guardando le immagini meteo dal satellite, possiamo vedere che il flusso delle nubi può essere descritto come una famiglia continua di diffeomorfismi  $\Phi_t$  della sfera: Al tempo  $t$ ,  $\Phi_t(x)$  ci dice dove il vento ha portato la particella che stava in  $x$  al tempo zero. La derivata della posizione di ogni particella, ossia la derivata rispetto al tempo di  $\Phi_t(x)$ , calcolata per esempio per  $t = 0$ , ci dà la direzione e intensità del vento nel punto  $x$  al tempo zero. Ossia un campo di vettori tangenti alla sfera  $S^2$ .

Viceversa, se abbiamo un campo di vettori  $X$  su una varietà  $M$  per ogni  $x$  possiamo risolvere localmente il seguente problema di cauchy:

$$(6) \quad \begin{cases} \gamma'_x(t) = X(\gamma(t)) \\ \gamma_x(0) = x \end{cases}$$

Le soluzioni si dicono *linee di flusso*. Per il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di un problema di cauchy con dati lisci e per il teorema di dipendenza continua (e liscia) dai dati iniziali, l'applicazione  $\phi_t(x) = \gamma_x(t)$  risulta un diffeomorfismo di  $M$ . In oltre l'applicazione  $\phi$  come funzione anche di  $t$  ossia

$$\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \rightarrow M \quad (t, x) \mapsto \phi_t(x)$$

è liscia e si chiama flusso associato a  $X$ .

In fine,  $\phi$  ha un'altra bella proprietà derivante dai teoremi di esistenza e unicità:  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ .

**Osservazione 3.1.1.** *Tutto ciò è definito localmente ma le compatibilità dei cambi di carta assicurano che  $\phi$  è definito globalmente su  $M$ .*

A cosa serve un flusso? A fare le derivate. Per ogni oggetto  $O$  di natura lineare, che possa essere mandato avanti e indietro con diffeomorfismi, si definisce la derivata di Lie di  $O$  nella direzione  $X$  come

$$L_X(O) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_t^*O) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_\varepsilon^*(O) - O}{\varepsilon}$$

per questo serve che  $O$  sia di natura lineare (per poter fare la sottrazione) e che sia “pull-backabile”.

Va da sé che adesso ci metteremo a calcolare derivate di Lie di campi di vettori e forme (che per ora sono gli unici oggetti che sappiamo sommare e di cui sappiamo fare il pull-back.)

Cominciamo dalle funzioni.

**Teorema 3.1.2.** *Per ogni campo di vettori  $X$  su  $M$  e per ogni funzione liscia  $f$  su  $M$  si ha  $L_X(f) = X.f$  (tanto per cambiare.)*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\phi_t$  il flusso associato a  $X$ :

$$L_X(f) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}f(\phi_t(x)) = df[X] = X(f).$$

□

**3.1.2.  $L_X Y$  e bracket.** Che sarà mai  $L_X Y$ ? Allora, fissiamo un po’ di notazioni. Siamo su una varietà  $M$  di dimensione  $n$  su cui abbiamo due campi vettoriali  $X$  e  $Y$ . Sia  $\phi_t$  il flusso associato a  $X$ . Lavoriamo in una carta locale, così che  $X$  e  $Y$  risultano semplicemente funzioni  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$  con  $U \subset \mathbb{R}^n$ .  $L_X Y$  è più o meno la derivata di  $Y$  rispetto a  $X$ , sarà mica che  $L_X Y$  è  $X(Y)$ ? NO. Facciamo i conti.

Per prima cosa cerchiamo di capire chi è il differenziale di  $\phi_t$ . Essendo  $\phi_t$  definito via la soluzione del problema di cauchy 6, si ha

$$\phi_t(p) = p + X(p)t + o(t)$$

dove  $o(t)$  raccoglie tutti i termini di ordine superiore in  $t$ . per cui

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_t(p + \varepsilon Y) - \phi_t(p)}{\varepsilon} &= Y + t \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{X(p + \varepsilon Y) - X(p)}{\varepsilon} \right) + o(t) \\ &= Y + tY(X) + o(t) \end{aligned}$$

da cui si evince subito che la cosa puzza un po’. Ma già che sei all’inferno, abbraccia il diavolo:

$$(7) \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(d\phi_t Y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi_t Y - Y}{t} = Y(X).$$

Col diavolo come amico, siamo pronti a calcolare  $L_X Y$ .

$$\begin{aligned} L_X Y &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\phi_t^* Y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(Y) - Y}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi_t^{-1} Y(\phi_t(p)) - Y(p)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi_t^{-1}(Y(\phi_t(p)) - d\phi_t(Y(p)))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\phi_t(p)) - d\phi_t(Y(p))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\phi_t(p)) - Y(p) + Y(p) - d\phi_t(Y(p))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y(\phi_t(p)) - Y(p)}{t} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\phi_t(Y(p)) - Y(p)}{t} = XY - YX. \end{aligned}$$

ebbene si, abbiamo dimostrato il seguente

**Teorema 3.1.3.**  $L_X Y = [X, Y]$ .

**Osservazione 3.1.4.** Si noti che dalla definizione segue immediatamente, che come derivazioni, ossia come operatori sullo spazio delle funzioni, si ha

$$L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X, Y]}$$

Queste ultime due cose sono importanti. Per cui le riscriviamo per non dimenticarle:

$$(8) \quad L_X Y = [X, Y] = -[Y, X] = -L_Y X$$

$$(9) \quad L_X L_Y - L_Y L_X = L_{[X, Y]}$$

### 3.2. Lezione 10: Derivata di Lie di forme

**3.2.1.  $L_X$  di forme.** Veniamo alla derivata di Lie delle forme.

**Teorema 3.2.1.** Sia  $\omega$  una 1-forma su una varietà  $M$ . per ogni coppia  $X, Y$  di campi di vettori su  $M$  si ha

$$L_X(\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y])$$

ove si è usata l'abbreviazione  $\omega(Y)$  per indicare la contrazione  $i_Y \omega$ .  
Ossia

$$i_Y(L_X \omega) = L_X i_Y \omega - i_{L_X Y} \omega$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\phi_t$  il flusso associato a  $X$ . Occhio alla differenza tra  $L_X(\omega(Y))$  e  $(L_X \omega)(Y)$ , ossia tra  $i_Y L_X \omega$  e  $L_X(i_Y \omega)$ . In carte locali

$$\begin{aligned}
(L_X\omega)(Y)(p) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* \omega(Y)(p) - \omega(Y)(p)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\phi_{t*} Y)(\phi_t(p)) - \omega(Y)(p)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\phi_{t*} Y)(\phi_t(p)) - \omega(Y)(\phi_t(p)) + \omega(Y)(\phi_t(p)) - \omega(Y)(p)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(\phi_{t*} Y)(\phi_t(p)) - \omega(\phi_{t*} \phi_t^* Y)(\phi_t(p)) + \omega(Y)(\phi_t(p)) - \omega(Y)(p)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \phi_t^* \omega \left( \frac{Y - \phi_t^*(Y)}{t} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\omega(Y)(\phi_t(p)) - \omega(Y)(p)}{t} \\
&= -\omega(L_X Y) + X(\omega(Y)).
\end{aligned}$$

□

**Definizione 3.2.2** (Contrazione di una  $k$ -forma). *Se  $\omega$  è una  $(k+1)$ -forma e  $X$  è un campo di vettori su  $M$ , si definisce la contrazione  $i_X \omega$ , che è una  $k$ -forma, localmente come*

$$i_X \omega(Y_1, \dots, Y_k) = \omega(X, Y_1, \dots, Y_k)$$

**Esempio 3.2.3.** *Occhio: Se  $\omega = \alpha(x_1, x_2) dx^1 \wedge dx^2$  è una 2-forma su  $\mathbb{R}^2$ , allora*

$$\omega(X, Y) = \alpha \det[XY]$$

e NON  $\alpha X^1 Y^2$ . Per cui,

$$i_X \omega = \alpha(X^1 dx^2 - X^2 dx^1)$$

**Teorema 3.2.4.** *Se  $\omega$  una 1-forma e  $X$  un campo di vettori su una varietà  $M$ , allora*

$$L_X \omega = i_X d\omega + d(i_X \omega)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Si può fare in modo intrinseco, ma per abituarci a fare i conti è bene sporcarsi un po' le mani. Bisogna dimostrare che per ogni  $X, Y$  si ha

$$i_Y(L_X \omega) = i_Y(i_X d\omega) + i_Y d(i_X \omega)$$

Visto che sappiamo chi è  $(L_X \omega)(Y)$  ciò è equivalente a

$$X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) = d\omega(X, Y) + Y(\omega(X))$$

che riscriviamo in modo piú simmetrico come

$$X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) = d\omega(X, Y) + \omega([X, Y]).$$

Poniamo  $X = \sum_i X^i \partial_i$ ,  $Y = \sum_i Y^i \partial_i$ ,  $\omega = \sum_i \alpha_i dx^i$ .

Vai con  $(X(\omega(y)))$ :

$$X(\omega(Y)) = \sum_i X^i \partial_i \left( \sum_j \alpha_j Y^j \right) = \sum_{i,j} X^i Y^j \partial_i \alpha_j + \alpha_j X^i \partial_i Y^j$$

simmetricamente

$$Y(\omega(X)) = \sum_i Y^i \partial_i \left( \sum_j \alpha_j X^j \right) = \sum_{i,j} Y^i X^j \partial_i \alpha_j + \alpha_j Y^i \partial_i X^j$$

Adesso è il turno di  $\omega([X, Y])$ ; in coordinate si ha

$$XY = \sum_i X^i \partial_i (Y) = \sum_{i,j} X^i \partial_i Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$YX = \sum_i Y^i \partial_i (X) = \sum_{i,j} Y^i \partial_i X^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$XY - YX = \sum_{i,j} (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \partial_j$$

per cui

$$\omega([X, Y]) = \sum_j \alpha_j \left( \sum_i X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j \right) = \sum_{i,j} \alpha_j (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j)$$

ed infine,  $d\omega = \sum_{i,j} \partial_i \alpha_j dx^i \wedge dx^j$ , per cui

$$d\omega(X, Y) = \sum_{i,j} \partial_i \alpha_j (X^i Y^j - X^j Y^i)$$

mettendo insieme tutti questi conti abbiamo

$$\begin{aligned} & X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j \partial_i \alpha_j + \alpha_j X^i \partial_i Y^j - Y^i X^j \partial_i \alpha_j - \alpha_j Y^i \partial_i X^j \\ &= \sum_{i,j} \partial_i \alpha_j (X^i Y^j - Y^i X^j) + \sum_{i,j} \alpha_j (X^i \partial_i Y^j - Y^i \partial_i X^j) \\ &= d\omega(X, Y) + \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

□

Notare che abbiamo appena dimostrato che

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

questa formula, in alcuni testi, è usata per dare la definizione di differenziale esterno di una forma.

È arrivato il momento di fare la derivata di Lie delle  $k$ -forme. Invece di fare i conti, facciamoci furbi.

**Lemma 3.2.5.** *Se  $\alpha, \beta$  sono forme differenziali e  $X$  è un campo di vettori su una varietà  $M$ , allora*

$$L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X \beta.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per prima cosa osserviamo che il pull-back commuta col  $\wedge$ , ossia per ogni diffeomorfismo  $\varphi$  vale  $\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta$ . A questo punto la dimostrazione è la stessa della regola della derivata di un prodotto di funzioni.  $\square$

Sia ora  $\omega = \sum_I \alpha_I dx^I$  una  $k$ -forma e  $X$  un campo di vettori su  $M$ . Per quanto appena detto

$$\begin{aligned} L_X \omega &= \sum_I L_X(\alpha_I dx^I) \\ &= \sum_I \left( L_X(\alpha_I) dx^I + \alpha_I \sum_j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge L_X(dx^{i_j}) \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right) \end{aligned}$$

Usando la multilinearità di ogni termine  $dx^I$  e il Teorema 3.2.1 si ottiene immediatamente l'analogo per le  $k$ -forme:

**Teorema 3.2.6.** *Sia  $\omega$  una  $k$ -forma su una varietà  $M$  e sia  $X$  un campo di vettori su  $M$ . Per ogni  $k$ -upla  $Y_1, \dots, Y_k$  di campi di vettori su  $M$  si ha*

$$L_X(\omega)(Y_1, \dots, Y_k) = X(\omega(Y_1, \dots, Y_k)) - \sum_j \omega(Y_1, \dots, [X, Y_j], \dots, Y_k).$$

**Osservazione 3.2.7.** *Si noti che ciò assomiglia alla grande alla regola di derivazione di un prodotto. Infatti con una notazione naïf possiamo scrivere*

$$\frac{\partial}{\partial x}(\omega Y_1 \dots Y_k) = \frac{\partial \omega}{\partial x} Y_1 \dots Y_k + \omega \frac{\partial Y_1}{\partial x} \dots Y_k + \cdots + \omega Y_1 \dots \frac{\partial Y_k}{\partial x}.$$

Allo stesso modo si dimostra che il Teorema 3.2.4 vale in generale:

**Teorema 3.2.8.** *Per ogni  $k$ -forma  $\omega$  su una varietà  $M$  e per ogni campo di vettori  $X$  su  $M$  si ha:*

$$L_X \omega = i_X d\omega + d(i_X \omega)$$

**Esercizio 3.2.9.** *Si dimostri che per ogni  $k$ -forma  $\omega$  su una varietà  $M$  e per ogni  $(k+1)$ -upla di campi di vettori  $X_0, \dots, X_k$  su  $M$  vale*

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k) \end{aligned}$$

ove il simbolo  $(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)$  è un'abbreviazione per dire che dalla  $(k+1)$ -upla  $(X_0, \dots, X_k)$  è stato rimosso l'elemento marcato con  $\hat{\cdot}$ . (Hint: O si fa il conto brutale a mano oppure si fa per induzione: per le 1-forme già è venuto fuori nella dimostrazione de Teorema 3.2.4, poi scatta l'induzione con l'aiuto di 3.2.6.)

### 3.3. Lezione 11: Interpretazione geometrica di $[X, Y]$

**3.3.1. Commenti finali e campi coordinati.** Tutto questo ambaradan su  $L_X$  merita un'apposita sezione di commenti. Torniamo a guardare le equazioni (8) e (9). La (9) ci dice che

$$L_X L_Y - L_Y L_X - L_{[X, Y]} = 0$$

questa cosa si può parafrasare dicendo che “ $L_X$  ha curvatura zero” e vedremo che questa equazione sta alla base della geometria Riemanniana, in quanto andremo a definire nuovi modi di derivare che non avranno curvatura zero. Il difetto di validità di questa formula rispecchia la nozione intuitiva di curvatura di una sottovarietà.

Perchè dovremmo andarci a cercarci un differente modo di fare le derivate? Questo ce lo dice la formula (8):

$$L_X Y = -L_Y X = [X, Y]$$

da questa relazione infatti si ha che “fare la derivata di  $X$  rispetto a  $Y$  o farla di  $Y$  rispetto a  $X$  cambia solo il segno”. In particolare la derivata di  $Y$  rispetto a  $X$  “dipende” dalle derivate di  $X$ . Questo non ci piace, vorremo trovare un modo di fare la derivata che sia quello che abbiamo in mente per  $\mathbb{R}^n$  ossia, vorremo che, nel punto  $p$ , la derivata di  $Y$  rispetto a  $X$  dipenda solo dal vettore  $X$  nel punto  $p$  e non da cosa fa  $X$  vicino a  $p$ .

**Esempio 3.3.1.** *Prendete la sfera unitaria  $S^2$  nello spazio  $\mathbb{R}^3$ . E considerate un campo di vettori  $X$  tangente a  $S^2$  e non ovunque nullo. Fate ora  $L_X X$ . Questo, in  $S^2$  deve essere zero perché  $L_X X = -L_X X$ . Ma ovviamente un campo di vettori tangente a  $S^2$  non può essere costante in  $\mathbb{R}^3$ .*

Ancora sulla formula (8). La riscriviamo così:

$$L_X Y - L_Y X - [X, Y] = [X, Y]$$

La quantità  $L_X Y - L_Y X - [X, Y]$  si chiamerà *torsione* (la definizione di torsione sarà data per i nuovi modi di derivare che definiremo.) Possiamo dire che “la torsione della derivata di Lie è il bracket”.

Questo bracket è un concetto importante. Vediamo adesso il significato geometrico che ha.

Vogliamo capire chi sia  $L_X Y$ . Usiamo la notazione di campi di vettori come classe di equivalenza di curve. Siano  $X$  e  $Y$  due campi di vettori su un aperto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Sia  $\phi$  il flusso associato a  $X$  e  $\psi$  quello associato a  $Y$ . Nel punto  $p$ , il vettore  $X(p)$  è quindi rappresentato dalla linea di flusso di  $\phi$  passante per  $p$ , mentre  $Y$  è rappresentato dalle linee di flusso di  $\psi$ .

Per fare  $L_X Y$  dobbiamo stimare la differenza tra  $\phi_t^* Y$  e  $Y$ . Chi è  $\phi_t^* Y$  nel punto  $p$ ?

- Prima ci dobbiamo mettere in  $\phi_t(p)$  quindi seguiamo la linea di flusso di  $\phi$  per un tempo  $t$ .
- Poi dobbiamo considerare  $Y$  nel punto  $\phi_t(p)$ , ossia la linea di flusso di  $\psi$  passante per  $\phi_t(p)$ . Chiamiamo tale linea  $\gamma_{\phi_t(p)}$ .
- A questo punto si fa il pull-back, che per i vettori visti come classe di equivalenza di curve non è altro che applicare  $\phi_t^{-1}$  (vedi definizione di pull-back.) Ma  $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ . Cioè dobbiamo seguire a ritroso le linee di flusso di  $\phi$  che partono dai punti di  $\gamma_{\phi_t(p)}$ , per un tempo  $t$ . Quello che otteniamo è una nuova curva  $\phi_t^{-1}(\gamma_{\phi_t(p)})$  che passa per  $p$ . Sarà mica che il risultato è una linea di flusso per  $\psi$  in  $p$ ? NO. E il commutatore misura esattamente questo.
- Ossia: se partiamo da  $p$ , seguiamo il flusso  $\phi$  per un tempo  $t$ , poi quello  $\psi$  per un tempo  $s$  e poi quello  $\phi$  a ritroso per un tempo  $t$  NON OTTENIAMO lo stesso risultato che avremmo ottenuto seguendo il flusso  $\psi$  per un tempo  $s$ .

La seguente, brutta figura vorrebbe rappresentare la situazione:

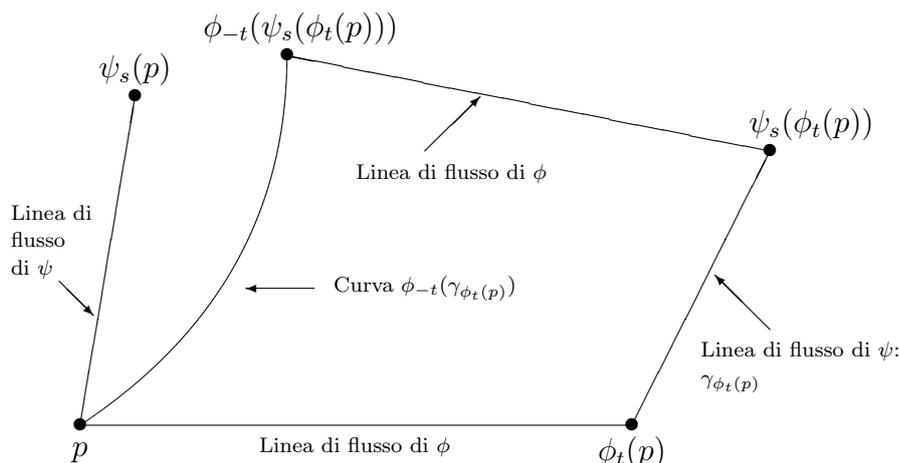


FIGURA 1. Le linee di flusso non si chiudono

Il commutatore è la derivata dello scarto tra  $\psi_s(p)$  e  $\phi_t^{-1}(\psi_s(\phi_t(p)))$

**Osservazione 3.3.2.** Se  $X$  e  $Y$  sono campi coordinati in  $\mathbb{R}^2$  allora  $[X, Y] = 0$ .

Questo non è altro che il lemma di Schwartz. Se  $X$  e  $Y$  sono campi coordinati le loro linee di flusso non sono altro che gli assi coordinati e quindi si chiudono.

**Teorema 3.3.3.** Se  $X_1, \dots, X_n$  sono campi di vettori su una varietà  $M$  entrambi mai nulli su un aperto  $U$  e tali che  $[X_i, X_j] = 0$  su  $U$ , allora  $X_1, \dots, X_n$  sono campi coordinati su un aperto non vuoto  $U' \subset U$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per semplicità ci mettiamo in dimensione due. Se  $[X, Y] = 0$  in un punto  $p$ , allora con le notazioni di cui sopra, la

curva  $\phi_t^{-1}(\gamma_{\phi_t(p)})$  è tangente alla linea di flusso di  $\psi$  per  $p$ . Se questo succede in ogni  $p$  allora la curva  $\phi_t^{-1}(\gamma_{\phi_t(p)})$  è una linea di flusso per  $\psi$  cioè i flussi commutano. Per cui dato un punto  $p$ , le funzioni  $x^1(q)$  e  $x^2(q)$  che associano ad un punto  $q$  i tempi  $(t, s)$  tali che  $q = \phi_t(\psi_s(p))$  sono coordinate locali su un aperto abbastanza piccolo  $U'$  contenente  $p$ .  $\square$

**Esercizio 3.3.4.** *Scrivere estremamente dettagliat — in modo estremamente dettagliato la dimostrazione di quest'ultimo teorema in dimensione generica. (occhio al fatto che potrebbe succedere  $\phi_t(p) = \phi_s(p)$ .)*

Una versione discreta di tale fenomeno è rappresentata dalle mappe delle città. Vi è mai capitato di perdervi in una città e pensare “eppure ho girato tre volte a sinistra, dovrei essere tornato al punto di partenza...” ecco, vuol dire che la città non è un reticolo quadrangolare. Nelle città quarangolari come alcune parti di Barcelona, New York o Buenos Aires, si possono dare coordinate dicendo “vai tre blocchi a destra ed cinque a sinistra”. Provate a farlo nel centro di bologna...

Per finire, una curiosità. Salt Lake City (Utah, USA) è la città dei mormoni. In centro (nel vero senso della parola) c'è il Tempio. Le strade, gli indirizzi e tutto sono date in coordinate cartesiane rispetto al Tempio (tipo terza strada a nord incrocio con quinta a ovest.) Mi piacerebbe sapere che coordinate ha sulla superficie terrestre il punto antipodale al Tempio! Se vedo un mormone perso nel centro di bologna glielo chiedo.

### 3.4. Lezione 12: Esercitazione

Svolti esercizi su integrazione di forme differenziali.

#### 3.4.1. Esercizi.

**Esercizio 3.4.1.** *Controllare tutti i passi della definizione del flusso associato ad un campo di vettori e dimostrarne tutte le affermazioni.*

**Esercizio 3.4.2** (Identità di Jacobi). *Dimostrare che per ogni tripla  $X, Y, Z$  di campi di vettori su una varietà  $M$  si ha*

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

**Esercizio 3.4.3.** *Si dimostri che per ogni diffeomorfismo  $\phi$  tra due varietà e per ogni forma  $\omega$  vale  $\phi^*d\omega = d(\phi^*\omega)$ . Ossia, il pull-back commuta con la differenziazione.*

**Esercizio 3.4.4.** *Si dimostri che per ogni campo di vettori  $X$  su  $M$  e per ogni forma  $\omega$  su  $M$  vale  $L_X d\omega = d(L_X \omega)$*

**Esercizio 3.4.5.** *Si dimostri che la contrazione di una  $k + 1$ -forma definisce effettivamente una  $k$ -forma (si deve controllare cosa succede sui cambi di carta.)*

**Esercizio 3.4.6.** Siano  $X$  e  $Y$  due campi di vettori su una varietà bidimensionale  $M$  tali che in un punto  $p \in M$  i vettori  $X(p)$  e  $Y(p)$  siano linearmente indipendenti. Siano  $\Phi$  e  $\Psi$  i flussi rispettivamente di  $X$  e  $Y$ . Sia  $F$  l'applicazione da  $\mathbb{R}^2 \rightarrow M$  definita da

$$F(t, s) = \Psi_s(\Phi_t(p))$$

Si dimostri che esiste un intorno  $U$  di zero in  $\mathbb{R}^2$  tale che la restrizione di  $F$  a  $U$  sia un diffeomorfismo con l'immagine. Si dimostri che  $F^*Y = \partial_s$ . Vale anche  $F^*X = \partial_t$ ?

**Esercizio 3.4.7.** Scrivere esplicitamente il flusso associato al campo  $x\partial_y - y\partial_x$  in  $\mathbb{R}^2$ .

**Esercizio 3.4.8.** Scrivere il campo  $X_1$  associato al seguente flusso  $\phi_t(x, y, z) = (x \cos t + y \sin t, -x \sin t + y \cos t, z + t)$ . Trovare altri due campi  $X_2$  e  $X_3$  su  $\mathbb{R}^3$  tali che  $X_1, X_2, X_3$  sia una terna di campi coordinati e scrivere esplicitamente il cambio di coordinate.

**Esercizio 3.4.9.** Sia  $\omega = xyz \, dz \wedge dt$  una 2-forma in  $\mathbb{R}^4$ . Sia  $X$  il campo associato al flusso  $\phi_s(x, y, z, t) = (x + s, y, z + 2s, t - s)$ . Si calcoli  $L_X\omega$ .

**Esercizio 3.4.10.** Si considerino i campi dati sul mappamondo dalle coordinate locali date da latitudine e longitudine. Si scrivano esplicitamente e si calcoli il loro bracket.

**Esercizio 3.4.11.** Si calcoli  $L_X\omega$  per un po' di forme e campi presi a caso.

## Fibrati vettoriali e tensori

### 4.1. Lezione 13: Fibrati vettoriali (Vector Bundles)

Dopo che abbiamo imparato a fare i conti in coordinate — cosa fondamentale perché prima o poi il momento in cui uno deve fare il contazzo nella vita arriva — è giunta l'ora di dotarsi di mezzi e terminologia più intrinseci per poter dimostrare i teoremi senza andare sempre in coordinate.

**4.1.1. Fibrati vettoriali.** In soldoni, un fibrato vettoriale su  $M$  è una famiglia di spazi vettoriali, uno per ogni punto di  $M$ , che varia in modo liscio (ricorda qualcosa?) La parola in inglese per fibrato è “bundle”.

**Definizione 4.1.1** (Fibra). *Data un'applicazione tra insiemi  $\pi : E \rightarrow M$ , l'insieme  $\pi^{-1}(x)$  si chiama fibra (fiber) di  $\pi$  su  $x$  e, se non c'è ambiguità su chi sia  $\pi$ , si denota con il simbolo  $E_x$ .*

**Definizione 4.1.2** (Fibrato vettoriale). *Un fibrato vettoriale reale di rango  $k$  su una varietà  $m$ -dimensionale  $M$  è il dato di una varietà  $E$  di dimensione  $m + k$ , detta spazio totale e di una proiezione  $\pi : E \rightarrow M$  tale che*

- *Il differenziale di  $\pi$  sia surgettivo in ogni punto;*
- *ogni fibra  $E_x$  sia diffeomorfa a  $\mathbb{R}^k$ , dal quale eredita la struttura lineare;*
- *per ogni  $x \in M$  esiste un intorno aperto  $U$  di  $x$  tale che esista un diffeomorfismo  $f : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \pi^{-1}(U)$  tale che  $f(x, v) \in E_x$  e tale che per ogni  $x$  l'applicazione  $v \mapsto f(x, v)$  sia un isomorfismo lineare. Tale isomorfismo si chiama una banalizzazione locale.*

Siccome la proiezione fa parte integrante della definizione, notazioni standard per un fibrato sono  $E \rightarrow M$ ,  $\pi : E \rightarrow M$  e simili. Nonostante ciò, per noi sarà sempre chiaro chi sia la proiezione quindi indicheremo un fibrato  $E \rightarrow M$  semplicemente dicendo chi è  $E$ .

**Definizione 4.1.3.** *Un'applicazione tra fibrati vettoriali è un'applicazione che commuta con le proiezioni ed è lineare sulle fibre. Ossia, un'applicazione (liscia) tra  $\pi_E : E \rightarrow M$  e  $\pi_F : F \rightarrow N$  è un'applicazione (liscia)  $\Phi : E \rightarrow F$  che manda fibre in fibre e tale che per ogni fibra,*

la restrizione  $\Phi_x : E_x \rightarrow F_{\pi_F(\Phi(x))}$  sia lineare.  $\Phi$  è un isomorfismo se è un diffeomorfismo che sia un isomorfismo lineare sulle fibre.

**Definizione 4.1.4.** Un fibrato su  $M$  si dice banale se è isomorfo a un fibrato prodotto  $M \times \mathbb{R}^k$ .

**Definizione 4.1.5** (Push-forward). Se  $\pi : E \rightarrow M$  è un fibrato e  $\varphi : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo, il fibrato push-forward di  $E$  è il fibrato  $\varphi \circ \pi : E \rightarrow N$ . Notare che  $E$  è isomorfo al suo push-forward.

Si può definire similmente il pull-back nel caso  $\varphi : N \rightarrow M$  sia una sommersione (abbia sempre il differenziale non nullo) noi ci limiteremo a diffeomorfismi per cui per noi il pull-back sarà il push-forward dell'inversa.

**4.1.2. Fibrato tangente di una varietà.** Un modo standard di costruire fibrati vettoriali è il seguente. Data una varietà  $M$  con atlante  $\mathcal{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$  per ogni  $\alpha, \beta$  tali che  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  si considera una funzione liscia  $f_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(k, \mathbb{R})$  in modo tale che sia soddisfatta la condizione di co-ciclo su  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$

$$f_{\alpha\beta} f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$$

a questo punto si considerano i prodotti  $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$  e si identificano le fibre di  $U_\alpha$  con quelle di  $U_\beta$  via  $f_{\alpha\beta}$ . Il risultato è un fibrato  $E$  (e un atlante differenziale per  $E$  è dato dalle carte locali  $U_\alpha \times \mathbb{R}^k$ ) Vi viene in mente nulla?

Vediamo ora come si possono mettere insieme tutti gli spazi tangenti di una varietà e formare un fibrato.

**Definizione 4.1.6.** Il fibrato tangente di  $\mathbb{R}^n$  è il fibrato banale su  $\mathbb{R}^n$

$$T(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

dove si identifica il vettore  $v$  tangente a  $x$ , visto come classe di equivalenza di curve  $\gamma$  per  $x$ , con il punto  $(x, \gamma'(0))$ .

**Definizione 4.1.7.** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e sia  $\mathcal{U} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)$  un atlante differenziabile. Il fibrato tangente a  $M$  è definito come segue. Su ogni aperto  $U_\alpha$  si considera il pull-back  $TU_\alpha$  del fibrato tangente di  $\varphi_\alpha(U)$  (che è un fibrato banale su  $U_\alpha$ .) Per cui la fibra di  $x \in U_\alpha$  è lo spazio tangente di  $\varphi_\alpha(x)$  in  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ .

Adesso si identificano le fibre su  $x$  dei fibrati  $TU_\alpha$  e  $TU_\beta$  via  $(x, v) = (x, w)$  se  $d(\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1})[w] = v$ .

In pratica, abbiamo preso come funzioni  $f_{\alpha\beta}$  i differenziali  $d(\varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1})$ .

Il fibrato tangente di  $M$  si indica con  $TM$ . La notazione standard per la fibra su  $x$  di  $TM$  è  $T_x M$ .

**Esercizio 4.1.8.** Verificare che  $T_x M$  è lo spazio tangente a  $x$  in  $M$ .

**Teorema 4.1.9.** Sia  $f : M \rightarrow N$  una applicazione liscia. Allora  $df : TM \rightarrow TN$  è un'applicazione tra fibrati.

DIMOSTRAZIONE. La verifica è immediata in carte locali.  $\square$

**4.1.3. Qualche esempio.** Il fibrato tangente lo abbiamo già visto e costituisce un esempio fondamentale di fibrato vettoriale.

**Teorema 4.1.10 (Esercizio).** *Se  $M$  è semplicemente connessa, ogni fibrato lineare su  $M$  è banale.*

DIMOSTRAZIONE. Diamo solo l'idea lasciando i dettagli per esercizio. Si parte da un atlante localmente finito e relative banalizzazioni locali. Si costruisce quindi una banalizzazione globale sfruttando la condizione di cociclo dei cambi di carta.  $\square$

Il cerchio  $S^1$  non è semplicemente connesso. Quanti fibrati ci sono su  $S^1$ ?

**Esempio 4.1.11.** *Il fibrato tangente di  $S^1$  è banale.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definita da  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ . Notare che se  $\gamma(t) = \gamma(s)$  allora  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(s)$ . Ciò definisce un campo di vettori  $X$  mai nullo su  $S^1$ . La banalizzazione di  $TS^1$  è data da

$$(p, s) \in S^1 \times \mathbb{R} \mapsto (p, X(p)s)$$

$\square$

**Esempio 4.1.12.** *Il nastro di Möbius è un fibrato non banale su  $S^1$ . Chi è il suo fibrato tangente?*

**Esempio 4.1.13.** *Il fibrato normale a  $S^2$  è un fibrato banale. Il fibrato tangente di  $S^2$  che dimensione ha? È banale?*

**Esempio 4.1.14.** *Le forme bilineari simmetriche costituiscono uno spazio vettoriale. Dato un atlante di una varietà  $n$ -dimensionale, il fibrato delle forme bilineari su  $TM$  è definito in modo simile al tangente: sugli aperti banalizzanti per  $TM$  nel modo ovvio fibra per fibra, ed usando il differenziale dei cambi di carta per incollare il tutto.*

**4.1.4. Operazioni naturali, sui fibrati.** Quest'ultimo esempio (4.1.14) che sembra buttato lì un po' a caso, è invece molto importante, per cui lo riprendiamo e formalizziamo il procedimento. Cosa abbiamo fatto? Abbiamo considerato una costruzione naturale fibra per fibra ed incollato il tutto. L'importante è tenere d'occhio i cambi di carta.

Questo giochino si può fare con tutte le operazioni naturali (*i.e.* functoriali.) Vediamo un po' più in dettaglio i casi dei fibrati duale,  $\text{Hom}$ ,  $\otimes$ ,  $\oplus$ .

4.1.4.1. *Il fibrato duale.* Il fibrato duale di  $E$ , denotato usualmente con  $E^*$  è il fibrato con la stessa base di  $E$ , le cui fibre sono i duali delle fibre di  $E$  e le cui funzioni di transizione sono... le trasposte delle inverse! Vediamolo meglio.

Ogni isomorfismo lineare  $A : V \rightarrow W$  tra spazi vettoriali induce un isomorfismo naturale  $A^* : V^* \rightarrow W^*$  tra i duali, definito da

$$(A^*f)(w) = f(A^{-1}w)$$

per ogni  $w \in W$  ed  $f \in V^*$ . In termini matriciali, se sono fissate due basi  $\mathcal{B}$  e  $\mathcal{B}'$  rispettivamente di  $V$  e  $W$ , se  $M$  denota la matrice dell'isomorfismo  $A$  rispetto a tali basi e se  $f$  si scrive come vettore colonna  $F$  — per cui  $f(v) = M^t \cdot [v]_{\mathcal{B}}$  — il funzionale  $A^*f$  si scrive come vettore colonna  $(M^{-1})^t F$ .

Ripetiamolo, se  $A$  è la funzione di transizione per il fibrato  $E$ , quella per  $E^*$  è, in termini matriciali, la trasposta dell'inversa.

Cioè, il duale di  $E$  è *controvariante* rispetto ad  $E$ . Questo fa sì che l'accoppiamento duale fibra per fibra di  $E$  con il suo duale risulti intrinseco e indipendente dalla carta locale scelta per fare i conti, in quanto l'isomorfismo  $A$  del cambio di carta per  $E$  si cancella con  $A^{-1}$  del cambio per  $E^*$  (e meno male!) Confrontare con il Fatto 2.2.1.

4.1.4.2. *Il fibrato Hom.* Il duale di  $E$  non è altro che  $\text{Hom}(E, \mathbb{R})$ . In generale dati due fibrati  $E, F$  sulla stessa base, con uno stesso ricoprimento banalizzante  $\mathcal{U}$ , si costruisce il fibrato  $\text{Hom}(E, F)$  come il fibrato che ha per fibra su  $x$  lo spazio  $\text{Hom}(E_x, F_x)$  e che sui cambi di carta si comporta in modo naturale: se  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$  e se  $A, B$  sono funzioni di transizione rispettivamente di  $E$  ed  $F$  su  $U_\alpha \cap U_\beta$ , per ogni  $L \in \text{Hom}(E_x, F_x)$  il trasformato di  $L$  sarà

$$v \mapsto BLA^{-1}v.$$

Notare che se  $E$  è un fibrato su  $M$ , il fibrato duale  $E^*$  non è altro che  $\text{Hom}$  di  $E$  col fibrato banale  $M \times \mathbb{R}$ .

4.1.4.3. *Il fibrato  $\oplus$ .* Questo è il piú facile di tutti. Se si hanno due fibrati  $E, F$  sulla stessa base, si fa la somma diretta fibra a fibra  $E_x \oplus F_x$  e si cambia di carta componente per componente.

4.1.4.4. *Il fibrato  $\otimes$ .* Il prodotto tensoriale tra due spazi  $V, W$  può essere definito a mano come lo spazio generato dai simboli  $v_i \otimes w_j$  ove  $\{v_i\}$  è una base di  $V$  e  $\{w_j\}$  una di  $W$  (ma poi bisogna verificare che tutto quadri e liberarsi della dipendenza delle basi nella definizione.)

Oppure via la sua proprietà universale<sup>1</sup>:  $V \otimes W$  è la mamma di tutte le applicazioni bilineari, cioè l'unico spazio vettoriale  $X$  (unico a meno di isomorfismi ovviamente) tale che per ogni altro spazio vettoriale  $Z$  esista un'applicazione  $\varphi_Z : V \times W \rightarrow X$  tale che per ogni applicazione bilineare  $f : V \times W \rightarrow Z$  esista una unica  $g \in \text{Hom}(X, Z)$  tale che  $f = g \circ \varphi_Z$

<sup>1</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Universal\\_property](http://en.wikipedia.org/wiki/Universal_property)

$$\begin{array}{ccc}
 V \times W & \xrightarrow{f} & Z \\
 \varphi_Z \downarrow & \nearrow g & \\
 V \otimes W & & 
 \end{array}$$

Dati due vettori  $v, w$  si usa la notazione  $v \otimes w = \varphi_Z(v, w)$ . Tale notazione è comoda perchè in coordinate se  $v = \sum_i a_i v_i$  e  $w = \sum_j b_j w_j$  si ha  $v \otimes w = \sum_{i,j} a_i b_j v_i \otimes w_j$ .

Ad ogni coppia  $A : V \rightarrow V'$  e  $B : W \rightarrow W'$  di isomorfismi di spazi vettoriali, si associa l'isomorfismo tra  $V \otimes W$  e  $V' \otimes W'$  dato da

$$(10) \quad v \otimes w \mapsto Av \otimes Bw$$

Se quindi abbiamo due fibrati  $E$  ed  $F$  sulla stessa base, il prodotto tensoriale  $E \otimes F$  è un fibrato che ha come fibra  $E_x \otimes F_x$  e con funzioni di transizione date dalla (10).

**Fatto 4.1.15.** *Il duale e il prodotto tensoriale commutano:*

$$E^* \otimes F^* = (E \otimes F)^*$$

**DIMOSTRAZIONE.** L'isomorfismo naturale è definito identificando  $e_i^* \otimes f_j^*$  con  $(e_i \otimes f_j)^*$ .  $\square$

Per cui, il prodotto tensoriale di due duali  $E^* \otimes F^*$  è naturalmente isomorfo allo spazio delle funzioni bilineari da  $E \times F$  a  $\mathbb{R}$  via

$$(e \otimes f)(v, w) = e(v)f(w).$$

4.1.4.5. *Altre operazioni:*  $\otimes^p, E_q^p, \wedge, \wedge^p$ . Il prodotto tensoriale è associativo, per cui si può fare  $\otimes^p V = V \otimes \cdots \otimes V$   $p$  volte. La corrispondente costruzione a partire da un fibrato  $E$  si denota con  $\otimes^p E$ . In oltre il Fatto 4.1.15 ci dice che fare il duale commuta col prodotto tensoriale. Per cui dato un fibrato  $E$  è ben definito il fibrato  $E_q^p$  come

$$E_q^p = (\otimes^p E) \otimes (\otimes^q E^*)$$

La notazione è che l'indice in alto conta le componenti di  $E$ , mentre l'indice in basso conta le componenti duali.

In modo analogo al prodotto tensoriale, si può definire il prodotto esterno  $V \wedge V$  come la mamma di tutte le applicazioni bilineari alternanti (risulterà  $v \wedge w = (v \otimes w - w \otimes v)/2$ .) Tale prodotto risulta associativo e quindi è ben definito  $\wedge^p V$ . L'analogia costruzione vale per i fibrati.

**Osservazione 4.1.16.** *Notare l'analogia con la definizione di campi di vettori e  $k$ -forme differenziali.*

## 4.2. Lezione 14: Sezioni di fibrati e tensori

**4.2.1. Sezioni di fibrati.** Una sezione è una roba un po' come il grafico di una funzione.

**Definizione 4.2.1** (Sezione). *Una sezione di un fibrato  $\pi : E \rightarrow M$  è una funzione liscia  $s : M \rightarrow E$  tale che per ogni  $x$  in  $M$ ,  $s(x) \in E_x$ .*

Altrimenti detto, una sezione è un'inversa destra di  $\pi$ :

$$\pi(s(x)) = x.$$

Una funzione da  $M$  a  $\mathbb{R}^n$  non è altro che una sezione del fibrato banale  $M \times \mathbb{R}^n$ .

Siccome stiamo parlando di fibrati vettoriali, sezioni esistono sempre, per esempio la sezione nulla. Questa osservazione merita un pensierino. Consideriamo per esempio un fibrato di rango 1 su  $M$ . Perché la sezione  $s(x) \equiv 0$  esiste sempre? E la sezione  $s(x) \equiv 1$  esiste sempre? Che succede al nastro di Möbius? (E al fibrato tangente di  $S^2$ ?)

La sezione nulla esiste sempre perché lo zero di ogni fibra è ben definito in quanto i cambi di carta sono lineari sulle fibre e quindi mandano lo zero nello zero. Ma una funzione lineare fa "linearmente" quello che vuole fuori dallo zero e quindi ciò che chiamiamo 1 in una carta, in un'altra potrebbe essere il 2.

**Lemma 4.2.2.** *Date due sezioni  $s_1, s_2$  di un fibrato vettoriale  $E$  su  $M$  e una funzione  $f$  liscia su  $M$  sono ancora sezioni*

- $s_1 + s_2$  definita da  $(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x)$
- $f s_1$  definita da  $(f s_1)(x) = f(x) s_1(x)$

DIMOSTRAZIONE. È praticamente una tautologia. □

Quindi le sezioni di  $E$  costituiscono un modulo sull'anello delle funzioni su  $M$ .

**Definizione 4.2.3.** *Il modulo delle sezioni di  $E$  si denota con  $\Gamma(E)$ .*

Il processo di localizzazione via partizione dell'unità si applica alle sezioni di fibrati per ricondurre problemi globali a problemi fibra per fibra. Per esempio

**Fatto 4.2.4.** *Siano  $s_1, \dots, s_k$  sezioni di  $E \rightarrow M$ . Sono fatti equivalenti*

- i)  $s_1(x), \dots, s_k(x)$  generano  $E_x$  per ogni  $x \in M$ .
- ii)  $s_1, \dots, s_k$  generano  $\Gamma(E)$ .

DIMOSTRAZIONE. *i)  $\Rightarrow$  ii).* Sia  $s \in \Gamma(E)$ . Se per ogni  $x \in M$ ,  $s_1(x), \dots, s_k(x)$  generano  $E_x$ , esistono funzioni  $f_1(x), \dots, f_k(x)$  tali che per ogni  $x$ ,  $s(x) = \sum_i f_i(x) s_i(x)$ . Siccome le sezioni sono lisce, le funzioni  $f_i$  possono essere scelte lisce su un aperto sufficientemente piccolo  $U$ . Siccome  $M$  è una varietà possiamo ricoprirla scegliendo un tale aperto intorno ad ogni  $x \in M$  e quindi trovare un raffinamento di tale ricoprimento  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  che sia localmente finito. Sia  $\varphi_\alpha$  una

partizione dell'unità subordinata a  $\mathcal{U}$  e siano  $f_i^\alpha, \dots, f_k^\alpha$  le funzioni appena costruite sull'aperto  $U_\alpha$ . Chiaramente si ha

$$s = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} s = \sum_{i, \alpha} \varphi_{\alpha} f_i^{\alpha} s_i = \sum_i \left( \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha} f_i^{\alpha} \right) s_i$$

Per cui, posto  $g_i(x) = \sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}(x) f_i^{\alpha}(x)$  si ha  $s = \sum_i g_i s_i$ .

*ii)  $\Rightarrow$  i).* Sia  $x \in M$  e  $v \in E_x$ . Sia  $\mathcal{U}$  un ricoprimento banalizzante per  $E$  e sia  $x \in U \in \mathcal{U}$ . Su  $U$  il fibrato  $E$  è banale per cui possiamo considerare la sezione costante  $s \equiv v$ . Sia  $\varphi$  una funzione "test", cioè tale che

- sia liscia
- valga 1 in un intorno di  $x$
- esista un intorno  $V$  di  $x$ , la cui chiusura sia contenuta in  $U$  tale che  $\varphi \equiv 0$  su  $U \setminus V$ .

La sezione  $s' = \varphi s$  è una sezione globale di  $E$  tale che  $s'(x) = v$ . Quindi esistono funzioni  $f_i, \dots, f_k$  su  $M$  tali che  $s' = \sum_i f_i s_i$ . In particolare  $v = \sum_i f_i(x) s_i(x)$ .  $\square$

**4.2.2. Tensori.** Applichiamo adesso tutto questo armamentario al caso del fibrato tangente di una varietà.

**Definizione 4.2.5.** *Il fibrato cotangente di una varietà  $M$  è il duale del fibrato tangente e si denota usualmente con  $T^*M$  (anziché la notazione  $(TM)^*$ .) La fibra su  $x \in M$  di  $T^*M$  si denota con  $T_x^*M$ .*

A questo punto possiamo ridare la definizione di campi di vettori e forme usando fibrati e sezioni.

**Definizione 4.2.6.** *Un campo di vettori su una varietà  $M$  è un elemento di  $\Gamma(TM)$ . Una 1-forma su  $M$  è un elemento di  $\Gamma(T^*M)$ . Una  $k$ -forma su  $M$  è un elemento di  $\Gamma(\wedge^k(T^*M))$ .*

**Esercizio 4.2.7.** *Verificare che le definizioni di campi e forme date come sezioni di fibrati sono equivalenti a quelle date via carte locali.*

Ed eccoci finalmente arrivati a definire gli oggetti che maneggeremo da qui fino alla fine del corso.

**Definizione 4.2.8 (Tensori).** *Un tensore di tipo  $(p, q)$  su  $M$  (a  $(p, q)$ -tensor) è un elemento di  $\Gamma(T_q^p M)$ , cioè una sezione liscia del fibrato*

$$T_q^p M = (\otimes^p TM) \otimes (\otimes^q T^*M).$$

Un tensore di tipo  $(p, q)$  si vuol dire  $p$  volte **controvariante** e  $q$  volte **covariante** in relazione al fatto che i campi di vettori cambiano con l'inversa del differenziale dei cambi di carta su  $M$ , mentre le forme cambiano col differenziale stesso.

Quando si maneggiano tensori, ci sono un sacco di indici all'apice e al pedice in circolazione. Questo genera un po' di confusione. Un

tensore è stato definito come una sezione, per cui  $S(x)$  è il valore del tensore  $S$  nel punto  $x$ . Spesso però, se non c'è confusione con altri indici si usa la notazione  $S_x$  al posto di  $S(x)$ .

Data la definizione, ora bisogna capire cosa è un tensore. È prendere un po' di campi di vettori e un po' di forme, ma NON è il prodotto cartesiano di campi con forme.

I tensori facili da capire sono quelli di tipo  $(0, p)$  e  $(1, p)$ . Un tensore di tipo  $(0, p)$  è un oggetto che mangia  $p$  campi vettoriali su  $M$  in modo multilineare e restituisce una funzione su  $M$ . Un tensore di tipo  $(1, p)$  mangia  $p$  campi vettoriali e restituisce un campo.

Fibra per fibra, una base di  $T_q^p M$  è costituita dai simboli

$$e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e_{j_1}^* \otimes \cdots \otimes e_{j_q}^*$$

In generale non esiste un insieme di sezioni globali che sia una base punto per punto, come per esempio nel caso di  $T_0^1 S^2$ , cioè il fibrato tangente della sfera (perché?)

Quindi per esprimere in coordinate locali un tensore ci serve una base locale di sezioni. Tipo, nel caso di campi di vettori avevamo consireato la base dei campi  $\partial_i$  date dalle coordinate locali, e la base  $dx^i$  per le forme.

**4.2.3. Indici in alto indici in basso.** Per non fare casino è opportuno introdurre delle notazioni ferree sugli indici in alto e in basso.

Le componenti di  $TM$  avranno indice in basso, quelle di  $T^*M$  indici in alto. Le coordinate relative agli oggetti di  $TM$  avranno indice in ALTO, le coordinate realtive agli oggetti di  $T^*M$ , indice in BASSO. Incasinato vero? Ci si abitua e diventa comodo.

**Esempio 4.2.9.** *Un campo di vettori si scriverà sempre con un formalismo del tipo*

$$\sum_i a^i \partial_i$$

**Esempio 4.2.10.** *Una forma si scriverà sempre con un formalismo del tipo*

$$\sum_i a_i dx^i$$

**Esempio 4.2.11.** *Un tensore di tipo  $(0, 2)$  si scriverà sempre con un formalismo del tipo*

$$\sum_{ij} g_{ij} e^i \otimes e^j$$

(ove  $e^i$  sta per  $e_i^*$ .)

**Esempio 4.2.12.** *Una scrittura del tipo*

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

denoterà un insieme di campi indicizzati con  $i, j$ . Cioè un insieme di campi  $X_{i,j}$  con  $X_{i,j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$ .

**Esempio 4.2.13.** Un tensore di tipo  $(p, q)$  si scriverà come

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$$

Il perchè di questa notazione deriva dalla natura contro e covariante degli oggetti trattati. Rileggendo i calcoli fatti nella dimostrazione del Fatto 2.2.1 si capisce il perché. Una scrittura “equilibrata” ossia con lo stesso numero di indici in alto e in basso è “intrinseca”, tensoriale. Ciò ci mette al sicuro dai pericoli dei cambi di carta. I fisici usano questa notazione allo stesso modo del controllo dimensionale: mentre si fa un conto, per essere sicuri di non essersi persi qualche pezzo per strada, si controlla sempre che ciò che scriviamo sia equilibrato. Ciò non garantisce che non stiamo sbagliando, ma se la scrittura non è equilibrata di sicuro non abbiamo tra le mani un tensore.

**4.2.4. Convenzione di Einstein.** Siccome a forza di scrivere sommatorie uno si rompe, si conviene che tutte le volte che c'è una scrittura con indici in basso e in alto ripetuti, si sottintende che si sta considerando la somma al variare di tutti i possibili valori di tali indici. Sta roba sembra folle ma è comoda. Noi per ora continueremo a scrivere il simbolo di sommatoria, ma andremo piano piano ad eliminarlo.

**Esempio 4.2.14.** La scrittura  $\sum_i a^i \partial_i$  sarà sostituita da

$$a^i \partial_i$$

**Esempio 4.2.15.** La scrittura  $\sum_i a_i dx^i$  sarà sostituita da

$$a_i dx^i$$

**Esempio 4.2.16.** La scrittura  $\sum_{ij} g_{ij} e^i \otimes e^j$  sarà sostituita da

$$g_{ij} e^i \otimes e^j$$

**Esempio 4.2.17.** La scrittura  $\sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$  sarà sostituita da

$$\Gamma_{ij}^k \partial_k$$

**Esempio 4.2.18.** La scrittura

$$\sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$$

sarà sostituita da

$$T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}$$

### 4.3. Lezione 15: Contrazioni, derivata di Lie e Lemma di liberazione dagli indici

**4.3.1. Contrazioni.** Come si diceva, i tensori di tipo  $(0, p)$  e  $(1, p)$  sono macchinette che mangiano  $p$  campi di vettori e restituiscono una funzione e un campo rispettivamente. In generale un tensore di tipo  $(p, q)$  si può contrarre dando in pasto le componenti di  $E$  a quelle di  $E^*$ .

**Definizione 4.3.1.** Per ogni  $(p, q)$  e per ogni  $i \leq p, j \leq q$  si definisce la contrazione  $c_{i,j}$  come l'applicazione lineare

$$c_{i,j} : E_q^p \rightarrow E_{q-1}^{p-1}$$

definita da

$$\begin{aligned} & c_{i,j}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y^1 \otimes \cdots \otimes y^q) \\ &= y^j(x_i) \cdot x_1 \otimes \cdots \otimes \hat{x}_i \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y^1 \otimes \cdots \otimes \hat{y}^j \otimes \cdots \otimes y^q \end{aligned}$$

Ove il simbolo  $\hat{\phantom{x}}$  come di consueto indica la rimozione dell'oggetto marcato con  $\hat{\phantom{x}}$ .

Notare che la contrazione è intrinsecamente definita e non dipende dalle coordinate scelte per fare i conti.

Un'altra ovvia costruzione che si può fare coi tensori è il prodotto tensoriale: dati due sezioni  $X$  e  $Y$  di  $E_q^p$  e  $E_s^r$  si considera la sezione  $X \otimes Y$  del fibrato  $E_{q+s}^{p+r}$ .

Dati un campo di vettori  $X$  ed un tensore  $T$  di tipo  $(p, q)$  su  $M$ , la contrazione  $i_X T$  (detta anche prodotto interno) è il tensore di tipo  $(p, q-1)$

$$i_X T = c_{1,1}(X \otimes T)$$

Nel caso per esempio di un tensore  $(0, p)$ , che — in quanto una applicazione multilineare da  $\Gamma(TM)^p$  in  $C^\infty(M)$  — si può scrivere come  $T(X_1, \dots, X_p)$ , si ha

$$i_X T(X_1, \dots, X_{p-1}) = T(X, X_1, \dots, X_{p-1}).$$

**4.3.2. Derivata di Lie.** La derivata di Lie  $L_X$  abbiamo visto che si può fare per tutti gli oggetti di natura lineare e “pull-backabili”. I tensori sono ovviamente di natura lineare ed il pull-back è definito nel modo ovvio sapendo chi è il pull-back di funzioni, campi e forme (tensori di tipo  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ .)

**Definizione 4.3.2** (Pull-back di tensori). Sia  $\phi$  un diffeomorfismo di una varietà  $M$ . Il pull-back di un tensore qualsiasi è definito da

- $(\phi^* f)(x) = f(\phi(x))$  sulle funzioni
- $\phi^* X(x) = (\phi^{-1})_* X(x) = d\phi_{\phi x}^{-1}[X(\phi x)]$  sui campi (vedere la definizione 2.1.13)
- $\phi^* \omega(x)(V) = \omega(\phi(x))[d\phi V]$  sulle 1-forme (definizione 2.1.14)

ed imponendo la proprietà

$$\phi^*(T \otimes S) = \phi^*T \otimes \phi^*S.$$

**Esercizio 4.3.3.** Verificare che per un tensore di tipo  $(0, p)$  si ha

$$\phi^*T_x(X_1, \dots, X_p) = T_{\phi(x)}(d\phi_x(X_1), \dots, d\phi_x(X_p))$$

ove si è usata la notazione di porre  $x$  al pedice per indicare il valore della sezione  $T$  nel punto  $x$ , per non confondere  $x$  con i campi  $X_i$ .

**Definizione 4.3.4.** Il push-forward di tensori è definito come  $\phi_* = (\phi^{-1})^*$ .

Notare che il pull-back di tensori  $(0, p)$  è ben definito anche se  $\phi$  non è un diffeomorfismo.

**Esercizio 4.3.5.** Verificare che  $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$ .

**Esercizio 4.3.6.** Verificare che il pull-back commuta con le contrazioni:

$$\phi^*(cS) = c(\phi^*S)$$

per ogni tensore  $S$ , diffeomorfismo  $\phi$  e contrazione  $c$ . (Hint: Fatto 2.2.1.)

A questo punto la derivata di Lie è definita come al solito

**Definizione 4.3.7.** Dato un campo di vettori  $X$  su  $M$  per ogni tensore  $O$  si definisce

$$L_X(O) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\phi_t^*O) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\phi_\varepsilon^*(O) - O}{\varepsilon}$$

ove  $\phi_t$  è il flusso associato a  $X$ .

**Esercizio 4.3.8.** Dimostrare che la derivata  $L_X$ , come applicazione da  $\Gamma(T_q^p M)$  in sé, è lineare.

**Teorema 4.3.9** (Caratterizzazione della derivata di Lie come operatore). Sia  $X$  un campo di vettori su  $M$ . Per ogni  $f \in C^\infty(M)$ , per ogni  $Y \in \Gamma(TM)$  e per ogni coppia di tensori  $T, S$  su  $M$  e per ogni contrazione  $c$  la derivata di Lie  $L_X$  soddisfa le seguenti proprietà:

- (1) Sulle funzioni è la derivazione lungo  $X$ :  $L_X f = X(f)$ .
- (2) Sui campi è il commutatore:  $L_X Y = [X, Y]$ .
- (3) Sui tensori vale la "regola del prodotto":

$$L_X(T \otimes S) = L_X T \otimes S + T \otimes L_X S.$$

- (4) Commuta con le contrazioni:  $L_X(cS) = c(L_X S)$ .

In oltre, se  $F$  è un operatore lineare sullo spazio dei tensori di  $M$  che soddisfa tali proprietà, allora  $F = L_X$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Le prime due proprietà le abbiamo già mostrate nella sezione 3.1. Le seconde due derivano direttamente dalle proprietà del pull-back.

Sia adesso  $F$  un operatore lineare sui tensori di  $M$  con le quattro proprietà descritte. Dobbiamo mostrare che per ogni tensore  $S$  si ha  $F(S) = L_X(S)$ . Localizziamo il problema. Sia  $x \in M$ . Fissiamo un aperto  $U$  contenente  $x$  e banalizzante per  $TM$  e  $T^*M$  (e quindi banalizzante per tutti i fibrati  $T_q^p M$ .) Consideriamo una funzione test  $\varphi$  su  $U$  tale che  $\varphi \equiv 1$  su una palletta  $P_1$  intorno ad  $x$  e  $\varphi = 0$  fuori da una palletta chiusa  $P_2$  intorno ad  $x$  e contenuta in  $U$ .

Dalle proprietà di  $F$  segue (ricordare che per funzioni  $\varphi \otimes S = \varphi S$ )

$$F(\varphi S) = F(\varphi)S + \varphi F(S) = X(\varphi)S + \varphi F(S)$$

che vale zero fuori da  $P_2$  e coincide con  $F(S)$  dentro  $P_1$ . Per cui, per ogni tensore  $S$ , se  $F(\varphi S)$  coincide con  $L_X \varphi S$  per ogni  $x$  e ogni funzione test  $\varphi$  allora  $F = L_X$  globalmente.

Le prime due proprietà ci dicono che  $F = L_X$  sui tensori di tipo  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$ . La proprietà (3) insieme alla localizzazione ci dice che se lo dimostriamo per tensori di tipo  $(0, 1)$  allora siamo a posto per tutti i tensori. Il conto della contrazione, sfruttando tutte le proprietà ci dice che per ogni campo  $Y$  e 1-forma  $\omega$  si ha

$$\begin{aligned} L_X(i_Y \omega) &= F(i_Y \omega) = c_{1,1}(F(Y \otimes \omega)) = c_{1,1}(F(Y) \otimes \omega + Y \otimes F(\omega)) \\ &= \omega(F(Y)) + F(\omega)(Y) = \omega([X, Y]) + F(\omega)(Y) \end{aligned}$$

per cui

$$F(\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) = L_X(\omega)(Y)^2.$$

Per cui  $F\omega = L_X\omega$  per ogni tensore  $(0, 1)$ . □

**Esercizio 4.3.10.** *Dimostrare che come operatori sui tensori vale*

$$L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X = L_{[X, Y]}.$$

**Esercizio 4.3.11.** *Dimostrare che per ogni tensore  $T \in \Gamma(T_p^0 M)$  e campi di vettori  $X, X_i, \dots, X_p$  si ha*

$$(L_X T)(X_1, \dots, X_p) = X(T(X_1, \dots, X_p)) - \sum_i T(X_1, \dots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \dots, X_p).$$

(Hint: do you remember Teorema 3.2.6?)

---

<sup>2</sup>Per il Teorema 3.2.1

**4.3.3. Liberazione dagli indici.** In pratica, quando uno ha per le mani una scrittura di un oggetto in coordinate (o anche in modo intrinseco) per capire se è un tensore è un casino, perché bisogna controllare cosa succede nei cambi di carta. La natura dei tensori è molto algebrica e questo aiuta.

In seguito saremo interessati spesso ad operatori tra tensori e un problema generale è, una volta che uno ha un operatore  $F$ , decidere se per ogni tensore  $S$ , il risultato  $F(S)$  è effettivamente un tensore. Primo, deve essere tutta roba locale.

**Definizione 4.3.12.** *Un'operatore locale tra tensori su  $M$  è un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare  $F$  dallo spazio dei tensori in sé tale che, per ogni aperto  $U$  di  $M$  e per ogni tensore  $S$ , se  $S \equiv 0$  su  $U$  allora  $F(U) \equiv 0$  su  $U$ .*

Applicazioni tra tensori interessanti saranno quelle tensoriali.

**Definizione 4.3.13.** *Un'operatore tra tensori  $F$  è tensoriale se è  $\mathcal{C}^\infty$ -lineare. Cioè*

$$F(aS + bT) = aF(S) + bF(T)$$

*non solo per  $a, b \in \mathbb{R}$  ma per ogni  $a, b$  funzioni in  $\mathcal{C}^\infty(M)$ .*

In pratica c'è un'equivalenza tra tensori e funzioni tensoriali. Consideriamo il fibrato  $E^* \otimes F$ . Questo è canonicamente isomorfo al fibrato  $\text{Hom}(E, F)$ . L'isomorfismo è dato associando fibra per fibra ad ogni elemento  $\varphi \otimes w$  l'applicazione lineare  $A : E \rightarrow F$  che manda  $v \in E$  in  $\varphi(v)w$ . La linearità fibra per fibra ci dice che una sezione di  $\text{Hom}(E, F)$  non è altro che un operatore  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare tra  $\Gamma(E)$  e  $\Gamma(F)$ . Per cui c'è una corrispondenza tra operatori tensoriali da  $\Gamma(T_q^p M)$  a  $\Gamma(T_s^r M)$  e tensori in  $\Gamma((T_q^p M)^* \otimes T_s^r M)$  ossia tensori di tipo  $(q + r, p + s)$ .

In realtà, le operazioni che abbiamo chiamato tensoriali non sono altro che applicazioni più che locali, sono puntuali:

**Teorema 4.3.14.** *Sia  $F$  un'applicazione  $\mathbb{R}$ -lineare tra tensori di  $M$ . Allora  $F$  è  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare se e solo se per ogni coppia di tensori  $A, B$  di tipo  $(p, q)$  e per ogni  $x \in M$  tale che  $A_x = B_x$ , si ha  $F(A)_x = F(B)_x$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$  e  $x \in M$ . Sia  $c = f(x)$ . Per  $\mathbb{R}$ -linearità,  $F(cA) = cF(A)$ . I tensori  $fA$  e  $cA$  coincidono su  $x$  per cui se vale la seconda condizione  $F(fA)_x = f(x)F(A)_x$ . Siccome questo vale per ogni  $x \in M$  si ha  $F(fA) = fF(A)$  e quindi  $F$  è  $\mathcal{C}^\infty$ -lineare.

Viceversa, supponiamo che  $F$  sia  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare. Ormai siamo abituati a localizzare i problemi. Per ogni  $x \in M$  consideriamo un aperto  $U$  contenente  $x$  e banalizzante per  $T_q^p M$ , una funzione test  $\varphi$  che vale 1 vicino a  $x$  e poi va a zero subito dopo e lavoriamo con  $\varphi A$  e  $\varphi B$ . Per  $\mathcal{C}^\infty$ -linearità  $F(\varphi A) = \varphi F(A)$  per cui  $F(\varphi A)_x = F(A)_x$  e lo stesso vale per  $B$ . Siccome  $T_q^p M$  è banale su  $U$ , esiste una base di sezioni

$s_i$  per  $T_q^P M$  su  $U$ . Per cui si avrà  $\varphi A - \varphi B = \sum_i \alpha_i s_i$  per opportune uniche funzioni lisce  $\alpha_i$  su  $U$ . Se  $A_x = B_x$  si avrà  $\alpha_i(x) = 0$  per ogni  $i$ . Siccome  $\varphi A$  e  $\varphi B$  sono nulli fuori da una palletta intorno a  $x$ , possiamo estendere le funzioni  $\alpha_i$  e le sezioni  $s_i$  a zero fuori da  $U$ . Per  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -linearità di  $F$  si ha

$$F(\varphi A - \varphi B)_x = F\left(\sum_i \alpha_i s_i\right)_x = \sum_i \alpha_i(x) F(s_i)_x = 0$$

da cui  $F(A)_x = F(B)_x$ .  $\square$

**Esempio 4.3.15.** *La derivata di Lie è un operatore locale (vedasi la dimostrazione del Teorema 4.3.9.)*

**Esempio 4.3.16.** *La derivata di Lie NON è un tensore in quanto non è un operatore puntuale. Nemmeno il bracket.*

#### 4.4. Lezione 16: Esercitazione

##### 4.4.1. La derivata di Lie è invariante per diffeomorfismi.

Con le nostre varietà in mano siamo abituati a cambiare di carta locale come un giocoliere. Quando facciamo i conti di  $L_X Y$  sarebbe opportuno che ciò non dipendesse dalla carta locale in cui siamo.

**Esercizio 4.4.1.** *Dimostrare che per ogni diffeomorfismo tra varietà  $\phi : M \rightarrow N$ , per ogni campo  $X$  e per ogni tensore  $Y$  si ha*

$$\phi_*(L_X Y) = L_{\phi_* X} \phi_* Y.$$

SOLUZIONE. Il punto di partenza è l'esercizio 4.3.5, che dati due diffeomorfismi  $\phi$  e  $\psi$  si ha  $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$ . Il che segue dal fatto che il pull-back è definito usando l'inversa come  $\phi^* O(x) = d\phi^{-1} O(\phi(x))$  e l'inversa della composizione è la composizione delle inverse (scambiate di posto.)

Sia  $\psi_t$  il flusso associato a  $X$ . Se si guarda a  $X_p$  come classe di equivalenza di curve per  $p$  con derivata in  $p$  uguale a  $X_p$ , allora le linee di flusso di  $X$  rappresentano  $X$  in ogni punto di  $M$ . Il push-forward di  $X$  è quindi rappresentato dall'immagine via  $\phi$  dalle curve di flusso di  $X$ . Adesso il lettore si fa un disegno. Per cui il flusso di  $\phi_* X$  non è altro che  $\phi \circ \psi_t \circ \phi^{-1}$  (come è giusto che sia se si pensa a  $\phi$  come a un cambio di carta.)

Adesso possiamo cominciare coi calcoli:

$$\begin{aligned} L_{\phi_* X} \phi_* Y &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi \circ \psi_t \circ \phi^{-1})^* \phi_* Y - \phi_* Y}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi^{-1})^* \circ \psi_t^* \circ \phi^* \phi_* Y - \phi_* Y}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_* \circ \psi_t^* Y - \phi_* Y}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \phi_* \left( \frac{\psi_t^* Y - Y}{t} \right) = \phi_* \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_t^* Y - Y}{t} \right) = \phi_*(L_X Y). \end{aligned}$$

$\square$

### 4.4.2. Esercizi.

**Esercizio 4.4.2.** *Dimostrare che il fibrato tangente di ogni varietà è orientabile.*

**Esercizio 4.4.3.** *Dimostrare che un fibrato vettoriale di rango  $k$  è banale se e solo se ammette  $k$  sezioni linearmente indipendenti in ogni punto.*

**Esercizio 4.4.4.** *Una forma di volume su una varietà  $M$  di dimensione  $n$  è una  $n$ -forma mai nulla. Dimostrare che  $M$  è orientabile se e solo se ammette una forma di volume se e solo se il fibrato  $\wedge^n(T^*M)$  è banale.*

**Esercizio 4.4.5.** *Sia  $S^2$  la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la restrizione a  $S^2$  della terza coordinata  $f(x, y, z) = z$ . Si scelga un atlante differenziale per  $S^2$  (quindi con carte a valori in  $\mathbb{R}^2$ .) Si dica se l'oggetto che in carte locali si scrive come  $(\partial f / \partial x^1) \partial_2$  è un tensore.*

**Esercizio 4.4.6.** *Sia  $S^2$  la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $g$  l'applicazione che a ogni coppia di campi di vettori  $X, Y$  associa la funzione definita dal prodotto scalare punto per punto di  $X$  con  $Y$  (usando il prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^3$ ). Dire se  $g$  è un tensore.*

**Esercizio 4.4.7.** *Scrivere la  $g$  dell'esercizio precedente in carte locali.*

**Esercizio 4.4.8.** *Si dica se l'applicazione che ad ogni coppia di campi di vettori in  $\mathbb{R}^3$  associa il loro prodotto vettoriale è un tensore.*

**Esercizio 4.4.9.** *Si dimostri che una sezione del fibrato delle forme bilineari su  $TM$  è un tensore. Di che tipo è?*

**Esercizio 4.4.10.** *Sia  $E$  il fibrato delle forme bilineari su  $TM$ . L'applicazione che ad ogni elemento di  $\Gamma(E)$  associa la traccia è un tensore?  $E$  il determinante?*

**Esercizio 4.4.11.** *Dimostrare che per ogni varietà  $M$  esiste una sezione  $g$  del fibrato delle forme bi-lineari simmetriche su  $TM$  tale che per ogni  $x \in M$  l'applicazione  $g_x$  sia definita positiva.*

## Connessioni e derivata covariante

### 5.1. Lezione 17: Derivata covariante

**5.1.1. Il problema della derivazione di sezioni.** Consideriamo un fibrato  $E \rightarrow M$ . Quali sono le sezioni costanti di  $E$ ? Questa domanda sembra banale ma non lo è per niente.

Cominciamo con un esempio facile. Sia  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  il fibrato banale su  $\mathbb{R}$ . Una sezione di  $\mathbb{R}$  è nient'altro che una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Quindi dovrebbe essere facile dire chi è una sezione costante. La sezione nulla è sicuramente costante. La sezione 1 è costante?

Fissiamo le idee. Stiamo considerando un fibrato  $E \rightarrow \mathbb{R}$  di rango 1. Tutti i fibrati su una base contrattile sono banali quindi  $E$  è banale. Cioè è isomorfo a  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Il problema è che l'isomorfismo non è canonico.

Infatti un isomorfismo tra  $E$  ed il fibrato prodotto è dato fibra per fibra fissando un'iso lineare  $f : E_x \rightarrow \mathbb{R}$ . Ora, gli isomorfismi lineari di  $\mathbb{R}$  non sono altro che moltiplicazioni per un numero.

Quindi, per ogni funzione liscia e mai nulla  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'applicazione da  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$(x, v) \rightarrow (x, f(x)v)$$

è un isomorfismo tra fibrati.

La sezione costante zero rimmarrà sempre la sezione zero, e quindi costante. Ma la sezione  $s(x) = 1$ , applicando la  $F$ , diventa la sezione  $s(x) = f(x)$ , che può non essere costante.

Se ne evince che il nostro concetto naif di “essere costante” dipende dalla banalizzazione locale del fibrato. Figuriamoci quindi cosa accade al concetto di derivata!

Dobbiamo evidentemente dotarci di un modo di fare le derivate intrinseco, che ci permetta di dire chi siano le sezioni costanti.

Si potrebbe essere portati a pensare che ci siano classi (come la sezione nulla) di sezioni che sono naturalmente costanti e che tali sezioni ci dicano come derivare le altre.

Vediamo un altro esempio. Supponiamo di dover andare a una festa di carnevale e di doverci fabbricare un cappellino da pagliaccio. Prenderemo un cartone rosso, ritaglieremo un disco e toglieremo un settore circolare. Adesso incollando i due lati risultante otterremo un bellissimo cono.

Adesso ci chiediamo: com'è fatto un campo di vettori costante sul cono? Una possibile risposta è, ci mettiamo sul piano, ossia sul cartone

originale. Lí siamo in  $\mathbb{R}^2$  e sappiamo cos'è un campo costante, per esempio quello orizzontale: bene questo campo deve essere costante anche sul cono.

Ma se andiamo a chiudere il cono tale campo non si incollerà bene lungo i due lati, cosa che se fosse stato costante sarebbe dovuta essere ovvia. Quindi tale campo NON PUÒ essere costante sul cono.

Adesso guardiamo il cono, e diciamo “ovvio, un campo costante è quello che punta sempre verso il vertice” ma se ritoriamo sul cartone vedremo evidentemente che tale campo “gira”.

Il problema qui è che un campo costante sul cartone non lo è sul cono e viceversa. Il nostro concetto intuitivo di “essere costante” dipende quindi dall'ambiente in cui siamo e ci porterà naturalmetne al concetto di curvatura: Il cartone è “piatto” mentre il cono “ha curvatura”.

**5.1.2. Connessioni.** Abbiamo capito che ci dobbiamo dotare di un metodo per fare le derivate delle sezioni di fibrati e che ciò equivarrà piú o meno a decidere in totale libertà chi siano le sezioni costanti.

Un modo di fare le derivate ce lo abbiamo già: la derivata di Lie. Perché questo metodo non ci piace? Perché se andate a vedere le proprietà di  $L_X$  vedrete che per ogni tensore  $S$ ,  $L_X S$  non dipende solamente da  $S$  ma anche dalle derivate (in carte locali) di  $X$ . Cioè se  $X$  è un campo di vettori e  $S$  un tensore su  $M$ , la derivata del tensore  $S$  nel punto  $p$  nella direzione  $v = X_p$  non dipende solo da  $S$  ma anche da cosa fa  $X$  vicino a  $p$ . Mentre noi vorremmo che dipendesse solo da  $v$ , cioè da  $X_p$ . Ossia, vorremmo che fosse **tensoriale**.

D'altronde, rispetto a  $S$  vorremmo che fosse una derivazione. Basta cosí. L'oggetto che andiamo a introdurre si chiama connessione e dovrebbe avere una definizione un po' piú elegante dal punto di vista formale, ma noi ci accontenteremo di questa:

**Definizione 5.1.1** (Connessione (connection)). *Una connessione su  $M$  è una funzione  $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  con le seguenti proprietà:*

- (1) *La notazione standard ovunque in matematica per  $\nabla(X, Y)$  è*

$$\nabla_X Y$$

*in quando i ruoli di  $X$  e  $Y$  sono mooolto differenti.*

- (2)  $\nabla_X Y$  è  $\mathbb{R}$ -lineare sia in  $X$  che in  $Y$ .  
 (3)  $\nabla_X Y$  è  $C^\infty(M)$ -lineare in  $X$ . Cioè  $\nabla$  è **tensoriale** in  $X$ :

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

*per ogni funzione liscia  $f$  su  $M$ .*

- (4)  $\nabla_X Y$  è una derivazione in  $Y$ :

$$\nabla_X (fY) = X(f)Y + f \nabla_X Y$$

*per ogni funzione liscia  $f$  su  $M$ .*

**Osservazione 5.1.2.** *In letteratura molti autori includono nella definizione di connessione una condizione supplementare che noi andremo ad esaminare separatamente: quella di avere la torsione nulla (si veda l'apposita sezione poco piú avanti.)*

**Esempio 5.1.3.** *Su  $\mathbb{R}^n$  la derivata usuale componente per componente è una connessione (la connessione piatta.)*

Ci occuperemo tra breve di dimostrare l'esistenza di connessioni in generale. Per il momento ci crediamo e ci concentriamo sulle proprietà delle connessioni.

**5.1.3. Derivata covariante.** Una connessione è quindi un modo di derivare i campi. Il nostro obiettivo finale sarà dire chi è  $\nabla_X S$  ossia la derivata di  $S$  nella direzione  $X$  per ogni tensore. Tale derivata sarà detta *derivata covariante*. Cominciamo dalle funzioni

**Definizione 5.1.4.** *La derivata covariante  $\nabla_X f$  di una funzione  $f$  lungo il campo  $X$  non è altro che*

$$\nabla_X f = X(f) = df[X]$$

Per cui la proprietà (4) delle connessioni si può leggere come regola del prodotto per  $\nabla_X$

$$\nabla_X(fY) = (\nabla_X f)Y + f(\nabla_X Y)$$

L'estensione di  $\nabla_X$  a tutti i tensori è naturale. Per prima cosa vorremo che valga una regola del prodotto tensoriale del tipo  $\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T$ . Secondo, vorremo che valga una regola del prodotto per le contrazioni tipo  $\nabla_X(\omega(Y)) = \nabla_X(\omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y)$ . Quest'ultima proprietà è equivalente (vedi sotto) a chiedere la commutazione con le contrazioni. Diamo la definizione a modino:

**Definizione 5.1.5.** *La derivata covariante di un tensore qualsiasi su  $M$  lungo un campo  $X$  è definita dalle proprietà seguenti: Per ogni coppia di tensori  $T, S$  e per ogni contrazione  $c$*

- $\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T$
- $\nabla_X(c(S)) = c(\nabla_X(S))$

Se fidarsi è bene, non fidarsi è meglio. Bisogna controllare che questa definizione sia ben posta.

**Esercizio 5.1.6.** *Dimostrare che se due operatori sullo spazio dei tensori preservano il tipo (cioè mandano tensori  $(p, q)$  in tensori  $(p, q)$ ), soddisfano le condizioni di cui sopra e sono uguali a  $\nabla_X$  sulle funzioni e i campi, allora coincidono su tutti i tensori (Hint: la regola per le contrazioni ci dice chi sia la derivata covariante delle forme, quella dei campi la sappiamo già, e la regola del prodotto tensoriale determina la derivata su tutti i tensori.)*

Tipo, se  $\omega$  è un tensore di tipo  $(0, 1)$  e  $X, Y$  due campi allora  $c_{1,1}(Y \otimes \omega) = \omega(Y)$ . Per cui abbiamo

$$(11) \quad \nabla_X(\omega(Y)) = \nabla_X(c_{1,1}(Y \otimes \omega)) = c_{1,1}(\nabla_X(Y \otimes \omega))$$

$$(12) \quad = c_{1,1}(\nabla_X Y \otimes \omega + Y \otimes \nabla_X \omega) = \omega(\nabla_X Y) + (\nabla_X \omega)(Y)$$

che determina completamente chi è  $\nabla_X \omega$ .

**Esercizio 5.1.7.** Per ogni tensore  $S$  di tipo  $(0, p)$  e per ogni scelta di campi  $X, X_1, \dots, X_p$  si ha

$$\begin{aligned} & (\nabla_X S)(X_1, \dots, X_p) = \\ & \nabla_X(S(X_1, \dots, X_p)) - \sum_i S(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_p) \end{aligned}$$

Ossia, vale la seguente regola del prodotto

$$\begin{aligned} & \nabla_X(S(X_1, \dots, X_p)) \\ & = (\nabla_X S)(X_1, \dots, X_p) + \sum_i S(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_p). \end{aligned}$$

(Hint: usare a palla la regola per la derivata delle contrazioni.)

**Fatto 5.1.8.** Per ogni tensore  $S$ , campo  $X$  e funzione  $f$  si ha

$$\nabla_X(fS) = (\nabla_X f)S + f\nabla_X S.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Tale condizione vale per le funzioni e per i campi per definizione di connessione. Sulle 1-forme segue dall'equazioni (11) e (12). Ora che lo sappiamo per i campi e le forme, per un tensore di tipo  $(p, q)$  segue dalla regola  $\nabla_X(S \otimes T) = \nabla_X S \otimes T + S \otimes \nabla_X T$ .  $\square$

**Osservazione 5.1.9.** Occhio che  $\nabla_X(S)(X_1, \dots, X_p)$  è parecchio diverso da  $\nabla_X(S(X_1, \dots, X_p))$ .

**Osservazione 5.1.10.** La derivata covariante  $\nabla_X S$  è un operatore puntuale (cioè tensoriale, e quindi anche locale) in  $X$  e locale in  $S$ . Cioè se  $S = S'$  su un aperto intorno al punto  $p$  e se  $X_p = Y_p$ , allora  $(\nabla_X S)_p = (\nabla_Y S')_p$ .

**Esercizio 5.1.11.** Dimostrare le affermazioni della precedente osservazione.

## 5.2. Lezione 18: Proprietà delle connessioni, torsione nulla, localizzazione lungo sottovarietà

**5.2.1. Connessioni come spazio affine.** Una connessione non è tensoriale in entrambi gli argomenti ma solo nel primo. Ripetiamolo  $\nabla_X Y$  è  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare in  $X$  ma solo  $\mathbb{R}$ -lineare in  $Y$ :

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$$

per ogni  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

Salta all'occhio che il primo termine di questa uguaglianza non dipende da  $\nabla$ . Interessante. Ciò vuol dire che se consideriamo due connessioni  $\nabla$  e  $\nabla'$  e ne consideriamo la differenza quel termine bastardo sparisce.

Stiamo dicendo che la differenza di due connessioni è un tensore.

$$\begin{aligned} (\nabla_X - \nabla'_X)(fY) &= X(f)Y + f\nabla_X Y - X(f)Y - f\nabla'_X Y \\ &= f(\nabla_X - \nabla'_X)(Y) \end{aligned}$$

È come con gli spazi affini, un punto di uno spazio affine non è un vettore, ma la differenza di due punti è un vettore. Per cui tutte le connessioni sono ottenute da una che scegliamo come ci pare sommando un tensore.

Che tipo di tensore è la differenza di due connessioni? Beh, si mangia due campi e restituisce un campo. Quindi è di tipo  $(1, 2)$ . Se fissiamo  $X$ ,  $\nabla_X - \nabla'_X$  è un tensore di tipo  $(1, 1)$  ossia una sezione di  $\text{End}(TM) = \text{Hom}(TM, TM)$ . Cioè  $\nabla - \nabla'$  è un'affare tensoriale che mangia un campo e restituisce una sezione di  $\text{Hom}(TM, TM)$ . Una roba del genere si può rappresentare, in coordinate, come una matrice di 1-forme (tecnicamente sarebbe una 1-forma a valori endomorfismi, ma accontentiamoci delle matrici di forme in carte locali)

$$\nabla - \nabla' = \Omega = \begin{pmatrix} \omega_{1,1} & \dots & \omega_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{n,1} & \dots & \omega_{n,n} \end{pmatrix}$$

Per cui, tutte le connessioni su  $M$  si ottengono a partire da una connessione fissata  $\nabla^0$  — come si fissa un'origine negli spazi affini — sommando “una matrice di 1-forme”  $\nabla_X = \nabla_X^0 + \Omega(X)$ .

**Esercizio 5.2.1.** *Classificare tutte le connessioni su  $S^1$ .*

**Osservazione 5.2.2.** *Quanto detto per le connessioni è vero in generale: la differenza di due derivate covarianti è tensoriale in ogni argomento.*

**5.2.2. TORSIONE NULLA.** In generale una connessione abbiamo detto cos'è. Abbiamo una grandissima libertà di scelta per fissare una connessione. In geometria Riemanniana, come vedremo più in là, c'è però un'unica scelta naturale. Cominciamo a porre delle restrizioni per facilitare i calcoli.

Con la derivata di Lie abbiamo visto che  $L_X Y = [X, Y]$ . Vediamo adesso che aspetto ha il commutatore fatto con le connessioni.

**Fatto 5.2.3.** *Per ogni connessione  $\nabla$  su  $M$ ,  $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  è un tensore.*

**DIMOSTRAZIONE.** Ci basta dimostrare che l'operatore che manda  $X, Y$  in  $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  è  $\mathcal{C}^\infty(M)$ -lineare (Grazie Liberazione dagli indici!!!) Sia  $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$ .

$$\nabla_X fY - \nabla_{fY} X = X(f)Y + f\nabla_X Y - f\nabla_Y X$$

(tensoriale in una, derivazione nell'altra) In coordinate locali

$$[X, fY] = X(fY) - (fY)(X) = X(f)Y + fX(Y) - fY(X)$$

(In coordinate locali  $X(Y)$  è la usuale derivata componente per componente lungo le direzioni  $X$ )

per cui il termine  $X(f)Y$  si cancella e  $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  risulta tensoriale in  $Y$ . Lo stesso calcolo vale per la tensorialità in  $X$ .  $\square$

**Definizione 5.2.4** (Torsione). *Il tensore  $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$  si chiama torsione della connessione  $\nabla$ .*

Per fare i conti è estremamente comodo usare connessioni a torsione nulla. Addirittura, in molti testi di geometria Riemanniana, la condizione di avere torsione nulla è inclusa nella definizione di connessione.

**D'ora in avanti, se non specificato espressamente, ogni connessione sarà supposta avere torsione nulla.**

Che ci regala la torsione nulla? Che

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

E che ce ne facciamo di una cosa del genere? La usiamo per metterci in carte locali e usare campi coordinati per i quali il commutatore è nullo. Se  $[X, Y] = 0$  avremo

$$\nabla_X Y = \nabla_Y X$$

Quindi nei conti tutte le volte che avremo campi coordinati potremo scambiare  $\nabla_X Y$  con  $\nabla_Y X$ . Questa bischerata sta alla base di tutti i contazzi di geometria Riemanniana. (Confrontare con la derivata di Lie)

**5.2.3. Campi lungo sottovarietà.** Abbiamo visto già un sacco di volte come si localizza un problema puntualmente. Vediamo adesso un'altro tipo di localizzazione per i tensori che sarà estremamente comodo nei conti.

Ricordate il cappelletto fatto a cono? Ecco, una delle domande che ci ponevamo è "ma il campo definito sul bordo, che punta sempre verso il vertice, è costante?".

Questo tipo di problema si presenta continuamente nella pratica. Noi abbiamo definito i tensori come sezioni globali di certi fibrati e la derivata covariante come operatore sui tensori. Quindi per poter calcolare  $\nabla_X Y$  ci serve che  $X$  e  $Y$  siano definiti globalmente su  $M$ . La tensorialità degli oggetti definiti ci dice che possiamo sempre fare

i conti localmente: Il Teorema 4.3.14 ci dice che se  $X, X'$  sono due campi che coincidono su un apertino  $U$  di  $M$  e  $S, S'$  sono due tensori che coincidono su  $U$ , allora si ha

$$\nabla_X S = \nabla_{X'} S'$$

in ogni punto di  $U$ .

Che succede quando le uguaglianze di  $X$  con  $X'$  e di  $S$  con  $S'$  non valgono su un aperto ma solo su una sottovarietà, per esempio lungo una curva?

**Definizione 5.2.5.** *Sia  $E \rightarrow M$  un fibrato e  $N$  una sottovarietà di  $M$ . Una sezione di  $E$  lungo  $N$  è una funzione  $s : N \rightarrow E$  tale che  $s(x) \in E_x$  per ogni punto  $x$  di  $N$ .*

Cioè una sezione lungo  $N$  è una sezione di  $E$  definita solo su  $N$ .

**Definizione 5.2.6.** *Sia  $N$  una sottovarietà di una varietà  $M$ . Un tensore di tipo  $(p, q)$  lungo  $N$  è una sezione di  $T_q^p(M)$  lungo  $N$ .*

Occhio che un tensore lungo  $N$  NON è una sezione di  $T_q^p(N)$ , ma una sezione di  $T_q^p(M)$ . Per esempio, un campo lungo  $N$  NON è un campo di vettori tangenti ad  $N$  ma un campo, definito solo nei punti di  $N$ , di vettori tangenti alla varietà ambiente  $M$ .

**Teorema 5.2.7** (Estensione di tensori). *Sia  $N$  una sottovarietà propria di una varietà  $M$ . Un tensore di tipo  $(p, q)$  lungo  $N$  è sempre restrizione di un elemento di  $\Gamma(T_q^p(M))$ .*

In altre parole, dato un tensore  $S$  definito solo sui punti di  $N$ , esiste sempre una sezione globale di  $T_q^p(M)$  la cui restrizione a  $N$  è proprio  $S$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Localizziamoci: sia  $n$  la dimensione di  $N$  e  $n+k$  quella di  $M$ . In carte locali ove  $T_q^p(M)$  è banale, la sottovarietà  $N$  è definita da  $\{(x_1, \dots, x_{n+k}) \in \mathbb{R}^{n+k} : x_{n+1} = \dots = x_{n+k} = 0\}$ .

Adesso consideriamo una funzione test  $\varphi$  su  $\mathbb{R}^k$  che sia a valori in  $[0, 1]$ , valga 1 in zero e 0 fuori da una palletta intorno a zero. Se  $S$  è un tensore  $(p, q)$  lungo  $N$ , estendiamo  $S$  ad un tensore  $S'$  con la formula

$$S'(x_1, \dots, x_{n+k}) = S(x_1, \dots, x_n) \varphi(x_{n+1}, \dots, x_{n+k})$$

È facile capire che questo procedimento può essere fatto carta per carta in modo da definire  $S'$  globalmente su  $M$ . Per formalizzare questo procedimento abbiamo bisogno del teorema dell'intorno tubolare, la cui dimostrazione esula dagli scopi di questo corso, il cui enunciato recita

*Data una sottovarietà  $N$  di dimensione  $n$  di una varietà  $M$  di dimensione  $(n+k)$ , esiste sempre un intorno  $U$  di  $N$  in  $M$  diffeomorfo a  $N \times \mathbb{R}^k$*

Usando questo teorema la definizione della sezione  $S'$  può essere fatta contemporaneamente su tutto  $U$  usando la  $\varphi$  e poi estesa a tutta

$M$  definendo  $S' = 0$  fuori da  $U$ . Il fatto che  $N$  sia propria ci assicura che l'estensione sia liscia.  $\square$

**Lemma 5.2.8.** *Sia  $N$  una sottovarietà di  $M$ . Sia  $X$  un campo di vettori lungo  $N$  e siano  $X^1$  e  $X^2$  due sezioni globali di  $TM$  che coincidono con  $X$  su  $N$ . Allora, per ogni tensore  $S$  su  $M$*

$$\nabla_{X^1} S = \nabla_{X^2} S.$$

DIMOSTRAZIONE. Dipende dalla tensorialità di  $\nabla$ . È semplicemente un caso particolare del Teorema 4.3.14  $\square$

**Definizione 5.2.9.** *Sia  $N$  una sottovarietà di  $M$ . Per ogni  $X$  un campo di vettori lungo  $N$  e tensore  $S$  su  $M$   $\nabla_X S$  è definito come  $\nabla_{X'} S$  ove  $X'$  è una qualsiasi estensione di  $X$  a un campo su  $M$ .*

Non possiamo certo aspettarci che la stessa cosa valga per estensioni di  $S$ , altrimenti la derivata covariante sarebbe tensoriale in tutte le componenti.

**Teorema 5.2.10.** *Sia  $N$  una sottovarietà di  $M$  e sia  $S$  un tensore di  $M$  che si annulla su  $N$ . Allora per ogni campo  $X$  lungo  $N$  di vettori tangenti a  $N$  si ha  $\nabla_X S = 0$ .*

DIMOSTRAZIONE. Occhio che sta roba non vale se  $X$  non è tangente a  $N$ . Localizziamo il problema. In carte locali ove  $T_q^p M$  è banale, in cui  $M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$  e  $N = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ , sappiamo che la derivata usuale è una connessione  $\nabla^0$  e chiaramente  $\nabla_X^0 S = 0$  per ogni vettore  $X$  tangente a  $N$ . D'altronde sappiamo anche che la differenza di due connessioni è tensoriale quindi  $\nabla - \nabla^0$  è un tensore  $T(X, S)$ . Siccome i tensori sono puntuali, per ogni  $X$  avremo  $T(X, S) = 0$  dove  $S = 0$  ed in particolare su  $N$ . Abbiamo quindi  $\nabla_X S = (\nabla_X S - \nabla_X^0 S) + \nabla_X^0 S = T(X, S) + \nabla_X^0 S = 0 + 0 = 0$ .  $\square$

**Corollario 5.2.11.** *Sia  $N$  una sottovarietà di  $M$ ,  $S$  un tensore  $(p, q)$  lungo  $N$  e siano  $S'$  e  $S''$  due sezioni globali di  $T_q^p M$  che coincidono con  $S$  su  $N$ . Allora, per ogni campo  $X$  lungo  $N$  di vettori tangenti a  $N$*

$$\nabla_X S' = \nabla_X S''.$$

DIMOSTRAZIONE. Basta applicare il teorema precedente a  $S' - S''$ .  $\square$

**Definizione 5.2.12.** *Sia  $N$  una sottovarietà propria di  $M$ . Per ogni campo  $X$  di vettori tangenti ad  $N$  e per ogni tensore  $S$  lungo  $N$ ,  $\nabla_X S$  è definito come  $\nabla_{X'} S'$  ove  $X'$  e  $S'$  sono estensioni qualsiasi di  $X$  e  $S$  rispettivamente.*

### 5.3. Lezione 19: Campi paralleli, simboli di Christoffel

**5.3.1. Campi e tensori paralleli.** Per semplicità adesso ci restringiamo al caso di curve in una varietà  $M$ . Molto di quello che diremo varrà, *mutatis mutandi* nel caso di sottovarietà (ma non tutto!)

Cominciamo con una osservazione. Siamo interessati a studiare derivate di campi e tensori lungo curve. In realtà quindi non ci interessa se la curva che consideriamo sia una sottovarietà propria di  $M$  o no. Ci interessa che lo sia localmente.

Consideriamo una porzione  $\gamma$  di una curva, embedded e parametrizzata in modo regolare, ossia

$$\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow M \quad \dot{\gamma}(t) \neq 0 \quad \forall t$$

iniettiva e propria. Si noti che  $\dot{\gamma}(t)$  è un campo di vettori tangente a  $\gamma$ . Formalmente,  $\dot{\gamma}(t) = d\gamma[\partial_t]$  è il push-forward del campo coordinato  $\partial_t$  di  $[-\varepsilon, \varepsilon]$ .

**Definizione 5.3.1.** *Un campo  $Y$  lungo  $\gamma$  si dice parallelo se  $\nabla_{\dot{\gamma}}Y = 0$ . Un tensore  $S$  lungo  $\gamma$  si dice parallelo se  $\nabla_{\dot{\gamma}}S = 0$ .*

**Esercizio 5.3.2.** *Si dimostri che se  $\gamma$  è una curva in  $\mathbb{R}^2$  e la connessione è data dalla derivata usuale, allora un campo lungo  $\gamma$  è parallelo se e solo se è costante lungo  $\gamma$ .*

**Esercizio 5.3.3.** *Si dimostri che se  $S$  e  $T$  sono paralleli, allora lo è anche  $S \otimes T$ .*

**Esercizio 5.3.4.** *Si dimostri che se  $S$  è parallelo, allora per ogni contrazione  $c$ ,  $c(S)$  è parallelo.*

Con queste nozioni in mente vorremmo dare una definizione ragionevole di “traslazione” di un vettore usando le connessioni. L’idea è di impostare un problema di Cauchy imponendo a un campo che sia parallelo. Per cui ci serve il seguente fatto.

**Teorema 5.3.5.** *La derivata covariante è un operatore differenziale del prim’ordine.*

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo visto che la derivata covariante è un operatore locale. Ripetiamolo,  $\nabla_X S$  è tensoriale (puntuale) in  $X$  e locale in  $S$  (cioè il valore di  $\nabla_X S$  su un aperto  $U$  dipende solo da cosa fa  $S$  su  $U$ .) Come al solito localizziamo. In coordinate locali  $\nabla = \nabla^0 + T$  ove  $\nabla^0$  è la derivazione usuale e  $T$  è un tensore.  $\nabla^0$  è ovviamente un operatore differenziale del prim’ordine e  $T$ , siccome è un tensore, è un operatore di ordine zero (dipende solo dal valore puntuale di  $S$  e non dalle sue derivate.) Quindi, fissato  $X$ ,  $\nabla_X S$  dipende solo dai valori puntuali di  $S$  e delle sue derivate prime.  $\square$

Sia ora  $\gamma[0, T]$  una curva liscia e regolarmente parametrizzata in  $M$ . Sia  $S_0$  un elemento di  $T_q^p M_{\gamma(0)}$ . Possiamo impostare, almeno localmente, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}(t)} S = 0 \\ S_{\gamma(0)} = S_0 \end{cases}$$

Tale problema ha come unica soluzione locale un tensore  $S$  lungo  $\gamma$ , parallelo e tale che  $S_{\gamma(0)} = S_0$ . Vediamo che la soluzione locale è in realtà definita per ogni  $t \in [0, T]$ . Basta verificare che “non scoppia mai”. Sia  $\tau$  il tempo massimale di definizione per il suddetto problema di Cauchy. Dobbiamo semplicemente far vedere che  $\lim_{t \rightarrow \tau} S_{\gamma(t)}$  esiste.

Vediamolo in dettaglio nel caso in cui  $S$  sia un campo. La dimostrazione nel caso generale si fa come al solito: con la regola delle contrazioni ci si procura il caso delle 1-forme e con la regola del  $\otimes$  si passa al caso di un tensore  $(p, q)$ .

In carte locali vicino a  $\gamma(\tau)$ , scriviamo la connessione come  $\nabla = d + \Omega$  ove  $d$  è la usuale derivazione coordinata per coordinata e  $\Omega = (\omega_{ij})$  è una matrice di 1-forme.

Il problema di Cauchy diventa quindi

$$dS = -\Omega S$$

o meglio

$$dS = -\Omega[\dot{\gamma}]S$$

cioè, se poniamo  $a_{ij}(t) = -\omega_{ij}(\dot{\gamma}(t))$  e costruiamo la matrice  $A = A(t) = (a_{ij}(t))$ , possiamo scrivere

$$dS = AS$$

(notare che un fisico a questo punto dividerebbe per  $S$  e direbbe “ $dS/S$  è la derivata del logaritmo per cui la soluzione è  $S = e^{\int A}$ ”. E come al solito il fisico non è corretto ma chi chiappa abbastanza.)

Per cui stiamo risolvendo un semplice sistema lineare del prim'ordine. Se  $\lim_{t \rightarrow \tau} S_t$  non esistesse, la derivata di  $S$  scoppierebbe e dall'equazione segue che pure  $S$  dovrebbe scoppiare. Dall'equazione abbiamo la stima matriciale

$$\|dS\| \leq \|A\| \cdot \|S\|$$

(ove le norme sono fatte rispetto al prodotto scalare standard associato alle coordinate locali.) Ora

$$d(\|S\|) = \frac{\langle dS, S \rangle}{\|S\|} \leq \frac{\|dS\| \cdot \|S\|}{\|S\|} = \|dS\| \leq \|A\| \cdot \|S\|$$

Il numero  $\|A\|$  è limitato da una costante  $c$  perché le funzioni  $a_{ij}$  sono di classe  $C^\infty$ , e la stima  $d(f) \leq cf$  dice che  $f$  è dominata da un esponenziale. Quindi  $\|S\|$  non scoppia.

**Definizione 5.3.6** (Trasporto parallelo). *Sia  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  una curva liscia con  $\dot{\gamma}(t) \neq 0$  per ogni  $t$ . Per ogni elemento  $S_0 \in T_{\gamma(0)}^p M_{\gamma(0)}$  si definisce il trasporto parallelo di  $S_0$  lungo  $\gamma$  come l'unico tensore  $S$  lungo  $\gamma$  che sia soluzione di*

$$\begin{cases} \nabla_{\dot{\gamma}(t)} S = 0 \\ S_{\gamma(0)} = S_0 \end{cases}$$

**Esercizio 5.3.7.** Consideriamo un campo  $X$  in  $\mathbb{R}^2$  e una curva  $\gamma$  trasversale a  $X$  (cioè  $\dot{\gamma}(t)$  mai multiplo di  $X_{\gamma(t)}$ ) Sia  $Y$  il campo lungo  $\gamma$  definito da  $Y_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t)$ . È vero che il trasporto parallelo di  $Y$  lungo le linee di flusso di  $X$  è  $\phi_*Y$ ? (ove  $\phi$  è il flusso associato ad  $X$ .)

**5.3.2. Christoffel.** Per fare i conti (come vedremo nella prossima lezione) in coordinate locali è necessario ordine, se no ci si diventa matti. E quando uno smatta comincia a bestemmiare. Così nacquero i simboli di Christoffel.<sup>1</sup>

**Definizione 5.3.8.** Sia  $\nabla$  una connessione su  $M$ . Siano  $x^1, \dots, x^n$  coordinate locali su  $M$  e siano  $\partial_i$  i corrispondenti campi coordinati. Per ogni  $i, j$ , le coordinate del campo  $\nabla_{\partial_i}\partial_j$  si chiamano simboli di Christoffel e si indicano con  $\Gamma_{ij}^k$ :

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

equivalentemente, usando la notazione di Einstein:

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

Chiaramente, i simboli di Christoffel determinano univocamente la connessione in quanto, noti i  $\Gamma_{ij}^k$ , si sa calcolare  $\nabla_X Y$  per ogni campo. Infatti, se  $X = X^i \partial_i$  e  $Y = Y^j \partial_j$  (in convenzione Einstein)

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i \partial_i} (Y^j \partial_j) = X^i \nabla_{\partial_i} (Y^j \partial_j) = \sum_{i,j} X^i (Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j + \partial_i(Y^j) \partial_j) \\ &= \sum_{i,j} X^i (Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k + \partial_i(Y^j) \partial_j) \end{aligned}$$

**Fatto 5.3.9.** Una connessione  $\nabla$  corrisponde alla usuale derivata componente per componente se e solo se i suoi simboli di Christoffel sono nulli.

DIMOSTRAZIONE. basta leggere la scrittura di  $\nabla_X Y$  tre righe qui sopra.  $\square$

OCCHIO!!! In simboli  $\Gamma_{ij}^k$  non sono tensori!!! (infatti non è una scrittura equilibrata: ha tre indici, uno in alto e due in basso, diversi e non ripetuti.) Mentre

$$\Gamma_{ij}^k \partial_k$$

è una famiglia di campi (quindi tensori) indicizzati con  $i, j$  (è infatti il campo  $\nabla_{\partial_i}\partial_j$ .)

Se non è un tensore, vediamo come cambia con i cambi di coordinate.

<sup>1</sup>In realtà Christoffel era solo un pover cristo qualsiasi [http://en.wikipedia.org/wiki/Christoffel\\_symbols](http://en.wikipedia.org/wiki/Christoffel_symbols)

Siano  $x^1, \dots, x^n$  coordinate locali su  $M$  e siano  $y^1, \dots, y^n$  delle nuove coordinate. Cambiare coordinate equivale a scrivere le une in funzione delle altre. Scriviamo

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n) \quad i = 1, \dots, n$$

Adesso non possiamo piú indicare con  $\partial_i$  i campi coordinati, perché non sappiamo piú se ci riferiamo alle  $x$  o alle  $y$ . Usiamo quindi la notazione  $\partial/\partial x_i$ . Il cambio di coordinate per i campi  $\partial/\partial x_i$  è il seguente (si veda 2.1.4 e se non vi torna ricordate la regola per la derivazione di funzioni composte, tanto i campi son derivazioni)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial y^j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (\text{notazione Einstein})$$

Chiamiamo  $\Gamma_{ij}^k$  i Christoffel nelle coordinate  $x$  e  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$  quelli nelle coordinate  $y$ . Preparatevi al conto.

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial y^r}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial y_r} &= \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} = \nabla_{\partial/\partial x_i} \partial/\partial x_j \\ &= \nabla_{\frac{\partial y^s}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_s}} \frac{\partial y^m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_m} = \frac{\partial y^s}{\partial x_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_s}} \frac{\partial y^m}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_m} \\ &= \frac{\partial y^s}{\partial x_i} \left( \frac{\partial y^m}{\partial x_j} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_s}} \frac{\partial}{\partial y_m} + \frac{\partial}{\partial y_m} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_s}} \left( \frac{\partial y^m}{\partial x_j} \right) \right) \\ &= \frac{\partial y^s}{\partial x_i} \left( \frac{\partial y^m}{\partial x_j} \tilde{\Gamma}_{sm}^r \frac{\partial}{\partial y_r} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_s}} \left( \frac{\partial y^r}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_r} \right) \end{aligned}$$

giochiamo adesso col termine  $\frac{\partial y^s}{\partial x_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_s}} \left( \frac{\partial y^r}{\partial x_j} \right)$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_s}} \left( \frac{\partial y^r}{\partial x_j} \right) = \nabla_{\frac{\partial x^g}{\partial y_s} \frac{\partial}{\partial x_g}} \left( \frac{\partial y^r}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial x^g}{\partial y_s} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_g}} \left( \frac{\partial y^r}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial x^g}{\partial y_s} \frac{\partial^2 y^r}{\partial x_g \partial x_j}$$

per cui

$$\frac{\partial y^s}{\partial x_i} \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_s}} \left( \frac{\partial y^r}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial y_r} = \frac{\partial y^s}{\partial x_i} \frac{\partial x^g}{\partial y_s} \frac{\partial^2 y^r}{\partial x_g \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_r} = \frac{\partial^2 y^r}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_r}$$

perché il termine  $\frac{\partial x^g}{\partial y_s} \frac{\partial y^s}{\partial x_i}$  non è altro che  $\partial x^g / \partial x_i$  che è zero se  $i \neq g$  e 1 se  $i = g$  (qui senza convenzione di Einstein si muore.) Per cui, raccogliendo i coefficienti di  $\partial/\partial y_r$ ,

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial y^r}{\partial x_k} = \frac{\partial y^s}{\partial x_i} \frac{\partial y^m}{\partial x_j} \tilde{\Gamma}_{sm}^r + \frac{\partial^2 y^r}{\partial x_i \partial x_j}$$

Bel troiaio vero? È per questo che svilupperemo metodi e dimostreremo teoremi che ci evitino di fare conti del genere tutte le volte.

Cominciamo da della roba semplice semplice.

**Fatto 5.3.10.** *Se la connessione ha torsione nulla, i simboli di Christoffel sono simmetrici in  $ij$ .*

DIMOSTRAZIONE.

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i + [\partial_i, \partial_j] = \nabla_{\partial_j} \partial_i$$

□

## 5.4. Lezione 20: Esercitazione

**5.4.1. Contazzi su un cono.** Facciamo degli stracontazzi su un esempio concreto. Prendiamo un cono in  $\mathbb{R}^3$ , ci procuriamo una connessione, facciamo un po' di trasporti paralleli e proviamo a scrivere i simboli di Christoffel in coordinate locali.

C'è anche un bellissimo disegno a disposizione (fig. 1):

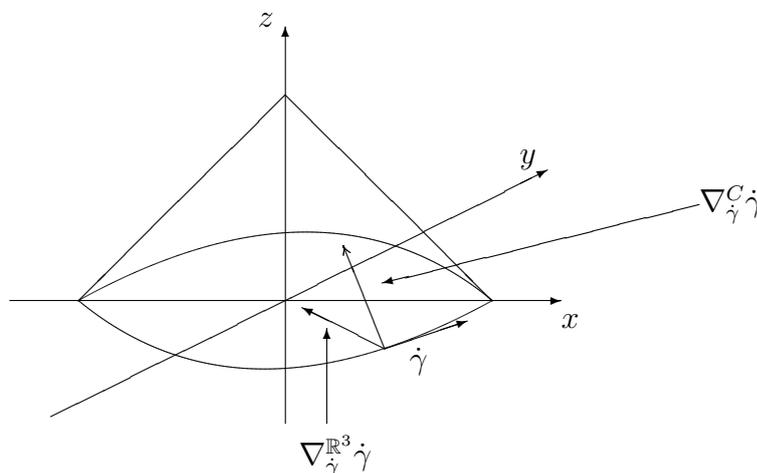


FIGURA 1. Cono

In  $\mathbb{R}^3$  consideriamo il cono  $C$  ottenuto ruotando un angolo rettangolo attorno alla bisettrice, che pensiamo coincidente all'asse  $z$ . Il cono è disegnato finito, ma pensiamolo infinito. Inoltre, non facciamo caso al fatto che il vertice è puntuto: In questo momento non ci interessa (ma ci interesserà poi.)

Consideriamo il cerchio base, ossia la curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$  e il campo di vettori  $X = \dot{\gamma}$  lungo  $\gamma$ .

Abbiamo la connessione usuale di  $\mathbb{R}^3$ , che chiameremo  $\nabla^{\mathbb{R}^3}$ . Ne esibiamo un'altra su  $C$ .

**Definizione 5.4.1.** *Per ogni coppia di campi di vettori  $S, R$  su  $C$ , definiamo  $\nabla_S^C R$  come la proiezione ortogonale (col prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^3$ ) di  $\nabla_S^{\mathbb{R}^3} R$  sul piano tangente a  $C$  (visto come sottospazio di  $\mathbb{R}^3$ .)*

**Esercizio 5.4.2.** *Dimostrare che  $\nabla^C$  è una connessione su  $C$ .*

SOLUZIONE. Basta far vedere che è tensoriale in  $S$  e una derivazione in  $R$  perché la proiezione è ovviamente  $\mathbb{R}$ -lineare (si veda 5.1.1). Si ha  $\nabla_{fS}^{\mathbb{R}^3} R = f \nabla_S^{\mathbb{R}^3} R$  e la proiezione è lineare, quindi  $\nabla^C$  è tensoriale in  $S$ . Daltronde  $\nabla_S^{\mathbb{R}^3} fR = f \nabla_S^{\mathbb{R}^3} R + S(f) \nabla_S^{\mathbb{R}^3} R$  ed anche qui la linearità della proiezione basta.  $\square$

### Esercizio 5.4.3.

- (1) Controllare se  $X$  è parallelo.
- (2) Preso un vettore  $X_0$  in  $T_{\gamma(0)}C$  calcolare il trasporto parallelo di  $X_0$  lungo  $\gamma$  usando la connessione  $\nabla^C$ .

SOLUZIONE 1 **Come non si fanno i conti.** Il campo  $X$  in coordinate è  $X = (-\sin t, \cos t, 0)$ . Calcoliamo il campo  $Y = \nabla_{\dot{\gamma}}^C X$ . Un vettore normale a  $C$  in  $\gamma(t)$  è  $(\cos t, \sin t, 1)$ , il quale ha modulo  $\sqrt{2}$  per cui il versore esterno normale a  $C$  in  $\gamma(t)$  è  $N_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \sin t, 1)$ . Per calcolare la proiezione di un vettore  $V$ , la sua proiezione su  $T_{\gamma(t)}C$  è data da  $V - N_t \langle N_t, V \rangle$  (usando il prodotto scalare standard.) Calcoliamo  $\nabla_X^C X$ .

$$\nabla_X^{\mathbb{R}^3} X = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

e intanto  $X$  non è parallelo in  $\mathbb{R}^3$ . Poi

$$\begin{aligned} Y &= \nabla_X^C X = (-\cos t, -\sin t, 0) \\ &- \frac{1}{2} \langle (\cos t, \sin t, 1), (-\cos t, -\sin t, 0) \rangle (\cos t, \sin t, 1) \\ &= (-\cos t, -\sin t, 0) + \frac{1}{2} (\cos t, \sin t, 1) \\ &= -\frac{1}{2} (\cos t, \sin t, -1) \end{aligned}$$

Quindi  $X$  non è parallelo nemmeno su  $C$ .

Adesso cerchiamo di risolvere le equazioni del trasporto parallelo. Sia  $S = (s_1(t), s_2(t), s_3(t))$  un campo lungo  $\gamma$ .

$$\nabla_X^{\mathbb{R}^3} S = (ds_1[\dot{\gamma}], ds_2[\dot{\gamma}], ds_3[\dot{\gamma}])$$

per cui

$$\begin{aligned}
\nabla_X^C S &= (ds_1[\dot{\gamma}], ds_2[\dot{\gamma}], ds_3[\dot{\gamma}]) \\
&- \frac{1}{2} \langle (\cos t, \sin t, 1), (ds_1[\dot{\gamma}], ds_2[\dot{\gamma}], ds_3[\dot{\gamma}]) \rangle (\cos t, \sin t, 1) \\
&= (ds_1[\dot{\gamma}], ds_2[\dot{\gamma}], ds_3[\dot{\gamma}]) - \\
&\quad \frac{1}{2} (\cos t, \sin t, 1) (\cos t ds_1[\dot{\gamma}] + \sin t ds_2[\dot{\gamma}] + ds_3[\dot{\gamma}]) \\
&= (ds_1[\dot{\gamma}] \left( (1 - \frac{1}{2} \cos^2 t) ds_1[\dot{\gamma}] - \frac{1}{2} \cos t \sin t ds_2[\dot{\gamma}] - \frac{1}{2} \cos t ds_3[\dot{\gamma}], \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \sin t \cos t ds_1[\dot{\gamma}] + ds_2(\dot{\gamma} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 t) - \frac{1}{2} \sin t ds_3[\dot{\gamma}], \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \cos t ds_1[\dot{\gamma}] - \frac{1}{2} \sin t ds_2[\dot{\gamma}] + \frac{1}{2} ds_3[\dot{\gamma}])
\end{aligned}$$

Ecco, così facendo i conti per imporre che il campo sia tangente al cono, impostare l'equazione differenziale  $\nabla_X^C S = 0$  e risolverla ve li fate voi...

**SOLUZIONE 2. I conti fatti come Christoffel comanda.** Ce ne andiamo in coordinate locali ed usiamo il teorema di pitagora. Abbiamo

$$X = (-\sin t, \cos t, 0) \quad Y = \nabla_X^C X = \frac{1}{2}(-\cos t, -\sin t, 1)$$

(e quindi  $X$  non è parallelo.) Dopo di che si osserva che  $Y$  e  $X$  si estendono a campi sul cono tali che le linee di flusso di  $Y$  e  $X$  siano i raggi dal vertice verso  $\gamma$  ed i cerchi concentrici “paralleli” a  $\gamma$ . Basta settare opportunamente il modulo di  $X$  quando ci spostiamo verso l'alto ed avremo estensioni che commutano. Stiamo usando nient'altro che coordinate polari sul cono in un intorno di  $\gamma$ . Per conoscere  $\nabla^C$  ci basta conoscere i suoi simboli di Christoffel in tali coordinate, ossia ci basta conoscere

$$\nabla_X^C X, \nabla_Y^C Y, \nabla_X^C Y$$

(infatti la connessione di  $\mathbb{R}^3$  è a torsione nulla quindi lo è anche quella di  $C$  per cui  $\nabla_X Y = \nabla_Y X$  in quanto  $[X, Y] = 0$ .)  $\nabla_X^C X = Y$  ce lo abbiamo già. In realtà per fare il trasporto parallelo ci interessa solo conoscere  $\nabla_X^C$ , ma facciamo anche il conto per  $\nabla_Y^C Y$ . Come abbiamo scelto l'estensione di  $Y$  a tutto il cono? La scegliamo ora. La prendiamo facendo il trasporto parallelo in  $\mathbb{R}^3$  di  $Y$  lungo la retta per il vertice (ossia le linee di flusso percorrono tali rette a velocità costante.) Per cui  $\nabla_Y^{\mathbb{R}^3} Y = 0$  da cui

$$\nabla_Y^C Y = 0.$$

Ci manca  $\nabla_X Y$ . In coordinate  $\nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y = \frac{1}{2}(\sin t, -\cos t, 0) = -\frac{1}{2}X$  che è già tangente a  $C$ , per cui

$$\nabla_X^C Y = -\frac{1}{2}X$$

Riassumendo e volendo includere la tabella dei Christoffel, si ha:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_X^C X = Y \\ \nabla_Y^C X = \nabla_X^C Y = -\frac{1}{2}X \\ \nabla_Y^C Y = 0 \\ \Gamma_{12}^1 = -1/2 & \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{21}^1 = -1/2 & \Gamma_{21}^2 = 0 \\ \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{11}^2 = 1 \\ \Gamma_{22}^1 = 0 & \Gamma_{22}^2 = 0 \end{array} \right.$$

Veniamo al trasporto parallelo. Adesso il nostro universo è  $C$  e scriviamo semplicemente  $\nabla$  invece di  $\nabla^C$  (che conosciamo completamente perché ne conosciamo i Christoffel.)

Sia  $S = \alpha X + \beta Y$  un generico campo tangente al cono. L'equazione da risolvere è  $\nabla_X S = 0$  avendo

$$\nabla_X S = X(\alpha)X + \alpha \nabla_X X + X(\beta)Y + \beta \nabla_X Y = X(\dot{\alpha} - \frac{\beta}{2}) + Y(\alpha + \dot{\beta})$$

l'equazione diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\dot{\alpha} = \beta \\ \alpha = -\dot{\beta} \end{array} \right.$$

da cui

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = -2\ddot{\alpha} \\ \beta = 2\dot{\alpha} \end{array} \right.$$

e quindi  $\alpha = A \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) + B \sin(\frac{t}{\sqrt{2}})$  e  $\beta = -A\sqrt{2} \sin(\frac{t}{\sqrt{2}}) + B\sqrt{2} \cos(\frac{t}{\sqrt{2}})$ . Ora basta imporre  $S_{\gamma(0)} = X_0$  e si trovano  $A$  e  $B$ . Facciamolo in un esempio pratico. Abbiamo visto che  $X$  non è parallelo. Bene, facciamo il trasporto parallelo di  $X_0 = X_{\gamma(0)} = \dot{\gamma}(0)$ . Andiamo a imporre le nostre condizioni. Per  $t = 0$  abbiamo  $AX_0 + \sqrt{2}BY_0 = X_0$  da cui  $A = 1$  e  $B = 0$ . Per cui il campo  $S$  sarà

$$S_t = X \cos(\frac{t}{\sqrt{2}}) - \sqrt{2}Y \sin(\frac{t}{\sqrt{2}})$$

Ora, per  $t = 2\pi$  si ha  $\gamma(2\pi) = \gamma(0)$  cioè abbiamo fatto un giro intero intorno a gamma. Attenzione, attenzione Signore e Signori... l'asso vince i fanti perdono... chi è  $S_{2\pi}$ ?

$$S_{2\pi} = X_0 \cos(\sqrt{2}\pi) - \sqrt{2}Y_0 \sin(\sqrt{2}\pi) \neq X_0$$

Opa! abbiamo fatto un giro e non siamo ritornati da dove eravamo partiti!!! (ricorda qualcosa?) Tranquilli, non abbiám sbagliato i conti, dipende tutto da quel benetetto vertice che in sé concentra “molta curvatura positiva”, ma di questo parleremo in seguito...

**Osservazione 5.4.4.** *Questa cosa ci dice che se volessimo definire il trasporto parallelo lungo una roba di dimensione 2 o più anziché lungo una curva, avremmo un problemino con la curvatura. Ossia il concetto di “campo costante”, così naturale in  $\mathbb{R}^n$ , ha poco senso quando c'è*

curvatura. Tipo: provare a caratterizzare tutti i campi costanti sulla sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$ .

### 5.4.2. Esercizi.

**Esercizio 5.4.5.** Dimostrare che se  $X \neq 0$  è un campo in  $\mathbb{R}^2$  tale che  $\nabla_X X = 0$  per la connessione data dalla derivata usuale, allora le linee di flusso di  $X$  sono rette parallele.

**Esercizio 5.4.6.** Esibire due tensori  $S, T$  lungo una curva  $\gamma$ , non paralleli ma tali che  $S \otimes T$  sia parallelo.

**Esercizio 5.4.7.** Sia  $e_1, \dots, e_n$  una base per  $T_p M$ . Dimostrare che esistono coordinate locali  $x^1, \dots, x^n$  intorno a  $p$  tali che  $\partial/\partial x_i = e_i$  in  $p$ . (Hint: basta considerare, in coordinate locali qualsiasi, il cambio di carta lineare dato dalla matrice che manda la base  $e_1, \dots, e_n$  nella base canonica.)

**Esercizio 5.4.8.** Sia  $\nabla$  una connessione a torsione nulla su una varietà  $M$ . Siano  $x^1, \dots, x^n$  coordinate locali intorno a  $p \in M$  (tali che  $p \sim 0$ .) Dimostrare che esistono coordinate locali  $y^1, \dots, y^n$  intorno a  $p$  tali che  $\frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$  in  $p$  e tali che  $\nabla \frac{\partial}{\partial y_i} = 0$  in  $p$ .

SOLUZIONE. Se uno ha capito cosè un cambio di coordinate, non è difficile. Un generico cambio di coordinate si scrive  $X = F(Y)$  cioè, se  $F = (f_1, \dots, f_n)$  si ha  $x^k = f_k(y^1, \dots, y^n)$ , ossia

$$(x^1, \dots, x^n) = (x^1(y^1, \dots, y^n), \dots, x^n(y^1, \dots, y^n))$$

Poi, trovata la  $F$  se uno vuole sapere quanto vale  $y^k(q)$  basta calcolare  $F^{-1}(x^1(q), \dots, x^n(q))$ . Imponiamo  $F(0) = 0$  così il punto  $p$  ha coordinate  $(0, \dots, 0)$  sia nelle coordinate  $X$  che in quelle  $Y$ .

Il cambio di coordinate a livello di campi di vettori è (in convenzione di Einstein)

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial x^k}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Poniamo  $\frac{\partial x^k}{\partial y_i} = \alpha_i^k$  così da avere

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = \alpha_i^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad dF = (\alpha_i^k).$$

La prima condizione che dobbiamo imporre alla  $F$  è quindi  $\alpha_i^k = \delta_{ik}$ , cioè  $dF_0 = I$ . Veniamo ora alla condizione  $\nabla \frac{\partial}{\partial y_i} = 0$  in  $p$ . Dobbiamo imporre, in zero, che valga per ogni  $i, j$

$$0 = \nabla \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial y_j} = \nabla \frac{\partial}{\partial y_i} \alpha_j^k \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial \alpha_j^k}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_k} + \alpha_j^k \nabla \frac{\partial}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_k}$$

ora, siccome  $\nabla$  è tensoriale, e quindi puntuale, nell'argomento in basso e siccome abbiamo imposto  $dF_0 = I$ , si ha che  $\nabla \frac{\partial}{\partial y_i} = \nabla \frac{\partial}{\partial x_i}$  in

zero, cioè nel punto  $p$ . Per cui dobbiamo imporre, per ogni indice non ripetuto (su quelli ripetuti si somma) che in zero valga

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \alpha_j^k}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_k} + \alpha_j^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial y_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial \alpha_j^s}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_s} + \alpha_j^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial \alpha_j^s}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_s} + \alpha_j^k \Gamma_{ik}^s \frac{\partial}{\partial x_s} = \left( \frac{\partial \alpha_j^s}{\partial y_i} + \alpha_j^k \Gamma_{ik}^s \right) \frac{\partial}{\partial x_s} \end{aligned}$$

Ove  $\Gamma_{ij}^k$  sono i simboli di Christoffel di  $\nabla$  nelle coordinate  $X$ . Ora, siccome in zero  $\alpha_j^k = \delta_{jk}$ , la condizione cercata è: per ogni  $i, j, s$ , in zero deve valere

$$0 = \frac{\partial \alpha_j^s}{\partial y_i} + \Gamma_{ij}^s = \frac{\partial^2 x^s}{\partial y_i \partial y_j} + \Gamma_{ij}^s$$

da cui, per ogni  $i, j, s$

$$\frac{\partial^2 x^s}{\partial y_i \partial y_j}(0) = -\Gamma_{ij}^s(0)$$

Siccome tutto è liscio, ciò implica che se c'è soluzione allora i Christoffel in zero sono simmetrici. D'altronde, siccome la connessione è supposta a torisione nulla, i Christoffel sono simmetrici in ogni punto. Per cui se poniamo

$$f_k(y^1, \dots, y^n) = y^k - \sum_{i \leq j} \Gamma_{ij}^k(0) y^i y^j$$

abbiamo una funzione  $F$  con le proprietà richieste.  $\square$

## Metriche Riemanniane e Connessione di Levi-Civita

### 6.1. Lezione 21: Definizione, forma di volume, Alzamento e abbassamento di indici

**6.1.1. Definizione.** Una metrica in generale è una funzione che a due punti di uno spazio associa la loro distanza. Una metrica Riemanniana lo fa infinitesimalmente su una varietà differenziabile  $M$ . In pratica se uno vuole calcolare la lunghezza di una curva  $\gamma$ , calcola  $\int \|\dot{\gamma}\|$  ove  $\|\dot{\gamma}\|$  è la norma della derivata di  $\gamma$ , ossia la distanza “infinitesimale” tra  $\gamma(t)$  e  $\gamma(t+dt)$ . Quindi avere una distanza “infinitesimale” equivale a saper dire quanto vale la norma di ogni vettore di  $TM$  e quindi a dare un prodotto scalare su ogni  $T_x M$  che vari in modo liscio. Abbiamo già abbastanza tecnologia per uscire dal dominio intuitivo delle virgolette e dare una definizione precisa.

**Definizione 6.1.1** (Metrica Riemanniana (Riemannian metric)). *Una metrica Riemanniana su una varietà differenziabile  $M$  è una sezione  $g$  del fibrato su  $M$  delle forme bilineari simmetriche su  $TM$  tale che la forma bilineare  $g_x$  sia definita positiva per ogni  $x \in M$  (un prodotto scalare insomma.)*

**Definizione 6.1.2.** *Una varietà Riemanniana  $(M, g)$  è una varietà differenziabile  $M$  dotata di una metrica Riemanniana. Normalmente se è chiaro chi sia  $g$ , una varietà Riemanniana si indicherà solo con  $M$  sottintendendo che  $g$  denoti la metrica su  $M$ .*

Pronti. Abbiam detto formalmente quello che intuivamo come nozione di distanza infinitesimale.

**6.1.2. Notazioni.** Una metrica è quindi un tensore. Di che tipo è? Si mangia due vettori e restituisce il loro prodotto scalare. Quindi è di tipo  $(0, 2)$ . La notazione tensoriale standard è  $g(X, Y)$  per indicare la funzione che nel punto  $x$  associa il prodotto scalare  $g_x(X_x, Y_x)$ .

La notazione con indici in alto e in basso in coordinate locali sarebbe

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

cioè in coordinate locali  $x^1, \dots, x^n$  intorno ad un punto  $x$ , la matrice  $(g_{ij}(x))$  è la matrice associata alla base  $\{\partial/\partial x_i\}$  di  $TM$ . Praticamente sempre, la metrica sarà indicata semplicemente con

$$g_{ij}$$

essendo chiaro che si stanno facendo i conti in coordinate locali.

Il fatto che  $g_x$  sia simmetrica è dunque equivalente a  $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$  per ogni  $x$  ed il fatto che  $g$  sia definita positiva equivale al fatto che tutti gli autovalori di  $(g_{ij})$  siano positivi.

Un'altra notazione standard è quella differenziale, cioè per dire chi è  $g$ , invece di dare la matrice, si dice chi sia la forma quadratica associata punto per punto. La notazione standard è  $ds^2$ . Per esempio, la metrica Euclidea standard su  $\mathbb{R}^n$  si scriverà tipicamente come  $g_{ij} = \delta_{ij}$  oppure  $ds^2 = dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ .

**Definizione 6.1.3** (Metrica indotta). *Se  $N$  è una sottovarietà (propria) di una varietà Riemanniana  $(M, g)$  è la metrica indotta da  $M$  su  $N$  è definita per ogni  $x \in N$ , come la restrizione a  $TN$  di  $g_x$ .*

Vediamo alcuni esempi.

**6.1.3. Grafico di una funzione.** Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione liscia e sia  $S$  il grafico di  $f$ . La superficie  $S$  è una sottovarietà liscia di  $\mathbb{R}^3$  liscia di  $\mathbb{R}^3$ . Consideriamo la metrica indotta su  $S$  dalla metrica Euclidea standard di  $\mathbb{R}^3$ .

C'è una scelta facile per delle coordinate locali di  $S$ : la proiezione su  $\mathbb{R}^2$ . Cioè ad ogni punto  $p \in S$  si associa il punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tale che  $p = (x, y, f(x, y))$ .

Il vettore  $v = \alpha \partial/\partial x + \beta \partial/\partial y$  di  $T_{(x,y)}\mathbb{R}^2$  corrisponde al vettore

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + df_{(x,y)}[v] \frac{\partial}{\partial z} \in T_p S \subset T_p \mathbb{R}^3$$

il quale ha norma quadra

$$\alpha^2 + \beta^2 + |df_{(x,y)}[v]|^2 = \alpha^2 \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) + \beta^2 \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) + 2\alpha\beta \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Per cui la metrica indotta su  $S$  si può scrivere come

$$ds^2 = dx^2 \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right) + dy^2 \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right) + 2dx dy \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

oppure come

$$g_{xx} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \quad g_{yy} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \quad g_{xy} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

**6.1.4. Metriche su prodotti.** Siano  $(M, g)$  ed  $(N, h)$  due varietà riemanniane. Il prodotto  $M \times N$  è una varietà differenziabile, il cui spazio tangente è la somma diretta degli spazi tangenti di  $M$  ed  $N$  e sulla quale si possono mettere varie metriche. La prima è la metrica prodotto (ossia teorema di pitagora)

$$ds_{M \times N}^2(v, w) = ds_M^2(v) + ds_N^2(w).$$

in termini matriciali la metrica su  $TM \oplus TN$  è data localmente da

$$\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

U'altra possibilità è di riscaldare  $N$  con una funzione  $\varphi$  che dipenda solo da  $M$ , tipo nel punto  $(x, y) \in M \times N$

$$ds_{M \times N}^2(v, w) = ds_M^2(v) + \varphi(x) ds_N^2(w).$$

Così per esempio, si descrivono le superfici di rotazione. Si consideri una funzione liscia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e mai nulla e la superficie  $S \subset \mathbb{R}^3$  ottenuta ruotando il grafico di  $f$  attorno all'asse  $x$ .  $S$  è diffeomorfa al prodotto  $\mathbb{R} \times S^1$ . Metricamente, in un punto  $t \in \mathbb{R}$  abbiamo un cerchio di raggio  $f(t)$ . Se  $(t, \theta)$  sono le coordinate di  $\mathbb{R} \times S^1$  la metrica sarà quindi descritta da

$$ds^2(t, \theta) = f(t)^2 d\theta^2 + (1 + \dot{f}(t)^2) dt^2$$

per cui

$$g_{tt} = (1 + \dot{f}(t)^2) \quad g_{\theta\theta} = f(t)^2 \quad g_{t\theta} = 0.$$

Ancora, così possiamo ottenere la metrica euclidea, tipo su  $\mathbb{R}^2$  in coordinate polari: basta porre  $f(t) = t$  e considerare solo  $(0, \infty) \times S^1$ . Per cui

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Ovviamente questo giochino non funziona in zero, ma lì le coordinate polari smettono di essere polari.

Ancora, si può riscaldare il tutto per  $f$ . Per esempio così si descrive la metrica iperbolica sul cilindro  $(0, \infty) \times S^1$ :

$$ds^2 = \frac{dt^2 + d\theta^2}{t^2}$$

**6.1.5. Forma di volume.** Il fatto che  $(g_{ij})$  sia definita positiva ci dice due cose: la prima è che  $\det(g_{ij}) \neq 0$  e la seconda è che  $\det(g_{ij}) > 0$ . Adesso, se  $\phi$  è un cambio di carta, l'espressione locale di  $g$  cambia come le forme bilineari, cioè  $A^t(g_{ij})A$ , ove  $A = d\phi$  oppure  $A = d\phi^{-1}$  a seconda del verso in cui stiamo andando. Siccome se i campi di vettori cambiano con  $d\phi$  le forme cambiano con  $d\phi^{-1}$  (e viceversa,) la forma  $\sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  ha buone chance di essere intrinsecamente definita. Infatti  $\sqrt{\det(A^t g_{ij} A)} = |\det A| \sqrt{\det(g_{ij})}$  e

$$(A^{-1} dx^1) \wedge \dots \wedge (A^{-1} dx^n) = \frac{dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n}{\det A}$$

per cui se  $M$  è orientata, ovvero dotata di un atlante i cui cambi di carta han tutti determinante positivo, la forma  $\sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  è una forma di volume su  $M$ .

In generale, quando si parla di una varietà Riemanniana  $M$  e si integrano funzioni su  $M$ , si sottintende che  $M$  sia orientata e che il calcolo lo si stia facendo usando la forma di volume data dalla metrica. Una notazione abbastanza standard per la forma di volume è  $d_{vol}$ .

**Definizione 6.1.4.** *Se  $M$  è orientata, il volume di  $(M, g)$  è*

$$\int_M 1$$

**Esercizio 6.1.5.** *Per ogni  $T > 0$  calcolare l'area del cilindro  $(T, \infty) \times S^1$  dotato della metrica iperbolica.*

**6.1.6. Esistenza.** Data una varietà differenziabile  $M$ , esiste sempre una metrica Riemanniana su  $M$ ? Se avete fatto l'esercizio 4.4.11 sapete già la risposta. Che è sì. Vediamone i dettagli. Una metrica  $g$  su  $M$  è una sezione del fibrato delle forme bilineari simmetriche su  $TM$  tale che in ogni punto  $g_x$  sia definita positiva. Il punto chiave è che l'insieme delle forme definite positive è un sottoinsieme CONVESSO dello spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche.

Cioè: se si prendono due forme bilineari simmetriche  $g, h$  e si fa una loro combinazione lineare qualsiasi  $\alpha g + \beta h$ , questa rimane una forma bilineare simmetrica. Se  $g$  e  $h$  sono entrambe definite positive allora la combinazione lineare generica può non esserlo (per esempio con  $\alpha = -1, \beta = 0$ ) ma continua ad esserlo la loro combinazione convessa  $\alpha g + (1 - \alpha)h$  con  $\alpha \in (0, 1)$ .

Sia adesso  $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$  un ricoprimento localmente finito e banalizzante per il fibrato delle forme bilineari simmetriche su  $M$ . Su ogni  $U_\alpha$  scegliamo una forma  $g_\alpha$  che sia definita positiva, per esempio quella che nelle coordinate locali di  $U_\alpha$  si esprime come  $ds^2 = \sum_i dx_i^2$ . Sia  $\{\varphi_\alpha\}$  una partizione dell'unità subordinata a  $\mathcal{U}$ . La metrica

$$g = \sum_\alpha \varphi_\alpha g_\alpha$$

è ovunque definita positiva perché in ogni punto è combinazione convessa di forme definite positive.

**6.1.7. Alzamento e abbassamento degli indici.** Una delle cose più comode di avere una metrica è che dà gratis una dualità tra 1-forme e campi di vettori. Per esempio, sarete sicuramente abituati a considerare il differenziale di una funzione come il suo gradiente. Sono due cose diverse ma che si identificano con la metrica. La chiave di tutto sta in questo fatto elementare di algebra lineare

**Fatto 6.1.6.** *Se  $g$  è una forma bilineare simmetrica e definita positiva su uno spazio vettoriale  $V$  allora*

$$(\forall v \in V \ g(X, v) = g(Y, v)) \Leftrightarrow X = Y.$$

Da cui segue l'altrettanto elementare ed importante fatto: ricorderete che  $V$  e  $V^*$  sono isomorfi ma l'isomorfismo non è canonico, ebbene la metrica fornisce un isomorfismo canonico

**Fatto 6.1.7.** Se  $g$  è una forma bilineare simmetrica e definita positiva su uno spazio vettoriale  $V$  allora per ogni  $X \in V$  la funzione  $i_X g$  definita da

$$i_X g(Y) = g(X, Y)$$

è un elemento del duale  $V^*$  di  $V$ . In oltre l'assegnamento

$$X \mapsto i_X g$$

è un isomorfismo tra  $V$  e  $V^*$  (cioè è lineare, iniettivo e surgettivo.)

Questo giochetto ci permette di cambiare a piacimento gli indici dei tensori

**Definizione 6.1.8.** Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana. Se  $S$  è un tensore di tipo  $(1, q)$ , la versione  $(0, q + 1)$  di  $S$  è il tensore di tipo  $(0, q + 1)$  definito da

$$S(X_1, \dots, X_q, X) = g(S(X_1, \dots, X_q), X).$$

Se  $S$  è un tensore di tipo  $(0, q + 1)$ , la versione  $(1, q)$  di  $S$  è definita come il tensore che associa ad  $i$  campi  $X_1, \dots, X_q$  l'unico campo di vettori  $S(X_1, \dots, X_q)$  tale che per ogni campo  $X$  si abbia

$$S(X_1, \dots, X_q, X) = g(S(X_1, \dots, X_q), X).$$

Adesso vorremmo usare la stessa formula per un tensore qualsiasi, ma se  $S$  è un tensore  $(p, q)$  chi è  $g(S, X)$ ? Ok gli diamo in pasto  $i$   $q$  campi di vettori, questo lo sappiamo fare, rimane  $d(S(X_1, \dots, X_q), X)$  che non è un campo ma un tensore  $(p, 0)$ . Noi, in modo poco ortodosso (tanto non useremo quasi mai più questa convenzione,) converremo che

$$g(X_1 \otimes \dots \otimes X_p, X) = X_1 \otimes \dots \otimes X_{(p-1)} g(X_p, X)$$

in modo da poter usare la formula di cui sopra.

**Definizione 6.1.9.** Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana. Sia  $S \in \Gamma(T_q^p M)$ . Il passaggio tra la versione  $(p, q)$  e quella  $(p - 1, q + 1)$  di  $S$  è data dalla formula

$$S(X_1, \dots, X_q, X) = g(S(X_1, \dots, X_q), X).$$

Vediamo degli esempi pratici. Sia  $S$  un tensore di tipo  $(2, 0)$ . In coordinate

$$S = a^{ij} \partial_i \otimes \partial_j$$

chi è la versione  $(1, 1)$  di  $S$ ? Beh, sarà un tensore che in coordinate si scrive come

$$S = a_j^i \partial_i \otimes dx^j.$$

Dobbiamo imporre che per ogni  $X$  valga  $g(S, X) = S(X)$ . Scriviamo  $X = b^k \partial_k$ . Per cui

$$g(S, X) = g(a^{ij} \partial_i \otimes \partial_j, b^k \partial_k) = a^{ij} b^k g(\partial_i \otimes \partial_j, \partial_k) = a^{ij} b^k g_{jk} \partial_i$$

D'altronde

$$S(X) = a_j^i dx^j \partial_i (b^k \partial_k) = a_k^i b^k \partial_i.$$

Per cui deve valere, per ogni  $X$  e quindi per ogni scelta dei  $b^k$

$$a^{ij}b^k g_{jk} \partial_i = a_k^i b^k \partial_i$$

da cui si deduce, tutto rigorosamente in notazione Einstein,

$$a_k^i = a^{ij} g_{jk}.$$

Se ci pensate bene questo non è altro che un prodotto di matrici, è come quando prendiamo una matrice  $A$  vista come applicazione lineare e gli associamo la forma bilineare  $g(AX, y)$ .

La cosa fida di questa scrittura è che gli indici si muovono in modo bilanciato:

*Il passaggio tra la versione  $(p, q)$  e quella  $(p-1, q+1)$  di un tensore  $T$  si ottiene con il seguente abbassamento di incici*

$$T_{i_1, \dots, i_q, \mathbf{h}}^{i_1, \dots, i_{(p-1)}} = T_{i_1, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_{(p-1)} \mathbf{k}} g_{\mathbf{k} \mathbf{h}}$$

Per esempio il passaggio da  $(3, 3)$  a  $(2, 4)$  si fa come

$$T_{lmn}^{ijk} g_{kh} = T_{lmnh}^{ij}$$

Adesso vorremmo che l'operazione inversa, cioè l'alzamento di un indice, venisse fatta tramite dei simboli  $g^{ij}$ , in modo da poter scrivere, bilanciatamente

$$a^{ij} = a_k^i g^{kj}$$

Ma se vale

$$a_j^i = a^{ik} g_{kj}$$

ricordando che queste non sono altro che scritture matriciali, dovrebbe valere che  $g^{ij}$  sia la trasposta della matrice inversa di  $g_{ij}$ . E vi pare che possa non tornare? Vediamolo.

Data una metrica  $g$  dire  $g = g_{ij}$  in coordinate significa  $g = g_{ij} dx^i dx^j$ . Ossia la metrica è data come un tensore  $(0, 2)$ . Chi è la versione  $(2, 0)$  della metrica? In coordinate sarà un tensore  $g^{ik} \partial_i \otimes \partial_j$ .

**Fatto 6.1.10.**  $(g^{ji}) = (g_{ij})^{-1}$  ossia  $g^{ik} g_{kj} = \delta_{ij}$

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo  $g = g_{ij} dx^i dx^j$  nella sua versione  $(0, 2)$  e  $g = g^{ij} \partial_i \partial_j$  nella sua versione  $(2, 0)$ .

Cominciamo con la versione  $(1, 1)$  della metrica. Sarà l'abbassamento dell'indice della versione  $(2, 0)$  quindi

$$g_j^i = g^{ik} g_{kj}$$

adesso abbassiamo ancora un indice:

$$g_{ij} = g_i^k g_{kj} = g^{kh} g_{hi} g_{kj}$$

da cui si deduce

$$g^{kh} g_{hi} = \delta_{ki}.$$

□

Per cui per esempio nel passaggio da tensori (1, 1) a tensori (2, 0) e viceversa abbiamo la comoda scrittura:

$$a_j^i = a^{ik} g_{kj} \quad a^{ik} = a_j^i g^{jk}$$

ed in generale per un tensore qualsiasi

$$T_{i_1, \dots, i_q, \mathbf{h}}^{i_1, \dots, i_{(p-1)}} = T_{i_1, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_{(p-1)} \mathbf{k}} g_{\mathbf{h} \mathbf{k}} \quad T_{i_1, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_{(p-1)} \mathbf{k}} = T_{i_1, \dots, i_q, \mathbf{h}}^{i_1, \dots, i_{(p-1)}} g^{\mathbf{h} \mathbf{k}}.$$

**Definizione 6.1.11.** *L'alzamento di un campo di vettori  $X$  sarà indicato con  $\theta_X$ . Cioè  $\theta_X$  è la 1-forma data da*

$$\theta_X(Y) = g(X, Y) = i_X g(Y)$$

ove  $i_X$  indica l'usuale contrazione di tensori ( $i_X g = c_{1,1}(X \otimes g)$ .)

**Esercizio 6.1.12.** *Sia  $\phi_t$  il flusso in  $\mathbb{R}^2$  dato dalla rotazione attorno all'origine con velocità angolare costante. Sia  $X$  il campo associato. Scrivere  $\theta_X$  in coordinate cartesiane e polari. La forma  $\theta_X$  è esatta?*

L'abbassamento di una forma è "il gradiente". O meglio, data una 1-forma  $\omega$  il suo abbassamento è il campo  $X_\omega$  tale che

$$\omega(Y) = g(X_\omega, Y)$$

per ogni  $Y$ . Se  $\omega = df$  allora la sua versione vettoriale è il gradiente.

**Definizione 6.1.13.** *Il gradiente di una funzione  $f$  la versione (1, 0) della forma  $df$ :*

$$Y(f) = df(Y) = g(\text{grad}(f), Y).$$

Se il differenziale di  $f$  si scrive in coordinate come  $\frac{\partial f}{\partial x_i} dx^i$  allora il suo gradiente si scriverà come

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x_i} g^{ik} \partial_k$$

e nel caso della metrica euclidea standard su  $\mathbb{R}^n$  si ritrova la scrittura usuale.

**Esercizio 6.1.14.** *Scrivere il gradiente in coordinate polari.*

## 6.2. Lezione 22: Formula di Koszul e Connessione di Levi Civita

Questa lezione è interamente dedicata alla dimostrazione del seguente miracolo.

**Teorema 6.2.1.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana. Esiste un'unica connessione su  $M$ , detta di Levi Civita, che sia a torsione nulla e tale che la metrica sia parallela. In altre parole, esiste una unica connessione  $\nabla$  tale che*

- $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$
- $\nabla g = 0$

DIMOSTRAZIONE. Primo, ricordiamo che  $[X, Y] = L_X Y$  che non fa mai male. Secondo, ricordiamo che torsione nulla significa

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Poi c'è da non dimenticare la regola per il differenziale delle 1-forme (vedi Esercizio 3.2.9)

$$d\omega(Y, Z) = Y(\omega(Z)) - Z(\omega(Y)) - \omega([Y, Z]).$$

Ed infine ricordiamo la regole per le derivazioni dei tensori (vedasi Esercizio 5.1.7 ed Esercizio 4.3.11.)

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = \nabla_X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

e

$$(L_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z])$$

ossia

$$\begin{aligned} L_X(g(Y, Z)) &= X(g(Y, Z)) = \nabla_X(g(Y, Z)) \\ &= (\nabla_X g)(Y, Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &= (L_X g)(Y, Z) + g(L_X Y, Z) + g(Y, L_X Z) \end{aligned}$$

dire che la metrica è parallela significa quindi che vale la seguente regola del prodotto

$$\nabla_Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).$$

**Lemma 6.2.2** (Formula di Koszul). *Se  $\nabla$  è una connessione a torsione nulla e tale che  $\nabla g = 0$  allora vale*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Y(g(X, Z)) + X(g(Y, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) + g([Z, Y], X) \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Questo è il primo calcolo di geometria Riemanniana che facciamo. Sembrano tutti dei gran giochini delle tre carte a base di torsione nulla e metrica parallela, ma poi uno si abitua.

Il movimento fondamentale delle nostre tre carte sarà riscrivere il fatto che la metrica è parallela così

$$g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(Y, \nabla_X Z)$$

Nel conto che segue i colori indicano le operazioni che stiamo facendo. I termini rossi sono quelli che stiamo manipolando, i termini verdi sono i pezzi “giusti” della Koszul che stavamo cercando ed i termini in nero

sono quelli che non tocchiamo piú). Pronti-partenza-via:

$$\begin{aligned}
& g(\nabla_X Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(Y, \nabla_X Z) \\
& = X(g(Y, Z)) - g(Y, \nabla_X Z) \pm g(Y, \nabla_Z X) \\
& = X(g(Y, Z)) - g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) - g(Y, \nabla_Z X) \\
& = X(g(Y, Z)) - g(Y, [X, Z]) - g(Y, \nabla_Z X) \\
& = X(g(Y, Z)) - g(Y, [X, Z]) - Z(g(Y, X)) + g(\nabla_Z Y, X) \\
& = X(g(Y, Z)) - g(Y, [X, Z]) - Z(g(Y, X)) + g(\nabla_Z Y, X) \pm g(\nabla_Y Z, X) \\
& = X(g(Y, Z)) - g(Y, [X, Z]) - Z(g(X, Y)) \\
& \quad + g([Z, Y], X) + g(\nabla_Y Z, X) \\
& = X(g(Y, Z)) - g(Y, [X, Z]) - Z(g(X, Y)) + g([Z, Y], X) \\
& \quad + Y(g(Z, X)) - g(Z, \nabla_Y X) \\
& = X(g(Y, Z)) - g(Y, [X, Z]) - Z(g(X, Y)) + g([Z, Y], X) \\
& \quad + Y(g(Z, X)) - g(Z, \nabla_Y X) \pm g(Z, \nabla_X Y) \\
& = X(g(Y, Z)) - g(Y, [X, Z]) - Z(g(X, Y)) + g([Z, Y], X) \\
& \quad + Y(g(Z, X)) + g([X, Y], Z) - g(\nabla_X Y, Z)
\end{aligned}$$

□

La grande conseguenza di questo contazzo è che la parte di destra è sempre definibile e non contiene il simbolo della connessione!!!

Per cui possiamo **definire** la connessione di Levi Civita mediante la formula di Koszul. Bisogna però controllare che tale espressione dia effettivamente una connessione.

**Lemma 6.2.3.** *La quantità*

$$\begin{aligned}
K(X, Y, Z) &= Y(g(X, Z)) + X(g(Y, Z)) - Z(g(X, Y)) \\
&\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) + g([Z, Y], X)
\end{aligned}$$

è  $\mathbb{R}$ -lineare in tutti gli argomenti.

DIMOSTRAZIONE. Ovvvia. □

**Lemma 6.2.4.**  *$K(X, Y, Z)$  è tensoriale in  $X$ .*

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che è  $C^\infty$ -lineare. Per ogni tripla di campi  $X, Y, Z$  e ogni funzione liscia  $f$  si deve mostrare vhe vale  $K(fX, Y, Z) = fK(X, Y, Z)$ . Il termine  $Xg(Z, Y)$  non dà problemi, così come  $g([Z, Y], X)$ . vediamo gli altri termini

$$\begin{aligned}
Y(g(fX, Z)) + g([fX, Y], Z) &= Y(g(fX, Z)) + g(fXY - Y(fX), Z) \\
&= Y(f)g(X, Z) + fY(g(X, Z)) + g(fXY - fYX - Y(f)X, Z) \\
&= Y(f)g(X, Z) + fY(g(X, Z)) + fg([X, Y], Z) - Y(f)g(X, Z) \\
&= f(Y(g(X, Z)) + g([X, Y], Z))
\end{aligned}$$

Il termine  $Z(g(X, Y)) + g([X, Z], Y)$  viene con lo stesso conto una volta scambiato  $Y$  con  $Z$ .  $\square$

**Lemma 6.2.5.**  $K(X, Y, Z)$  è tensoriale in  $Z$ .

DIMOSTRAZIONE. È esattamente uguale alla dimostrazione del lemma precedente.  $\square$

Dato che  $K(X, Y, Z)$  è tensoriale in  $Z$ , possiamo “alzare” il suo indice: Per ogni  $X, Y$  esiste un unico campo di vettori  $K(X, Y)$  tale che per ogni campo  $Z$  si abbia  $g(K(X, Y), Z) = K(X, Y, Z)$ .

**Lemma 6.2.6.**  $\frac{K(X, Y)}{2}$  è una derivazione in  $Y$ .

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} g(K(X, fY), Z) &= fY(g(X, Z)) + X(g(fY, Z)) - Z(g(X, fY)) \\ &\quad + g([X, fY], Z) - g([X, Z], fY) + g([Z, fY], X) \\ &= fY(g(X, Z)) + fX(g(Y, Z)) - fZ(g(X, Y)) \\ &\quad + X(f)g(Y, Z) - Z(f)g(X, Y) \\ &\quad + g([X, fY], Z) - g([X, Z], fY) + g([Z, fY], X) \\ &= fY(g(X, Z)) + fX(g(Y, Z)) - fZ(g(X, Y)) \\ &\quad + X(f)g(Y, Z) - Z(f)g(X, Y) \\ &\quad + fg([X, Y], Z) - fg([X, Z], Y) + fg([Z, Y], X) \\ &\quad + X(f)g(Y, Z) + Z(f)g(X, Y) \\ &= f(g(K(X, Y), Z)) + 2X(f)g(Y, Z) \end{aligned}$$

Per cui, per ogni  $Z$  vale

$$g\left(\frac{K(X, fY)}{2}, Z\right) = g\left(f\frac{K(X, Y)}{2} + X(f)Y, Z\right)$$

da cui  $\frac{K}{2}(X, fY) = f\frac{K}{2}(X, Y) + X(f)Y$  (notare che se il fattore  $\frac{1}{2}$  è fondamentale perché risulti una derivazione.)  $\square$

Tutti questi lemmi dimostrano la formula di Koszul definisce una connessione  $\nabla_X Y = \frac{K}{2}(X, Y)$ .

**Definizione 6.2.7** (Connessione di Levi Civita). *La connessione di Levi Civita associata alla metrica  $g$  è data dalla formula*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Y(g(X, Z)) + X(g(Y, Z)) - Z(g(X, Y)) \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) + g([Z, Y], X). \end{aligned}$$

Occhio che la notazione  $K(X, Y, Z)$  o  $K(X, Y)$  non sono per niente standard e sono state usate solo per questa dimostrazione. Anzi, in futuro la lettera  $k$  sarà in genere riservata alle curvature scalari e sezionali.

Per finire di dimostrare il teorema ci basta dimostrare che la connessione di Levi Civita ha torsione nulla e che la metrica è parallela.

**Lemma 6.2.8.** *La Connessione di Levi Civita ha torsione nulla.*

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned}
& 2g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z) \\
&= Y(g(X, Z)) + X(g(Y, Z)) - Z(g(X, Y)) \\
&+ g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) + g([Z, Y], X) \\
&\quad - X(g(Y, Z)) - Y(g(X, Z)) + Z(g(Y, X)) \\
&\quad - g([Y, X], Z) + g([Y, Z], X) - g([Z, X], Y) \\
&= 2g([X, Y], Z)
\end{aligned}$$

□

**Lemma 6.2.9.** *La metrica è parallela per la sua connessione di Levi Civita.*

DIMOSTRAZIONE. Come avrete capito, si usa la Koszul a randa:

$$\begin{aligned}
2(\nabla_X g)(Z, Y) &= 2X(g(Y, Z)) - 2g(\nabla_X Y, Z) - 2g(\nabla_X Z, Y) \\
&= 2X(g(Y, Z)) - Y(g(X, Z)) - X(g(Y, Z)) + Z(g(X, Y)) \\
&\quad - g([X, Y], Z) + g([X, Z], Y) - g([Z, Y], X) \\
&\quad - Z(g(X, Y)) - X(g(Z, Y)) + Y(g(X, Z)) \\
&\quad - g([X, Z], Y) + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) = 0
\end{aligned}$$

□

Quindi la connessione di Levi Civita soddisfa le proprietà richieste ed il Lemma 6.2.2 ci assicura l'unicità. Il teorema è finalmente dimostrato. □

### 6.3. Lezione 23: Espressioni locali della connessione, isometrie; gradiente, hessiano e laplaciano

Questa è l'ultima volta che chiameremo la connessione di Levi Civita col suo nome completo. D'ora in avanti, fissata una varietà Riemanniana, verrà sottinteso che  $\nabla$  sia la connessione di Levi Civita associata alla metrica.

**6.3.1. Una forma intrinseca di dare la connessione.** Per ora abbiamo dato una definizione che è parecchio infumabile. Ne diamo un'altra, per la verità poco fumabile anche questa, ma più intrinseca.

**Teorema 6.3.1.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana. Per ogni terna  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$  si ha*

$$(L_X g)(Y, Z) + d\theta_X(Y, Z) = 2g(\nabla_Y X, Z)$$

DIMOSTRAZIONE. Indovinate che formula si usa?

$$\begin{aligned}
 (L_X g)(Y, Z) + d\theta_X(Y, Z) &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \\
 &\quad + Y(\theta_X(Z)) - Z(\theta_X(Y)) - \theta_X([Y, Z]) \\
 &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \\
 &\quad + Y(g(X, Z)) - Z(g(X, Y)) - g(X, [Y, Z]) \\
 &= X(g(Y, Z)) + Y(g(X, Z)) - Z(g(Y, X)) \\
 &\quad + g([Y, X], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y) \\
 &= 2g(\nabla_Y X, Z)
 \end{aligned}$$

□

Notare che se  $X$  è il gradiente di una funzione, allora  $d\theta_X = 0$  perché  $d^2 = 0$  e quindi la connessione si calcola in termini di derivata di Lie. Così se usiamo coordinate locali i commutatori spariscono per la regola di Schwartz e la formula per calcolare la connessione diventa umana.

**6.3.2. I Christoffel con i  $g_{ij}$ .** A volte per fare i conti bisogna sporcarsi le mani. È bene quindi sapere come si scrivono i simboli di Christoffel sapendo l'espressione locale della metrica. Vediamolo. I Christoffel sono definiti dalla relazione

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

Per cui

$$2g(\nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) = 2g(\Gamma_{ij}^h \partial_h, \partial_k) = 2\Gamma_{ij}^h g_{hk} = 2\Gamma_{ijk}$$

(l'unica somma è sull'indice  $h$ .) Per ora abbiamo “abbassato un indice” al Christoffel, dandone una versione con tre indici in basso. La formula di Koszul ed il fatto che  $[\partial_i, \partial_j] = 0$  ci dice adesso che

$$\begin{aligned}
 2\Gamma_{ijk} &= \partial_j(g(\partial_i, \partial_k)) + \partial_i(g(\partial_j, \partial_k)) - \partial_k(g(\partial_i, \partial_j)) \\
 &= \partial_j(g_{jk}) + \partial_i(g_{jk}) - \partial_k(g_{ij})
 \end{aligned}$$

da cui

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{(\partial_j(g_{ik}) + \partial_i(g_{jk}) - \partial_k(g_{ij})) g^{kh}}{2}$$

(si somma sull'indice  $k$ .)

**6.3.3. Seconda forma fondamentale vettoriale.** Sia  $N$  una sottovarietà di una varietà Riemanniana  $M$ . Chiameremo  $g^M$  la metrica su  $M$  e  $g^N$  quella indotta su  $N$ ; indicheremo con  $\nabla^M$  e  $\nabla^N$  le relative connessioni.

Ovviamente, conoscendo  $g^M$  si conosce anche  $g^N$  e quindi si può ricavare  $\nabla^N$  per esempio scrivendone i simboli di Christoffel. Ma sempre sti Christoffel...

**Teorema 6.3.2.** Per ogni coppia di campi  $X, Y \in \Gamma(TN)$  il campo  $\nabla_X^N Y$  si ottiene proiettando il campo  $\nabla_X^M Y$  su  $TN$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Il commutatore di due campi  $X, Y$  è un campo tangente a  $N$  indipendentemente dal fatto che lo si calcoli in  $N$  o in  $M$ . In altre parole, se  $X'$  e  $Y'$  sono estensioni di  $X$  e  $Y$  a campi su  $M$ , si ha  $[X', Y']_p = [X, Y]_p$  per ogni  $p \in N$ . Questo perchè le linee di flusso di  $X'$  che partono da  $p \in N$  rimangono in  $N$  perché  $X'$  è tangente a  $N$  lungo  $N$ . A questo punto la formula di Koszul conclude la dimostrazione. Sia  $p \in N$ ,  $X, Y, Z$  campi tangenti a  $N$  e  $X', Y', Z'$  loro estensioni a  $M$

$$\begin{aligned} 2g^N(\nabla_X^N Y, Z)_p &= Y(g^N(X, Z))_p + X(g^N(Y, Z))_p - Z(g^N(X, Y))_p \\ &\quad + g^N([X, Y], Z)_p - g^N([X, Z], Y)_p + g^N([Z, Y], X)_p \\ &= Y(g^M(X, Z))_p + X(g^M(Y, Z))_p - Z(g^M(X, Y))_p \\ &\quad + g^M([X, Y], Z)_p - g^M([X, Z], Y)_p + g^M([Z, Y], X)_p \\ &= Y'(g^M(X', Z'))_p + X'(g^M(Y', Z'))_p - Z'(g^M(X', Y'))_p \\ &\quad + g^M([X', Y'], Z')_p - g^M([X', Z'], Y')_p + g^M([Z', Y'], X')_p \\ &= 2g^M(\nabla_{X'} Y', Z')_p \end{aligned}$$

da cui si deduce che  $\nabla_X^N Y$  è la parte tangente ad  $N$  di  $\nabla_X^M Y'$ .  $\square$

**Definizione 6.3.3.** *La seconda forma fondamentale vettoriale di  $N$  è definita da*

$$\Pi(X, Y) = \nabla_X^M Y - \nabla_X^N Y$$

*ossia la componente normale ad  $N$  di  $\nabla_X^M Y$ .*

Abbiamo già visto che la differenza di due connessioni è tensoriale, lo stesso conto mostra che  $\Pi(X, Y)$  è un tensore. Quindi è puntuale (cioè dipende solo dai valori di  $X$  e  $Y$  nel punto considerato.) Per questo spesso in letteratura si trova

$$\Pi(V, W)$$

con  $V, W \in T_p N$  anziché campi. Per come è definita,  $\Pi(V, W)$  ha valori in  $(TN)^\perp$ . Nel caso di ipersuperfici in  $TN^\perp$  è quindi unidimensionale ed usando come base di  $TN^\perp$  la normale unitaria esterna, si può descrivere  $\Pi(V, W)$  come una funzione.

**Osservazione 6.3.4.** *Dal fatto che  $[X', Y'] = [X, Y]$  e che entrambe  $\nabla^M$  e  $\nabla^N$  siano a torsione nulla segue che  $\Pi$  è simmetrico:*

$$\Pi(X, Y) = \Pi(Y, X).$$

**Esercizio 6.3.5.** *Dimostrare l'Osservazione 6.3.4.*

**6.3.4. Isometrie e killing fields.** Un'altra cosa comoda per fare i conti è che la connessione, per come è definita, deve essere invariante per isometrie. Ed infatti lo è. Ma prima bisogna definire cosa sia un'isometria. Sarà una roba che preserva la metrica. Già ma che vuol dire? Le metriche son tensori e quindi la maniera naturale di aggaggiarci è col pull-back.

**Definizione 6.3.6.** *Un diffeomorfismo  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  tra due varietà Riemanniane (possibilmente  $M = N$ ) si dice un'isometria se  $f^*h = g$ .*

Vi ricordate l'esercizio 4.4.1? Ci diceva che la derivata di Lie è invariante per diffeo. Bene la connessione lo è per isometrie.

**Teorema 6.3.7.** *Se  $\phi : (M, g) \rightarrow (N, h)$  è un'isometria allora*

$$\phi_*(\nabla_X Y) = \nabla_{\phi_* X} \phi_* Y.$$

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente la connessione che si usa per si calcolare  $\nabla_{\phi_* X} \phi_* Y$  è quella di  $N$ . Per ogni  $X, Y \in \Gamma(TM)$  e  $Z \in \Gamma(TN)$  si ha

$$\begin{aligned} 2h(\phi_*(\nabla_X Y), Z) &= 2h(\phi_*(\nabla_X Y), \phi_* \phi^* Z) = 2\phi^* h(\nabla_X Y, \phi^* Z) \\ &= 2g(\nabla_X Y, \phi^* Z) = Y(g(X, \phi^* Z)) + X(g(Y, \phi^* Z)) - \phi^* Z(g(X, Y)) \\ &\quad + g([X, Y], \phi^* Z) - g([X, \phi^* Z], Y) + g([\phi^* Z, Y], X) \\ &= L_Y(g(\phi^* \phi_* X, \phi^* Z)) + L_X(g(\phi^* \phi_* Y, \phi^* Z)) - L_{\phi^* Z}(g(\phi^* \phi_* X, Y)) \\ &\quad + g(L_X Y, \phi^* Z) - g(L_X \phi^* Z, Y) + g(L_{\phi^* Z} Y, X) \\ &= L_{\phi_* Y}(\phi_* g(\phi_* X, Z)) + L_{\phi_* X}(\phi_* g(\phi_* Y, Z)) - L_Z(\phi_* g(\phi_* X, \phi_* Y)) \\ &\quad + g(\phi^* \phi_*(L_X Y), \phi^* Z) - g(\phi^* \phi_*(L_X \phi^* Z), \phi^* \phi_* Y) \\ &\quad + g(\phi^* \phi_*(L_{\phi^* Z} Y), \phi^* \phi_* X) \\ &= L_{\phi_* Y}(h(\phi_* X, Z)) + L_{\phi_* X}(h(\phi_* Y, Z)) - L_Z(h(\phi_* X, \phi_* Y)) \\ &\quad + \phi_* g(\phi_*(L_X Y), Z) - \phi_* g(\phi_*(L_X \phi^* Z), \phi_* Y) \\ &\quad + \phi_* g(\phi_* L_{\phi^* Z} Y, \phi_* X) \\ &= L_{\phi_* Y}(h(\phi_* X, Z)) + L_{\phi_* X}(h(\phi_* Y, Z)) - L_Z(h(\phi_* X, \phi_* Y)) \\ &\quad + h(L_{\phi_* X} \phi_* Y, Z) - h(L_{\phi_* X} Z, \phi_* Y) + h(L_Z \phi_* Y, \phi_* X) \\ &= 2h(\nabla_{\phi_* X} \phi_* Y, Z). \end{aligned}$$

Notare che se uno fosse furbo osserverebbe che basta fare il conto per i campi coordinati, il che eliminerebbe tutta la parte verde<sup>1</sup> del calcolo perché i commutatori spariscono.  $\square$

Naturalmente un'isometria può andare da  $M$  in sé. Un caso particolare è quando si ha un flusso di isometrie.

**Definizione 6.3.8** (Killing field). *Un campo di vettori  $X$  su una varietà Riemanniana  $M$  si dice "killing" (il termine tecnico in italiano, se esiste, non lo conosco) se il flusso  $\phi_t$  associato è fatto di isometrie (cioè se  $\phi_t$  è un'isometria per ogni  $t$ .)*

Vediamo alcune proprietà di questi killing fields.

**Fatto 6.3.9.**  *$X$  è un killing field se e solo se  $L_X g = 0$ .*

<sup>1</sup>Per chi avesse stampato sta roba in bianco e nero: la parte verde sarebbe tutto quello che origina dai termini della terza riga.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\phi_t$  il flusso associato a  $X$ . Dalla definizione di derivata di lie  $L_X g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* g - g}{t}$  si ottiene che  $(L_X g)(Y, Z)$  è dato da

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^* g(Y, Z) - g(Y, Z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g((\phi_t)_* Y, (\phi_t)_* Z) - g(Y, Z)}{t}.$$

Se  $\phi_t$  è un'isometria per ogni  $t$  allora  $g((\phi_t)_* Y, (\phi_t)_* Z) = g(Y, Z)$  e quindi  $L_X g = 0$ . D'altronde, se  $L_X g = 0$  in ogni punto allora la quantità  $g((\phi_t)_* Y, (\phi_t)_* Z)$  è costante in  $t$  per ogni scelta di  $Y$  e  $Z$ , per cui  $\phi_t$  è un'isometria.  $\square$

**Fatto 6.3.10.**  $X$  è un killing field se e solo se

$$g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y).$$

DIMOSTRAZIONE. Dal Teorema 6.3.1 sappiamo che

$$L_X g(Y, Z) + d\theta_X(Y, Z) = 2g(\nabla_Y X, Z)$$

siccome  $d\theta_X(Y, Z) = -d\theta_X(Z, Y)$  perché è una 2-forma e le 2-forme sono antisimmetriche, si ha

$$2g(\nabla_Y X, Z) + 2g(\nabla_Z X, Y) = 2L_X g(Y, Z).$$

per cui  $g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$  se e solo se  $L_X g = 0$  e per il fatto precedente, ciò equivale ad  $X$  killing.  $\square$

**Fatto 6.3.11.**  $L$  insieme dei killing fields è uno spazio vettoriale.

DIMOSTRAZIONE. Siccome  $X$  è killing se e solo se  $L_X g = 0$ , se abbiamo  $X$  e  $Y$  killing, allora usando la formula

$$X(g(Y, Z)) = (L_X g)(Y, Z) + g(L_X Y, Z) + g(Y, L_X Z)$$

se ne deduce che  $L_{aX+bY} g = aL_X g + bL_Y g = 0$  per ogni  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**6.3.5. Gradienti, Hessiani e Laplaciani.** Abbiamo già introdotto il gradiente di una funzione  $f$  come versione  $(1, 0)$  di  $df$

$$X(f) = df[X] = g(X, \text{grad } f).$$

E quindi risottolieniamo che è una nozione metrica. No metrica, no gradiente. Così come niente hessiano o laplaciano.

Vediamo come si definisce l'hessiano. Beh, sappiamo fare la derivata covariante di un tensore  $\nabla_X S$  e sappiamo che è tensoriale in  $X$ .

**Definizione 6.3.12.** Per ogni tensore  $S$  di tipo  $(p, q)$  il tensore  $\nabla S$  è un tensore di tipo  $(p, q+1)$  definito da

$$\begin{aligned} \nabla S(X, X_1, \dots, X_q) &= (\nabla_X S)(X_1, \dots, X_q) \\ &= X(S(X_1, \dots, X_q)) - \sum_i S(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_q) \end{aligned}$$

**Definizione 6.3.13.** Per ogni tensore  $S \in \Gamma(T_q^p M)$ , la derivata covariante seconda è il tensore di tipo  $(p, q + 2)$  definito da

$$\begin{aligned}\nabla^2 S(X, Y, Z_1, \dots, Z_q) &= (\nabla(\nabla S))(X, Y, Z_1, \dots, Z_q) \\ &= (\nabla_X(\nabla S))(Y, Z_1, \dots, Z_q).\end{aligned}$$

OCCHIO che

$$(\nabla_X(\nabla S))(Y, Z_1, \dots, Z_q) \neq (\nabla_X(\nabla_Y S))(Z_1, \dots, Z_q)$$

Infatti

$$\begin{aligned}(\nabla_X(\nabla S))(Y, Z_1, \dots, Z_q) &= \nabla_X(\nabla S(Y, Z_1, \dots, Z_q)) \\ - \nabla S(\nabla_X Y, Z_1, \dots, Z_q) &- \sum_i \nabla S(Y, X_1, \dots, \nabla_X Z_i, \dots, Z_q) \\ &= \nabla_X(\nabla_Y S(Z_1, \dots, Z_q)) \\ - \nabla_{\nabla_X Y} S(Z_1, \dots, Z_q) &- \sum_i \nabla_Y S(X_1, \dots, \nabla_X Z_i, \dots, Z_q)\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}(\nabla_X(\nabla_Y S))(Z_1, \dots, Z_q) &= \nabla_X(\nabla_Y S(Z_1, \dots, Z_q)) \\ - \sum_i \nabla_Y S(Z_1, \dots, \nabla_X Z_i, \dots, Z_q)\end{aligned}$$

per cui si ha

$$(13) \quad \nabla_{X,Y}^2 S = (\nabla_X(\nabla_Y S)) - \nabla_{\nabla_X Y} S.$$

Ricordatevi bene questa formula nel caso in cui  $S$  sia un campo di vettori.

Per il momento ci limitiamo a usare questa formula per definire l'Hessiano di una funzione.

**Definizione 6.3.14.** L'hessiano di  $f$  è dato dal tensore  $(0, 2)$

$$Hess(f) = \nabla_{X,Y}^2 f = \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y} f$$

Notare che l'hessiano è simmetrico perché la connessione ha torsione nulla. Vediamo adesso chi sia la versione  $(1, 1)$  dell'hessiano.

$$\begin{aligned}\nabla_{X,Y}^2 f &= \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y} f \\ &= \nabla_X g(Y, \text{grad } f) - g(\nabla_X Y, \text{grad } f) = g(Y, \nabla_X \text{grad } f)\end{aligned}$$

Per cui la versione  $(1, 1)$  dell'hessiano è

$$H_f(X) = \nabla_X(\text{grad } f)$$

Adesso, veniamo al laplaciano, che vorrebbe essere la traccia dell'hessiano.

**Definizione 6.3.15.** *La traccia di un tensore  $S$  di tipo  $(1, 1)$  è*

$$\text{tr}(S) = dx^k(S(\partial_k)).$$

In coordinate, se  $S = a_j^i dx^j \partial_i$  allora  $\text{tr}(S) = a_k^k$  (tutto rigorosamente in convenzione di Einstein.) Quindi se pensiamo  $(a_j^i)$  come la matrice associata ad un'applicazione lineare la traccia è proprio la traccia (notare la scrittura bilanciata.)

Se definiamo la traccia di un tensore  $S$  di tipo  $(0, 2)$  come

$$\sum_k S(\partial_k, \partial_k)$$

abbiamo un problema perché la scrittura non è bilanciata. E infatti, definita così, dipende dalle coordinate (a meno che non si facciano cambi ortonormali.)

Ma la traccia di un tensore di tipo  $(0, 2)$  la si può sempre calcolare alzandone un'indice e trasformandolo in un tensore tipo  $(1, 1)$ . Per cui, se  $S = a_{ij}$ , la sua versione  $(1, 1)$  sarà

$$a_j^i = a_{ik} g^{kj}$$

per cui la traccia giusta di  $S$  non è  $\sum_i a_{ii}$  ma

$$a_{ij} g^{ji}$$

Se però ci mettiamo in una base ortonormale possiamo calcolare la traccia di un tensore  $(1, 1)$  come al solito in quanto se  $g_{ij} = \delta_{ij}$  si ha

$$\sum_k a_{kk} = \sum_k a_k^i g_{ik} = a_k^k$$

per cui

$$\sum_k g(S(\partial_k), \partial_k) = \sum_k g(a_k^i \partial_i, \partial_k) = \sum_k a_k^i g_{ik} = a_k^k$$

**Definizione 6.3.16.** *Il laplaciano di  $f$  è definito come la traccia dell'hessiano*

$$\Delta f = \text{tr}(\text{Hess}(f)) = \text{tr}(H_f) = \text{tr}(\nabla \text{grad } f).$$

In  $\mathbb{R}^n$  siamo abituati a dire che il laplaciano è la divergenza del gradiente. E infatti è così anche in ambiente Riemanniano generico.

**Definizione 6.3.17.** *La divergenza di un campo di vettori  $X$  è definita come*

$$\text{div}(X) = \text{tr}(\nabla X).$$

In una base ortonormale vale la solita

$$\operatorname{div}(X) = \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i)$$

Per cui

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

e se ci mettiamo in una base ortonormale, ritroviamo l'amata scrittura

$$\Delta f = \sum_i \nabla_{e_i, e_i}^2 f.$$

**Esercizio 6.3.18.** *Dimostrare che*

$$\operatorname{div}(X)d_{\text{vol}} = d(i_X d_{\text{vol}}) = L_X(d_{\text{vol}}).$$

*Hint: una strada può essere quella di dimostrare prima che per le forme vale*

$$d\omega = dx^i \wedge \nabla_{\partial_i} \omega.$$

*Un'altra strada è fare il contazzo.*

Tutto ciò si generalizza ai tensori. Vediamo traccia e divergenza.

La traccia di un tensore  $(1, 1)$  la si può scrivere anche così

$$c_{1,1}(c_{1,1}(\partial_k \otimes S \otimes dx^k))$$

infatti, se  $S = a_j^i \partial_i \otimes dx^j$

$$c_{1,1}(c_{1,1}(a_j^i \partial_k \otimes \partial_i \otimes dx^j \otimes dx^k)) = a_k^k$$

Questa formula vale per tensori qualsiasi.

**Definizione 6.3.19.** *Sia  $S$  un tensore  $(p+1, q+1)$ . La traccia di  $S$  è definita come il tensore  $(p, q)$*

$$c_{1,q+1}(c_{1,1}(\partial_k \otimes S \otimes dx^k)).$$

Se

$$S = S_{j_0, \dots, j_q}^{i_0, \dots, i_p} \partial_{i_0} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_0} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

allora

$$\operatorname{tr}(S) = S_{k, j_1, \dots, j_q}^{k, i_1, \dots, i_p} \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_q}$$

**Definizione 6.3.20.** *La divergenza di un tensore  $T$  di tipo  $(p+1, q)$  è data dal tensore  $(p, q)$*

$$\operatorname{div}(T) = \operatorname{tr}(\nabla T)$$

In particolare se  $S$  è un tensore  $(1, r+1)$  la sua traccia è un tensore  $(0, r)$  e se  $T$  è di tipo  $(1, r)$  la sua divergenza è di tipo  $(0, r)$ . Rispetto a basi ortonormali vale

$$\operatorname{tr}(S)(X_1, \dots, X_r) = \sum_i g(S(e_i, X_1, \dots, X_r), e_i)$$

$$\operatorname{div}(T)(X_1, \dots, X_r) = \sum_i g((\nabla_{e_i} T)(X_1, \dots, X_r), e_i)$$

### 6.4. Lezione 24: Esercitazione

Consideriamo il modello del semispazio per lo spazio iperbolico tridimensionale. In coordinate  $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$  e la metrica è

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2}.$$

La metrica in coordinate si scrive quindi come

$$g_{ij} = \delta_{ij}/t^2$$

e l'inversa della metrica sarà quindi

$$g^{ij} = t^2 \delta_{ij}.$$

Adesso usiamo pedissequamente la formula dei Christoffel (tranquilli, sta cosa poi uno smette di farla)

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{(\partial_j(g_{ik}) + \partial_i(g_{jk}) - \partial_k(g_{ij})) g^{kh}}{2}$$

La connessione avrà i simboli di Christoffel seguenti

$$\left\{ \begin{array}{llll} \Gamma_{xx}^x = 0 & \Gamma_{yy}^y = 0 & \Gamma_{xx}^y = 0 & \Gamma_{yy}^x = 0 \\ \Gamma_{xx}^t = \frac{(\partial_x(g_{xk}) + \partial_x(g_{xk}) - \partial_k(g_{xx}))g^{kt}}{2} = -\frac{\partial_t(g_{xx})g^{tt}}{2} = \frac{1}{t} & & & \Gamma_{yy}^t = \frac{1}{t} \\ \Gamma_{xy}^t = \frac{(\partial_x(g_{yk}) + \partial_y(g_{xk}) - \partial_k(g_{xy}))g^{kt}}{2} = 0 & & \Gamma_{xy}^x = 0 & \Gamma_{xy}^y = 0 \\ \Gamma_{tt}^t = \frac{(\partial_t(g_{tt}) + \partial_t(g_{tt}) - \partial_t(g_{tt}))g^{tt}}{2} = -\frac{1}{t} & & & \\ \Gamma_{tt}^x = \frac{(\partial_t(g_{tk}) + \partial_t(g_{tk}) - \partial_k(g_{tt}))g^{kx}}{2} = 0 & & \Gamma_{tt}^y = 0 & \\ \Gamma_{tx}^x = \frac{(\partial_x(g_{tk}) + \partial_t(g_{xk}) - \partial_k(g_{tx}))g^{kx}}{2} = \frac{\partial_t(g_{xx})g^{xx}}{2} = -\frac{1}{t} & & & \Gamma_{ty}^y = -\frac{1}{t} \\ \Gamma_{tx}^y = \frac{(\partial_x(g_{ty}) + \partial_t(g_{xy}) - \partial_y(g_{tx}))g^{yy}}{2} = 0 & & \Gamma_{tx}^x = 0 & \\ \Gamma_{tx}^t = \frac{(\partial_x(g_{tt}) + \partial_t(g_{xt}) - \partial_t(g_{tx}))g^{tt}}{2} = 0 & & \Gamma_{tx}^y = 0 & \end{array} \right.$$

Per cui abbiamo solo 5 Christoffel non nulli. Il che si può riassumere dicendo

$$\nabla \partial_t = \frac{1}{t}(dx \otimes \partial_x + dy \otimes \partial_y - dt \otimes \partial_t)$$

$$\nabla \partial_x = \frac{1}{t}(dx \otimes \partial_t - dt \otimes \partial_x)$$

$$\nabla \partial_y = \frac{1}{t}(dy \otimes \partial_t - dt \otimes \partial_y)$$

Vediamo un po' di campi di killing facendo tutti i conti brutali (i modi piú furbi sono ovviamente preferibili, ma per ora è meglio farlo qualche contazzo.)

Per semplificare le cose però, consideriamo  $\mathbb{H}^2$  invece di  $\mathbb{H}^3$ , definendo

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y, t) \in \mathbb{H}^3 : y = 0\}$$

con la metrica indotta. Adesso classifichiamo tutti i campi di killing. Essendo  $\partial_x, \partial_y, \partial_t$  un sistema di campi ortogonali, i simboli di Christoffel di  $\mathbb{H}^2$  son quelli calcolati, però senza tirare in ballo l'indice  $y$ . Sia  $X$  un campo su  $\mathbb{H}^2$

$$X = X^k \partial_k = (X^x, X^t) = (\alpha(x, t), \beta(x, t))$$

Usiamo la caratterizzazione che  $X$  è killing se e solo se

$$g(\nabla_Y X, Z) = -g(\nabla_Z X, Y)$$

per ogni  $Y, Z$ . Siccome sta roba è tensoriale in  $Y$  e  $Z$  (l'abbiamo già visto nel Teorema 6.3.1) basta fare i conti sulla base  $\partial_x, \partial_t$  di  $T\mathbb{H}^2$ . Pronti partenza via, per ogni  $i, j$  fisati si somma su  $k$  e su  $h$  (che variano nell'insieme  $\{x, t\}$ ):

$$\frac{\partial X^k}{\partial x_i} g_{kj} + X^k \Gamma_{ik}^h g_{hj} = -\frac{\partial X^k}{\partial x_j} g_{ki} - X^k \Gamma_{jk}^h g_{hi}$$

avendo  $g_{ij} = \delta_{ij}/t^2$  ciò equivale a

$$\frac{\partial X^j}{\partial x_i} + X^k \Gamma_{ik}^j = -\frac{\partial X^i}{\partial x_j} - X^k \Gamma_{jk}^i$$

ossia

$$\frac{\partial X^j}{\partial x_i} + X^x \Gamma_{ix}^j + X^t \Gamma_{it}^j = -\frac{\partial X^i}{\partial x_j} - X^x \Gamma_{jx}^i - X^t \Gamma_{jt}^i$$

Adesso troveremo tre equazioni, corrispondenti a quando  $(i, j)$  assume i valori di  $(x, x), (t, t), (t, x)$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} (t, t) \quad \frac{\partial X^t}{\partial t} + X^x \Gamma_{tx}^t + X^t \Gamma_{tt}^t = 0 \\ (x, x) \quad \frac{\partial X^x}{\partial x} + X^x \Gamma_{xx}^x + X^t \Gamma_{xt}^x = 0 \\ (t, x) \quad \frac{\partial X^x}{\partial t} + X^x \Gamma_{tx}^x + X^t \Gamma_{tt}^x = -\frac{\partial X^t}{\partial x} - X^x \Gamma_{xx}^t - X^t \Gamma_{xt}^t \end{array} \right.$$

Che tenendo conto dei Christoffel diventa

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X^t}{\partial t} + X^t \Gamma_{tt}^t = 0 \\ \frac{\partial X^x}{\partial x} + X^t \Gamma_{xt}^x = 0 \\ \frac{\partial X^x}{\partial t} = -\frac{\partial X^t}{\partial x} \end{array} \right.$$

Che riscriviamo usando  $X = (\alpha, \beta)$  in modo da ottenere delle equazioni differenziali fumabili

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\beta}{t} \quad \Leftrightarrow \quad \beta(x, t) = c(x)t \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\beta}{t} = c(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial t} = 0 \\ \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -\frac{\partial \beta}{\partial x} = -t\dot{c}(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial t} = -t\ddot{c}(x) \Rightarrow \ddot{c}(x) = 0 \end{array} \right.$$

per cui

$$c(x) = ax + b$$

e dunque

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\beta}{t} = ax + b \quad \Rightarrow \quad \alpha(x, t) = \frac{1}{2}ax^2 + bx + \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial t} = -at \quad \Rightarrow \quad \xi(t) = -\frac{1}{2}at^2 + C \end{array} \right.$$

In definitiva, i campi killing su  $\mathbb{H}^2$  sono tutti e soli quelli della forma

$$X = \left(\frac{1}{2}a(x^2 - t^2) + bx + C, t(ax + b)\right)$$

Abbiamo fatto un po' di conti sullo spazio  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$  con la metrica indotta.

**Esercizio 6.4.1.** *Calcolare la metrica indotta sulla sfera di centro  $(0, 0, 1)$  e raggio 1. (Hint: a questa sfera manca un punto:  $(0, 0, 0)$  che non sta in  $\mathbb{H}^3$ ; usare la proiezione stereografica con centro  $(0, 0, 0)$  sul piano orizzontale passante per  $(0, 0, 1)$  in modo da ottenere delle buone coordinate.)*

**6.4.1. Coordinate Normali.** Per fare i conti spesso è bene mettersi in coordinate buone. Già di per sé le coordinate ammazzano i commutatori, ma a volte può far comodo avere delle condizioni puntuali, essendo la connessione  $\nabla_X$  puntuale in  $X$ .

**Teorema 6.4.2.** *Sia  $M$  una varietà Riemanniana e sia  $e_1, \dots, e_n$  una base ortonormale di  $T_p M$ . Allora esistono coordinate locali intorno a  $p$  tali che  $\partial_i = e_i$  in  $p$  e tali che  $\nabla \partial_i = 0$  in  $p$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se avete fatto gli esercizi 5.4.7 e 5.4.8 avete già la dimostrazione. Se no, li fate ora.  $\square$

**Esempio 6.4.3.** *In coordinate normali nel punto  $p$  la divergenza di un campo  $X$  è data "come in  $\mathbb{R}^n$ " (ma solo nel punto  $p!!!$ ) da*

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(X)_p &= \sum_i g(\nabla_{e_i} X, e_i) \\ &= \sum_i \nabla_{e_i}(g(X, e_i)) - g(X, \nabla_{e_i} e_i) = \sum_i \nabla_i(X^i) \end{aligned}$$

**Esempio 6.4.4.** *In coordinate normali nel punto  $p$  si ha*

$$(L_X g)(\partial_i, \partial_j)_p = g(\nabla_i X, \partial_j) + g(\nabla_j X, \partial_i)$$

$$d\theta_X(\partial_i, \partial_j)_p = g(\nabla_i X, \partial_j) - g(\partial_i, \nabla_j X)$$

*il che rende ovvi ed immediati i conti del Teorema 6.3.1 e del Lemma 6.3.10.*

#### 6.4.2. Esercizi.

**Esercizio 6.4.5.** *Scrivere la connessione di Levi Civita di  $\mathbb{R}^2$  con le seguenti metriche:*

- (1) *Euclidea.*
- (2)  $ds^2 = dx^2/e^{2y} + dy^2$ .
- (3)  $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/(x^2 + y^2)$ .

**Esercizio 6.4.6.** *Siano  $(M, g)$  ed  $(N, h)$  due varietà Riemanniane e siano  $\nabla^M$  e  $\nabla^N$  le rispettive connessioni. Dimostrare che la connessione di  $M \times N$  con la metrica prodotto è  $\nabla^M + \nabla^N$ .*

**Esercizio 6.4.7.** *Sia  $S^2$  la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$  con la metrica indotta. Dimostrare che se  $X$  è un campo di Killing non nullo allora esiste sempre una linea di flusso di  $X$  che sia un cerchio massimo.*

**Esercizio 6.4.8.** *Sia  $G$  il grafico della funzione  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Sia  $g_1$  la metrica indotta su  $G$  da quella Euclidea di  $\mathbb{R}^3$ . Sia  $g$  la metrica su  $\mathbb{R}^2$  ottenuta facendo il pull-back di  $g_1$  via la funzione  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow G$ ,  $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Scrivere gradiente, hessiano (versione (1, 1) e versione (0, 2)) e laplaciano delle seguenti funzioni*

- (1)  $h(x, y) = x^2 - y^2$ .
- (2)  $h(x, y) = x^2 + y^y$ .
- (3)  $h(x, y) = x + y$ .
- (4)  $h(x, y) = x - y$ .
- (5)  $h(x, y) = \cos x$ .
- (6)  $f(x, y) = 2$ .

## SETTIMANA 7

### Geodetiche

#### 7.1. Lezione 25: Lunghezza di curve, distanza associata, geodetiche

**7.1.1. Lunghezza di una curva.** Abbiamo detto che una metrica Riemanniana è una distanza infinitesimale. Vediamo come da ciò si ottiene una distanza nel senso usuale del termine.

**Definizione 7.1.1.** Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana. Data una curva liscia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  si definisce la lunghezza di  $\gamma$  in  $M$  come

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

**Esercizio 7.1.2.** Sia  $C = (0, \infty) \times S^1$  il cilindro iperbolico con la metrica  $ds^2 = \frac{dt^2 + d\theta^2}{t^2}$ . Calcolare la lunghezza della curva  $\gamma : [0, 4] \rightarrow C$  data da  $\gamma(t) = (1 + t, \pi)$ .

**Fatto 7.1.3.** La lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione: per ogni  $M$  Riemanniana, per ogni diffeomorfismo  $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$  e per ogni curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , la lunghezza di  $\gamma$  è uguale alla lunghezza di  $\gamma \circ f$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla regola della derivazione delle funzioni composte si ottiene

$$\frac{d(\gamma \circ f)}{dt}(t) = \dot{\gamma}(f(t)) \dot{f}(t)$$

ed il resto segue dal teorema del cambio di variabile di integrazione.  $\square$

**Definizione 7.1.4.** Sia  $\gamma$  una curva regolare a pezzi, cioè  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  continua tale che esistano  $a = a_0 < a_1, \dots, < a_k = b$  tali che la restrizione di  $\gamma$  ad ogni  $[a_{i-1}, a_i]$  sia liscia. Si definisce  $L(\gamma) = \sum_i L(\gamma|_{[a_{i-1}, a_i]})$ .

**Esercizio 7.1.5.** Dimostrare che se  $\gamma$  è regolare a pezzi e se  $(\gamma_i)$  è una successione di curve regolari che approssimano  $\gamma$  uniformemente allora  $L(\gamma) = \lim L(\gamma_i)$ .

**Definizione 7.1.6.** Sia  $M$  una varietà Riemanniana. Per ogni sotto-varietà unidimensionale  $c$  di  $M$  si definisce la lunghezza di  $c$  come la lunghezza di una sua qualsiasi parametrizzazione.

**Osservazione 7.1.7.** *Spesso in futuro, si parlerà di curve  $\gamma$ . Dal contesto sarà chiaro se la parametrizzazione sia importante o meno per i calcoli che staremo facendo. Nel caso sia chiaro che la parametrizzazione non conti, dicendo  $\gamma$  intenderemo sia la parametrizzazione che la curva immagine.*

**7.1.2. Distanza indotta da  $g$ .** Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana connessa.

**Definizione 7.1.8.** *Per ogni  $x, y \in M$  si definisce*

$$d(x, y) = \inf_{\substack{\gamma: [a, b] \rightarrow M \\ \gamma(a) = x \\ \gamma(b) = y}} L(\gamma).$$

**Esercizio 7.1.9.** *Verificare che  $d(x, y)$  goda delle proprietà di una distanza.*

**Esercizio 7.1.10.** *Sia  $S^2$  la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$  con la metrica Riemanniana indotta. Sia  $d$  la distanza su  $S^2$  indotta dalla metrica. Calcolare la distanza tra i punti  $(-1, 0, 0)$  e  $(1, 0, 0)$ .*

**Esercizio 7.1.11.** *Sia  $C = (0, \infty) \times S^1, ds^2 = \frac{dt^2 + d\theta^2}{t^2}$  il cilindro iperbolico. Calcolare la distanza tra i punti  $x$  e  $y$  nei casi seguenti:*

- (1)  $x = (1, 0), y = (2, 0)$
- (2)  $x = (2, 0), y = (3, 0)$
- (3)  $x = (2, 0), y = (4, 0)$
- (4)  $x = (1, 0), y(1, \pi)$

**Teorema 7.1.12.** *La topologia indotta da  $d$  è quella originale di  $M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Ovviamente il claim è locale. Sia  $x \in M$ . Localmente  $M$  è omeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $U$  un intorno di  $x$  diffeomorfo ad un aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $(\cdot, \cdot)$  il prodotto scalare Euclideo standard di  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $B(x, \varepsilon)$  la palla di centro  $x$  e raggio  $\varepsilon$  per tale prodotto scalare. Per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo  $B(x, \varepsilon) \subset U$ . Siccome la metrica Riemanniana  $g$  è liscia, esistono due costanti positive  $C_1$  e  $C_2$  tali che per ogni  $p \in B(0, \varepsilon)$  e per ogni  $V \in \mathbb{R}^n$  valga

$$C_1(V, V) < g_p(V, V) < C_2(V, V)$$

quindi per ogni curva  $\gamma$  dentro  $B(0, \varepsilon)$  la lunghezza  $L(\gamma)$  è limitata dall'alto e dal basso dalla lunghezza di  $\gamma$  calcolata con la metrica Euclidea:

$$C_1 L_{Euclid}(\gamma) < L(\gamma) < C_2 L_{Euclid}(\gamma).$$

Sia adesso  $\alpha$  piccolissimo e siano  $p, q \in B(x, \varepsilon\alpha)$ . Se una curva  $\gamma$  che connette  $p$  e  $q$  esce da  $B(x, \varepsilon)$  allora la sua lunghezza è almeno  $C_1\varepsilon(1 - \alpha)$  mentre il segmento tra  $p$  e  $q$  ha lunghezza al più  $C_22\varepsilon\alpha$  per cui se  $\alpha$  è sufficientemente piccolo, le curve usate per calcolare la

distanza tra  $p$  e  $q$  non escono da  $B(x, \varepsilon)$ . Dalla stima precedente segue che su  $B(x, \alpha\varepsilon)$  si ha

$$C_1\|p - q\|_{Euclid} < d(p, q) < C_2\|p - q\|_{Euclid}$$

per cui  $d$  è equivalente alla topologia naturale di  $M$ .  $\square$

**7.1.3. Geodetiche (geodesics) di spazi metrici.** La nozione è semplice: “una geodetica è una curva che realizza la distanza”, ma ci sono alcune piccole differenze nelle varie definizioni formali di geodetica<sup>1</sup>.

**Definizione 7.1.13.** *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico.*

- (1) *Una geodetica non parametrizzata tra  $x$  e  $y$  è una curva con estremi in  $x$  e  $y$  e la cui lunghezza sia  $d(x, y)$ .*
- (2) *Una geodetica locale è una curva continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tale che per ogni  $t \in (a, b)$  esista  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $s, r \in (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$  si abbia  $d(\gamma(s), \gamma(r)) = L(\gamma|_{(t-\varepsilon, t+\varepsilon)})$ .*
- (3) *Una geodetica globale è una curva continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  tale che per ogni  $(s, t) \subset (a, b)$ ,  $d(\gamma(s), \gamma(t)) = L(\gamma|_{(s,t)})$ .*
- (4) *Una geodetica locale a velocità costante è una curva  $\gamma$  tale che esista una costante  $c > 0$  tale che per ogni  $\tau$  esista  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $t, s \in (\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$  si abbia  $d(\gamma(t), \gamma(s)) = c|t - s|$ . Se  $c = 1$  la geodetica si dice parametrizzata per lunghezza d'arco.*
- (5) *Una geodetica globale a velocità costante è una curva  $\gamma$  tale che esista una costante  $c > 0$  tale che  $d(\gamma(t), \gamma(s)) = c|t - s|$ . Se  $c = 1$  la geodetica si dice parametrizzata per lunghezza d'arco.*

Sono necessari alcuni commenti. Se  $X$  è uno spazio metrico senza struttura Riemanniana, la nozione di lunghezza di una curva è data come al solito con l'approssimazione per spezzate (ma non ci dilunghiamo su questo argomento.)

Ovviamente (2) e (3) sono versioni locali e globali dello stesso concetto. Così come (4) e (5). Risulta chiaro quindi che (3) implica (2) ma che (2) non implica (3). Così come (5) implica (4) ma (4) non implica (5)

L'esempio classico di come una roba possa essere una geodetica locale ma non globale è l'equatore terrestre. Se un omino comincia a muoversi sull'equatore terrestre a velocità costante, sta percorrendo una geodetica e la distanza tra il punto di partenza a il punto dove si trova l'omino è esattamente la lunghezza del cammino percorso. Almeno fino a quando l'omino non si trova nel punto antipodale alla partenza. Da quel momento in poi infatti l'omino comincia ad avvicinarsi alla partenza invece che allontanarsene!

Vediamo quindi le differenze tra (1), (2) e (4).

<sup>1</sup><http://en.wikipedia.org/wiki/Geodesic>

**Fatto 7.1.14.** *Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  è una curva con  $x = \gamma(a)$  e  $y = \gamma(b)$ , allora  $\gamma$  è geodetica secondo la definizione (1) se e solo se lo è per la (3) (che implica (2).)*

**DIMOSTRAZIONE.** Il fatto che (3) implichi (2) è ovvio. Altrettanto ovvio è che (3) implichi (1). Se non vale la (3), allora esiste  $(s, t) \subset (a, b)$  tale che  $d(\gamma(s), \gamma(t)) < L(\gamma|_{(s,t)})$ . Ma allora  $d(x, y) \leq d(a, \gamma(s)) + d(\gamma(s), \gamma(t)) + d(\gamma(t), b) < L(\gamma)$  e quindi (1) non vale.  $\square$

Quindi la (1) la (2) e la (3) sono sostanzialmente equivalenti a parte il problema di essere localmente realizzante o globalmente realizzante la distanza. Nel caso di varietà Riemanniane, essendo la distanza definita come inf di lunghezze di cammini, realizzare la distanza — e quindi essere una geodetica — significa minimizzare la lunghezza (localmente o globalmente.) In altre parole:

**Fatto 7.1.15.** *Se  $x, y \in M$  e  $\gamma$  è un cammino tra  $x$  e  $y$ ,  $\gamma$  è geodetica secondo la definizione (1) se e solo se ogni curva tra  $x$  e  $y$  è piú lunga di  $\gamma$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** È una tautologia.  $\square$

Veniamo adesso alla differenza tra (2) e (4). Sono entrambi concetti locali, ma (2) se ne frega della parametrizzazione. Per in Fatto 7.1.3 ogni riparametrizzazione di una geodetica di tipo (2) continua ad essere una geodetica di tipo (2) ma ovviamente non tutte le parametrizzazioni sono buone per avere una geodetica secondo la definizione (4). Ma in fondo sono abbastanza equivalenti:

**Fatto 7.1.16.** *Sia  $\gamma$  una geodetica secondo la definizione (2). Allora esiste una riparametrizzazione di  $\gamma$  che sia una geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco (cioè geodetica secondo la definizione (4) ed in piú con  $c = 1$ .)*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma$  una geodetica secondo la definizione (2) ed  $L$  la sua lunghezza. Allora  $f : [a, b] \rightarrow [0, L]$  definita da  $f(t) = L(\gamma|_{(a,t)})$  è un omeomorfismo perché è monotona. Adesso  $\gamma(f^{-1}(t))$  è geodetica secondo la (4).  $\square$

Un'altra differenza è che una geodetica secondo la definizione (1) potrebbe non essere liscia perché ce ne stiamo fregando della parametrizzazione. Mentre invece in una varietà Riemanniana le geodetiche son sempre parametrizzabili in modo liscio.

**Fatto 7.1.17.** *Se  $M$  è una varietà Riemanniana e  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  è una geodetica a velocità costante allora  $\gamma$  è liscia.*

La dimostrazione la vedremo tra un paio di lezioni.

## 7.2. Lezione 26: Geodetiche Riemanniane, variazione prima dell'energia, mappa esponenziale

Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana.

### 7.2.1. Geodetiche di varietà Riemanniane.

**Definizione 7.2.1.** *Una curva  $\gamma$  in  $M$  si dice **geodetica** se*

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0.$$

Ovviamente, se si usa lo stesso nome, vorrà dire che ci sarà una relazione tra geodetiche di uno spazio metrico e geodetiche Riemanniane. Innanzitutto cominciamo a notare che in  $\mathbb{R}^n$  l'equazione delle geodetiche si legge “derivata seconda nulla”, il che vuol dire “rette” (che negli spazi euclidei sono i percorsi di minima distanza.)

La seconda osservazione che facciamo è che la definizione ha senso. Infatti il campo  $\dot{\gamma}$  è definito lungo  $\gamma$  ed ha quindi senso calcolare  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ . Se  $\gamma$  è parametrizzata per esempio con  $x \in [0, 1]$  cioè se  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  è una applicazione liscia, allora

$$\dot{\gamma} = \gamma_*(\partial/\partial x) = d\gamma[\partial/\partial x].$$

**Lemma 7.2.2.** *Una geodetica ha sempre velocità costante.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $\gamma$  geodetica. Fare la derivata rispetto al tempo di una quantità definita lungo  $\gamma$  significa farne la derivata covariante rispetto a  $\dot{\gamma}$  per cui

$$\frac{d}{dt}g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \nabla_{\dot{\gamma}}(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0.$$

□

Osserviamo che una curva costante è una geodetica secondo la nostra definizione, ma di solito sarà sottinteso considerare geodetiche non costanti.

Essendo il modulo di  $\dot{\gamma}$  costante, possiamo sempre riscalarlo il tutto in modo che  $\gamma$  abbia velocità uno.

**Definizione 7.2.3.** *Una geodetica si dice parametrizzata per lunghezza d'arco se  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ .*

In seguito vedremo che le geodetiche realizzano localmente le distanze, per cui le geodetiche di una varietà Riemanniana saranno sostanzialmente curve geodetiche secondo la definizione 4 data per spazi metrici.

**7.2.2. Variazione di Energia e lunghezza.** Cosa significa calcolare la variazione prima di una quantità associata a una curva? Significa calcolarne la derivata rispetto a  $s$  per una famiglia di curve  $\gamma_s$ .

**Definizione 7.2.4.** *Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva liscia. Una variazione di  $\gamma$  è una applicazione liscia  $\phi : [a, b] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$  tale che  $\phi(t, 0) = \gamma(t)$ . Per ogni  $s$ , la curva  $t \mapsto \phi(t, s)$  verrà spesso indicata con  $\gamma_s$ .*

Quindi, data una variazione  $\phi$  di  $\gamma$  è ben definita la funzione  $L(\gamma_s)$  come funzione del solo parametro  $s$ . Adesso possiamo farne la derivata. Ma facciamo prima la derivata dell'energia:

**Definizione 7.2.5.** *L'energia di una curva  $\gamma(t)$  è definita come*

$$E(\gamma) = \frac{1}{2} \int g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) dt.$$

**Teorema 7.2.6** (First variation formula of Energy). *Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva liscia e sia  $\phi : [a, b] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$  una variazione di  $\gamma$ . Sia  $t$  il parametro in  $[0, 1]$  e sia  $s$  quello in  $[0, \varepsilon]$ . Denotiamo con  $S$  il campo  $\phi_*(\partial_s)$  e con  $T$  il campo  $\phi_*(\partial_t)$ . Allora*

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (E(\gamma_s)) = g(\dot{\gamma}(b), S_{\gamma(b)}) - g(\dot{\gamma}(a), S_{\gamma(a)}) - \int_{\gamma} g(S, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) dt$$

**DIMOSTRAZIONE.** Qui passiamo le derivate dentro e fuori dal segno dell'integrale tanto tutto è liscio ed i teoremi di derivazione sotto segno di integrale valgono tutti. In oltre, siccome  $\partial_t$  e  $\partial_s$  sono campi coordinati si ha  $[T, S] = 0$  e quindi, data la torsione nulla della connessione,  $\nabla_S T = \nabla_T S$ . (Notare che  $T_{(t,0)} = \dot{\gamma}(t)$ .)

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int \frac{1}{2} g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s) dt &= \frac{1}{2} \int \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b (\nabla_S (g(T, T)))_{(t,0)} dt = \frac{1}{2} \int_a^b 2g(\nabla_S T, T)_{(t,0)} dt \\ &= \int_a^b g(\nabla_T S, T)_{(t,0)} dt \\ &= \int_a^b \nabla_T (g(S, \dot{\gamma}))_{(t,0)} - g(S, \nabla_T \dot{\gamma})_{(t,0)} dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} g(S_{\gamma(t)}, \dot{\gamma}(t)) dt - \int_a^b g(S, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) dt \\ &= g(S_{\gamma(b)}, \dot{\gamma}(b)) - g(S_{\gamma(a)}, \dot{\gamma}(a)) - \int_a^b g(S, \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}) dt \end{aligned}$$

**Corollario 7.2.7.** *Se  $\gamma$  è geodetica allora è un punto critico del funzionale energia (la variazione prima è nulla). Più precisamente, se  $\phi$  è una variazione a estremi fissi, cioè tale che per ogni  $s$  valga  $\gamma_s(a) = \gamma(a)$  e  $\gamma_s(b) = \gamma(b)$ , allora*

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} E(\gamma_s) = 0.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Il campo  $S$  è nullo in  $a$  e  $b$  per variazioni a estremi fissi e se  $\gamma$  è geodetica  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ .  $\square$

Veniamo adesso alla variazione della lunghezza di una geodetica, che alla fine è la stessa cosa.

**Teorema 7.2.8.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una geodetica non costante e sia  $\phi : [a, b] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$  una variazione di  $\gamma$ . Sia  $t$  il parametro in  $[0, 1]$  e sia  $s$  quello in  $[0, \varepsilon]$ . Denotiamo con  $S$  il campo  $\phi_*(\partial_s)$  e con  $T$  il campo  $\phi_*(\partial_t)$ . Allora, detta  $V = \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$  la velocità di  $\gamma$  (che è costante e non nulla)

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(L(\gamma_s)) = \frac{g(\dot{\gamma}(b), S_{\gamma(b)}) - g(\dot{\gamma}(a), S_{\gamma(a)})}{V}$$

DIMOSTRAZIONE. È esattamente lo stesso conto fatto per l'energia, solo che c'è la radice quadrata, per cui

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}(\sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)}) = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)}{\sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}} = \frac{g(\nabla_S T, T)_{(t,0)}}{V}$$

ed a questo punto si continua come dalla terza riga del conto fatto per l'energia.  $\square$

Quindi una geodetica è un punto critico del funzionale lunghezza. C'è di più.

**Fatto 7.2.9.** Una curva liscia  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  con velocità costante minimizza il funzionale lunghezza se e solo se minimizza il funzionale energia tra tutte le curve lisce da  $[0, 1]$  in  $M$  con gli stessi estremi.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni curva liscia, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz<sup>2</sup> si ha

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} = \int \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \cdot 1 \\ &\leq \sqrt{\int g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} \sqrt{\int 1^2} = \sqrt{2E(\gamma)} \end{aligned}$$

e l'uguaglianza vale solo se  $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$  è costante. Supponiamo che  $\gamma$  minimizzi la lunghezza. Riparametriamo  $\gamma$  a velocità costante. Per ogni altra curva  $\xi$  si ha

$$\sqrt{2E(\gamma)} = L(\gamma) \leq L(\xi) \leq \sqrt{2E(\xi)}$$

per cui  $\gamma$  minimizza l'energia. Viceversa, supponiamo che  $\gamma$  minimizzi l'energia. Allora per ogni altra curva  $\xi$ , sia  $\bar{\xi}$  la riparametrizzazione di  $\xi$  a velocità costante, tanto la lunghezza non cambia. Si ha

$$L(\gamma) \leq \sqrt{2E(\gamma)} \leq \sqrt{2E(\bar{\xi})} = L(\bar{\xi}) = L(\xi)$$

per cui  $\gamma$  minimizza la lunghezza.  $\square$

Si osservi che nella dimostrazione appena fatta abbiamo praticamente dimostrato anche il fatto che se  $\gamma$  minimizza l'energia allora è parametrizzata a velocità costante.

<sup>2</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Schwarz\\_inequality](http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Schwarz_inequality)

**Teorema 7.2.10.** *Se una curva liscia  $\gamma$  minimizza localmente la lunghezza, allora è una geodetica.*

**DIMOSTRAZIONE.** Minimizzare localmente la lunghezza abbiamo visto che è equivalente a minimizzare localmente l'energia e per la formula di variazione prima dell'energia questo implica che  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$  in ogni punto.  $\square$

**Esempio 7.2.11** (Esempio istruttivo). *Una geodetica in generale non è detto che minimizzi globalmente la lunghezza. Ogni parallelo sulla superficie terrestre è piú corto dell'equatore ma l'equatore è l'unico parallelo ad essere una geodetica.*

Per dimostrare il contrario, e cioè che effettivamente una geodetica minimizza localmente la lunghezza, dobbiamo fare un po' piú di lavoro. A cosa dobbiamo stare attenti? Se una geodetica  $\gamma$  non minimizzasse localmente la lunghezza, vorrebbe dire che localmente, per esempio tra  $t$  e  $t + \varepsilon$ , esisterebbe un'altra curva  $\sigma$  che unisce i punti  $\gamma(t)$  e  $\gamma(t + \varepsilon)$  e che sia piú corta di  $\gamma$  in quel tratto. Questa seconda curva  $\sigma$  deve essere anche lei una geodetica, per quanto detto sopra. Quindi se le cose andassero male esisterebbero un sacco di geodetiche  $\sigma_n$  che uniscono i punti  $\gamma(t)$  con  $\gamma(t + 1/n)$  tutte piú corte di  $\gamma$  in quel tratto. Cioè una roba tipo superficie terrestre, dove per esempio tra polo sud e polo nord ci sono infinite geodetiche, ma locale, sempre piú vicino a  $\gamma(t)$ .

**7.2.3. Esistenza locale di geodetiche.** Il tutto deriva dal teorema di esistenza, unicità e dipendenza liscia dai dati iniziali per equazioni differenziali. Infatti in coordinate se chiediamo  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$  ci ritroviamo con un sistema tipo "derivata seconda uguale a qualcosa".

**Teorema 7.2.12** (Esistenza locale di geodetiche). *Per ogni  $p \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $p$  e un numero  $\varepsilon > 0$  tale che per ogni  $x \in U$  e per ogni  $V \in T_x M$  con  $\sqrt{g(V, V)} < \varepsilon$  esiste una unica geodetica  $\gamma_V : (-1, 1) \rightarrow M$  tale che*

$$\gamma(0) = x \quad \dot{\gamma}(0) = V.$$

*In oltre, la funzione che al punto  $(V, t)$  di  $TM \times (-1, 1)$  associa il punto  $\gamma_V(t)$  è liscia.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per quanto questo teorema sia fondamentale, la sua dimostrazione non fa parte del programma d'esame. Ne diamo qui solamente l'idea per i piú curiosi.

In coordinate locali possiamo scrivere  $\gamma$  come  $(y_1(t), \dots, y_n(t))$ . La condizione  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$  si esprime con un sistema del tipo

$$\ddot{y}_i = F(y, \dot{y})$$

dove la funzione  $F$  dipende dai Christoffel della connessione e quindi dai coefficienti  $g_{ij}$  della metrica. È tutta roba liscia. Per cui, scrivendo  $z_i = \dot{y}_i$  e considerando la nuova curva nel doppio della dimensione

$X(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t), z_1(t), \dots, z_n(t))$ , la condizione di geodeticità per  $\gamma$  si esprime con una condizione del tipo

$$\dot{X} = G(X)$$

dove  $G$  si scrive a partire da  $F$  nel modo ovvio. Bene, quest'ultimo è un problema di Cauchy ordinario ed ha esistenza locale delle soluzioni, unicità date le condizioni iniziali e dipendenza continua (e liscia) dai dati iniziali.  $\square$

**7.2.4. Mappa Esponenziale.** L'esistenza locale delle geodetiche ci permette di definire la mappa esponenziale, che non ha nulla a che vedere con l'esponenziale che conoscete. O meglio, il nome vien proprio da quella, nel caso in cui la varietà in questione sia un'insieme di matrici, ma tutto lì.

Ricordiamo che  $TM$  è un fibrato, quindi si porta dietro la sua proiezione  $\pi : TM \rightarrow M$ . Un elemento  $V$  di  $TM$  è un vettore tangente a un punto  $\pi(V)$ .

**Definizione 7.2.13** (Mappa esponenziale). *Sia  $\Omega \subset TM$  un insieme aperto contenente l'immagine della sezione nulla e tale che  $\gamma_V$  sia definita per ogni  $V \in \Omega$ . La mappa esponenziale  $\exp : \Omega \rightarrow M$  è definita*

$$\exp(V) = \gamma_V(1).$$

*Per non fare confusione, se  $\pi(V) = x$ , cioè se  $V \in T_xM$ , spesso si specifica il punto  $x$  scrivendo  $\exp_x(V)$  anziché  $\exp(V)$ .*

Ripetiamo cos'è l'esponenziale. Si prende un vettore  $V \in T_xM$ , se  $V = 0$  allora  $\exp_x(V) = x$ , altrimenti si considera la geodetica con velocità unitaria e condizioni iniziali  $\gamma(0) = x$  e  $\dot{\gamma}(0) = V/|V|$  (qui il modulo è calcolato con la metrica  $g$ , cioè  $|V| = \sqrt{g(V, V)}$ ) e la si segue per un tempo uguale al modulo di  $V$ ; quando ci fermiamo stiamo in  $\exp_x(V)$ . Vedremo piú avanti che la geodetica in questione è in generale definita per ogni tempo, il che equivale a dire che l'esponenziale è definito su tutto  $TM$ .

Per il Teorema 7.2.12 la mappa esponenziale è ben definita e liscia. Non solo, per il teorema di unicità delle soluzioni di un problema di Cauchy,  $\exp_x$  è un diffeomorfismo locale. Questo può essere dimostrato anche direttamente sapendo solo che è liscia:

**Teorema 7.2.14.** *Per ogni  $x$ ,  $\exp_x : T_xM \rightarrow M$  è un diffeomorfismo locale vicino a zero.*

**DIMOSTRAZIONE.** In coordinate locali, lo spazio tangente a  $x$  ha una base  $\partial_1, \dots, \partial_n$  per cui il tangente di  $T_xM$  è naturalmente isomorfo a  $T_xM$  stesso. Con questo isomorfismo il differenziale di  $\exp_x$  in zero è l'identità per cui  $\exp_x$  è localmente invertibile.  $\square$

Questo fatto ha come conseguenza fondamentale che

**Corollario 7.2.15.** *Per ogni  $x \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che per ogni  $y \in U$  esiste un'unica geodetica in  $U$  tra  $x$  e  $y$ .*

DIMOSTRAZIONE. Immediato, dal fatto che  $\exp_x$  sia un diffeomorfismo locale.  $\square$

In realtà si può fare un po' di piú. Per ogni aperto  $U \subset M$  e  $\varepsilon > 0$  definiamo  $U_\varepsilon \subset TM$  come l'insieme dei vettori  $V \in TM$  tali che  $\pi(V) \in U$  e  $|V| < \varepsilon$ .

Per ogni punto  $x$  possiamo considerare un aperto  $U$  contenente  $x$  ed un  $\varepsilon$  tale che la mappa  $\phi : U_\varepsilon \rightarrow M \times M$  data da

$$\phi(V) = (\pi(V), \exp_{\pi(V)}(V))$$

sia ben definita.

**Teorema 7.2.16.** *Per ogni  $x \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  e un numero  $\varepsilon > 0$  tale che  $\phi$  sia un diffeomorfismo locale.*

DIMOSTRAZIONE. Se la dimensione di  $M$  è  $n$ , localmente abbiamo coordinate locali  $x^1(p), \dots, x^n(p)$  che identificano ogni  $p \in U$  con un punto di  $\mathbb{R}^n$ . Una base di  $T_p U$  per ogni  $p \in U$  è data da come al solito da  $(\partial_1)_p, \dots, (\partial_n)_p$ . Il che banalizza localmente  $TU$ , che è quindi diffeomorfo a  $U \times \mathbb{R}^n$ , con coordinate locali per il punto  $(x, v)$  date da  $(x^1(p), \dots, x^n(p), dx^1(v), \dots, dx^n(v))$ , dove i  $dx^i$  son quelli canonici.

La corrispondente base per il tangente a  $U_\varepsilon$  nel punto  $(x, 0)$  è data da

$$\partial_1, \dots, \partial_n, e_1, \dots, e_n$$

(gli  $e_i$  sono gli elementi della base canonica di  $\mathbb{R}^n$ .)

D'altra parte, per il tangente di  $M \times M$  in  $(x, x)$ , che è isomorfo a  $TM \oplus TM$ , scegliamo la base

$$(\partial_1, 0), \dots, (\partial_n, 0), (0, \partial_1), \dots, (0, \partial_n)$$

Vediamo chi è il differenziale della  $\phi$  in questa base. Consideriamo un vettore  $V$  che ha le seconde  $n$  coordinate nulle. Questo è rappresentato da una curva  $\alpha$  a valori in  $TU \simeq U \times \mathbb{R}^n$  tale che la componente  $\mathbb{R}^n$  sia zero. Cioè da una curva  $\alpha$  a valori in  $U$ . Ma allora

$$\phi(\alpha(t)) = (\alpha(t), \exp_{\alpha(t)}(0)) = (\alpha(t), \alpha(t))$$

per cui

$$d\phi V = (V, V).$$

Consideriamo adesso un vettore  $W$  con le prime coordinate nulle. Questo è rappresentato da una curva in  $T_x U$ , che possiamo scegliere come  $\beta(t) = tw$  con  $w = dx^i(W)e_i$ . Ma allora

$$\phi(\beta(t)) = (x, \exp_x(tw))$$

per cui

$$d\phi(W) = (0, w)$$

Da cui si deduce che nelle basi scelte

$$d\phi = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ Id & Id \end{pmatrix}$$

e quindi  $\phi$  è localmente invertibile.  $\square$

**Esercizio 7.2.17.** *Per ogni  $x \in M$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che ogni  $y, z \in U$  sono uniti da un'unica geodetica in  $U$ .*

### 7.3. Lezione 27: Lemma di Gauss, Teorema di Hopf-Rinow e caratterizzazione di isometrie

Sia  $M$  una varietà Riemanniana.

**7.3.1. Lemma di Gauss.** In  $\mathbb{R}^n$  il raggio di una sfera è ortogonale alla sfera. La stessa cosa succede in  $M$ .

Fissiamo un punto  $x \in M$ , se la dimensione di  $M$  è  $n$ ,  $T_x M$  è isomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Sia  $S$  la sfera unitaria di  $T_x M$ :

$$S = \{v \in T_x M : g(v, v) = 1\}$$

ovviamente  $S$  è diffeomorfa a alla sfera unitaria  $S^{n-1}$  di  $\mathbb{R}^n$ . Per ogni  $v \in S$  sia  $\sigma_v$  la geodetica a velocità unitaria emanante da  $x$  e con velocità iniziale  $v$ . Sappiamo che esiste un tempo  $r_0$  per cui  $\sigma_v$  sia definita almeno fino al tempo  $r_0$  per ogni  $v \in S$ . Per ogni  $r < r_0$  poniamo

$$S_r = \{v \in T_x M : g(v, v) = r\}.$$

**Lemma 7.3.1** (Gauss Lemma). *Per ogni  $v \in S$  ed  $r < r_0$  la curva  $\sigma_v(t)$  è ortogonale a  $\exp_x(S_r)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Un punto di  $\exp_x(S_r)$  non è altro che  $\sigma_v(r)$  per un certo  $v$  e siccome  $\sigma_v$  ha velocità unitaria la lunghezza di  $\sigma_v|_{[0,r]}$  è  $r$  indipendentemente da  $v$ . Sia ora  $\alpha(s)$  una qualsiasi curva liscia in  $S$  con  $\alpha(0) = v$  e sia  $\phi$  la variazione di  $\sigma$  data da  $\phi(t, s) = \sigma_{\alpha(s)}(t)$  dalla formula della variazione della lunghezza se ne deduce che

$$g(\dot{\alpha}(0), \dot{\sigma}_v(r)) = 0.$$

$\square$

**Corollario 7.3.2.** *In coordinate polari la metrica si scrive*

$$dr^2 + h_r$$

dove  $h_r$  è la metrica indotta su  $\exp_x(S_r)$ .

Il lemma di Gauss ha come conseguenza che una curva emanante da  $x$  e che arriva ad  $\exp_x(S_r)$  è strettamente piú lunga di  $r$  a meno che non sia una geodetica emanante da  $x$ .

Per cui le curve che minimizzano la distanza tra  $x$  e  $\exp_x(S_r)$  sono proprio le  $\sigma_v$ . Ne segue che una curva in una varietà Riemanniana che localmente minimizza la distanza è localmente geodetica, quindi è liscia. Cioè abbiamo appena dimostrato il Fatto 7.1.17.

**7.3.2. Le geodetiche realizzano la distanza.** Possiamo finalmente dimostrare il viceversa del Teorema 7.2.10

**Teorema 7.3.3.** *Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una geodetica. Allora per ogni  $x \in [a, b]$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che per ogni  $s < t \in U$  ogni curva in  $M$  tra  $\gamma(s)$  e  $\gamma(t)$ , che non sia una riparametrizzazione di  $\gamma$ , è strettamente piú lunga della restrizione di  $\gamma$  a  $[s, t]$ .*

DIMOSTRAZIONE. Nella dimostrazione del Teorema 7.1.12 abbiamo visto che esiste un intorno  $V$  di  $\gamma(x)$  tale che, se  $U$  è abbastanza piccolo, le curve che minimizzano la distanza tra  $\gamma(s)$  e  $\gamma(t)$  non escono da  $V$  (o se preferite segue dal lemma di Gauss.) Per il teorema di Ascoli-Arzelà<sup>3</sup>, una successione di curve in  $V$  parametrizzate per lunghezza d'arco, le cui lunghezze tendono a  $d(\gamma(s), \gamma(t))$ , converge ad una curva  $\sigma$  che realizza tale distanza. Tale curva è liscia per il Fatto 7.1.17. Per il Teorema 7.2.10 sappiamo allora che  $\sigma$  deve essere una geodetica. Per l'Esercizio 7.2.17 — che sicuramente avrete fatto — per  $V$  abbastanza piccolo  $\gamma(s)$  e  $\gamma(t)$  sono uniti da un'unica geodetica in  $V$ , quindi  $\sigma$  è una riparametrizzazione di  $\gamma$  che quindi minimizza localmente la lunghezza.  $\square$

**7.3.3. Completezza (Hopf-Rinow Theorem).**<sup>4</sup> Uno spazio metrico si dice **completo** se ogni successione di cauchy ha un limite. Uno spazio metrico si dice **geodetico** se per ogni coppia di suoi punti  $x, y$  esiste una geodetica tra  $x$  e  $y$  che realizza la distanza. Uno spazio metrico si dice **geodeticamente completo** se ogni geodetica definita su un intervallo  $[a, b]$  si estende ad una geodetica definita su tutto  $\mathbb{R}$ .

**Esempio 7.3.4.** *Un semipiano aperto è geodetico ma non è geodeticamente completo. Il piano senza l'origine non è né geodetico né geodeticamente completo. Lo spazio  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin(1/x)\} \cup \{x = 0\}$  è completo ma non è geodetico.*

**Definizione 7.3.5.** *Il diametro di uno spazio metrico  $X$  è definito come*

$$\text{diam}(X) = \sup_{x, y} d(x, y) \in [0, \infty].$$

**Teorema 7.3.6.** *Una varietà Riemanniana connessa e geodeticamente completa è geodetica.*

DIMOSTRAZIONE. Siano  $x, y \in M$ . L'insieme dei punti connessi a  $x$  da una geodetica che minimizza la distanza è chiuso. Infatti se  $y_n \rightarrow y$  con  $y_n \in \text{Im}(\exp_x)$  avremo  $y_n = \sigma_{v_n}(r_n v_n)$  per opportuni vettori  $v_n \in S$  e raggi  $r_n = d(x, y_n)$ . Siccome la distanza è continua (Teorema 7.1.12)

<sup>3</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Arzel-Ascoli\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Arzel-Ascoli_theorem) Quei coglioni di wikipedia metono gli url con gli accenti in utf-8 e non sempre il compilatore L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>Xc ha il pacchetto installato. Fare le cose semplici no eh?

<sup>4</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Hopf-Rinow\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Hopf-Rinow_theorem)

$r_n \rightarrow r = d(x, y)$ . Siccome  $S$  è compatto, a meno di sottosuccessioni  $v_n \rightarrow v$ . Siccome  $y_n \rightarrow y$  la geodetica emanante da  $x$  con velocità iniziale  $v$  passa per  $y$  al tempo  $r$ .

In particolare, l'insieme  $I$  dei numeri  $r$  tali che ogni punto a distanza minore o uguale di  $r$  da  $x$  sia connettibile a  $x$  con una geodetica minimale è chiuso.

Vediamo adesso che tale insieme è aperto in  $[0, \text{diam}(M)]$ . Sia  $y$  connettibile a  $x$  con una geodetica che realizza la distanza con  $r = d(x, y) \in I$ . Per il lemma di Gauss esiste  $\varepsilon > 0$  per cui tutti gli  $z, w \in B(y, \varepsilon)$  siano connettibili tra loro con una geodetica minimizzante e contenuta in  $B(y, \varepsilon)$ . Per ogni curva  $\gamma$  che connette un punto  $z \in B(y, \varepsilon)$  a  $x$  sia  $w_\gamma$  un punto di intersezione di  $\gamma$  con la frontiera di  $B(y, \varepsilon)$ . Se la lunghezza di  $\gamma$  è sufficientemente vicina a  $d(z, x)$  e se  $z$  è sufficientemente vicino a  $y$  abbiamo che la distanza tra  $w_\gamma$  e  $x$  è strettamente minore di  $r$ . Quindi esiste una geodetica  $\sigma_\gamma$  che connette  $w_\gamma$  a  $x$ . Possiamo quindi sostituire  $\gamma$  con l'unione di  $\sigma_\gamma$  e del segmento geodetico tra  $z$  e  $w_\gamma$ , senza aumentarne la lunghezza. Se  $\gamma_n$  è una successione di curve tra  $z$  e  $x$  le cui lunghezze tendono a  $d(z, x)$ , allora le spezzate con cui le andiamo a sostituire convergono ad una spezzata che realizza la distanza tra  $z$  e  $x$ , ma per il Fatto 7.1.17 ed il Teorema 7.2.10 sappiamo che tale spezzata deve essere una geodetica, quindi ogni  $z \in B(y, \varepsilon)$  è connettibile a  $x$  con una geodetica che realizza la distanza. Ne segue che  $I$  è aperto e chiuso in  $[0, \text{diam}(M)]$  e quindi coincide con  $[0, \text{diam}(M)]$ , da cui la tesi.  $\square$

**Teorema 7.3.7.** *Una varietà Riemanniana connessa  $M$  è metricamente completa se e solo se è geodeticamente completa.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x \in M$ . L'insieme dei raggi  $r$  per cui l'esponenziale  $\exp_x$  è definito fino a  $r$  è aperto e non vuoto per il Teorema 7.2.12. Se  $M$  è metricamente completa tale insieme è anche chiuso per cui l'esponenziale è definito su tutto  $TM$  e quindi  $M$  è geodeticamente completa.

Supponiamo adesso  $M$  geodeticamente completa. Per il Teorema 7.3.6  $M$  è geodetica. Sia  $x \in M$ , sia  $y_n$  una successione di Cauchy e siano  $v_n$  vettori unitari in  $T_x M$  ed  $r_n \in \mathbb{R}$  tali che, detta  $\sigma_{v_n}$  la geodetica emanante da  $x$  con velocità iniziale  $v_n$ , si abbia  $\sigma_{v_n}(r_n) = y_n$  con  $r_n = d(x, y_n)$ . Siccome  $y_n$  è di Cauchy, anche la successione  $r_n$  lo è per la disuguaglianza triangolare. Quindi  $r_n$  ha un limite  $r$ . A meno di sotto successioni  $v_n \rightarrow v$ . La geodetica  $\sigma_v$  è definita per ogni tempo perchè  $M$  è geodeticamente completa, per cui  $y_n = \sigma_{v_n}(r_n)$  converge a  $\sigma_v(r)$  perchè  $\exp_x$  è liscia.  $\square$

**7.3.4. Isometrie e Killing fields reloaded.** Sia  $M$  una varietà Riemanniana connessa e geodeticamente completa. L'esistenza e le proprietà dell'esponenziale hanno come conseguenza che le isometrie sono

caratterizzate completamente dal loro comportamento al prim'ordine in un punto qualsiasi.

**Teorema 7.3.8.** *Siano  $\varphi$  e  $\psi$  due isometrie di  $M$  tali che esista un punto  $x \in M$  tale che*

$$\varphi(x) = \psi(x) \quad d\varphi_x = d\psi_x.$$

Allora,  $\varphi = \psi$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $f = \varphi\psi^{-1}$ . Dimostriamo che  $f$  è l'identità. Ovviamente  $f$  è un'isometria, in quanto composizione di isometrie. In oltre  $f(x) = x$  e  $df_x = Id$ . Sia  $A$  l'insieme dei punti  $a$  tali che  $f(a) = a$  e  $df_a = Id$ . Dimostrando che  $A$  è aperto e chiuso, avendo  $x \in A$ , avremo la tesi.

Siccome  $f$  è un'isometria è liscia. Quindi se  $x_n \rightarrow x_\infty$  con  $f(x_n) = x_n$  e  $df_{x_n} = Id$ , allora  $f(x_\infty) = x_\infty$  e  $df_{x_\infty} = Id$ . Per cui  $A$  è chiuso.

Sia ora  $a \in A$ . Per ogni  $v \in T_a M$  si ha  $df_a(v) = v$ . Siccome  $f$  è un'isometria, per ogni geodetica  $\sigma$  emanante da  $a$ ,  $f(\sigma)$  è una geodetica emanante da  $a$  con velocità iniziale  $df_a[\dot{\sigma}(0)] = \dot{\sigma}(0)$ . Ne segue che  $f$  fissa tutte le geodetiche emananti da  $a$  e in particolare fissa un intorno di  $a$ , per cui  $A$  è aperto.  $\square$

La stessa cosa vale per i campi di killing.

**Fatto 7.3.9.** *Sia  $p \in M$  un punto qualsiasi. Un campo di vettori killing  $X$  è univocamente determinato da  $X_p$  e  $(\nabla X)_p$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome i campi killing sono uno spazio vettoriale (vedi Fatto 6.3.11,) basta dimostrare che se  $X_p = 0$  e  $(\nabla_Y X)_p = 0$  per ogni  $Y$  allora  $X = 0$ . Sia  $\phi_t$  il flusso associato ad  $X$ . Cominciamo con notare che, siccome  $X_p = 0$ , la linea di flusso passante per  $p$  è costante (esistenza e unicità di soluzioni di equazioni differenziali ordinarie.) Per cui

$$\phi_t(p) = p \quad \forall t.$$

Adesso osserviamo che

$$[X, Y]_p = (\nabla_X Y)_p - (\nabla_Y X)_p = \nabla_{X_p} Y - (\nabla_Y X)_p = 0 + 0 = 0$$

e quindi  $(L_X Y)_p = [X, Y]_p = 0$  per ogni  $Y$ . In coordinate, siccome  $X_p = 0$  abbiamo  $[X, Y]_p = Y(X)_p$ . Usando la formula (7) di pagina 32 Otteniamo

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(d\phi_t Y) = Y(X)_p = 0.$$

Che vale per ogni  $Y$ , quindi anche per  $(\phi_s)_* Y$  per ogni  $s$ . Siccome  $\phi_{s+t} = \phi_t \circ \phi_s$  abbiamo

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=s}(d\phi_t Y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(d\phi_t [d\phi_s Y]) = d\phi_s[Y](X)_p = 0.$$

che ancora vale per ogni  $Y$ . Da cui si deduce che  $d\phi_t$  è costante in  $t$ . Essendo  $\phi_0 = Id$ , si ha  $d\phi_t = Id$  per ogni  $t$ ; per il Teorema 7.3.8  $\phi_t = Id$  per ogni  $t$  e quindi  $X = 0$  ovunque.  $\square$

### 7.4. Lezione 28: Esercitazione

**7.4.1. Le equazioni delle geodetiche in coordinate.** La famosa equazione  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$  si può scrivere in coordinate coi Christoffel (che barba.)

Partiamo con il consueto conticino di riscaldamento. Sia  $\gamma$  una curva in una varietà Riemanniana  $M$  e sia  $f$  una funzione definita solo sull'immagine di  $\gamma$ , cioè  $f(\gamma(t))$  c'ha senso ma  $f(x)$  non è definita se  $x$  non sta nell'immagine di  $\gamma$ .

Abbiamo visto che  $\nabla_{\dot{\gamma}}f$  ha senso ed è esattamente la derivata prima di  $f$ . Infatti, se  $F$  è una qualsiasi estensione liscia di  $f$  ad un intorno dell'immagine di  $\gamma$ , allora la derivata prima di  $f(\gamma(t))$  è

$$dF[\dot{\gamma}]$$

per la regola delle funzioni composte. È chiaro che ciò non dipende dalla  $F$  perchè se  $G$  è un'altra estensione di  $f$  si ha che  $F - G$  è nulla lungo gamma per cui  $dF[\dot{\gamma}] = dG[\dot{\gamma}]$ . Queste cose le avevamo già dette per i tensori (vedi 5.2.11) ma repetita juvant. Bene. Chi è  $dF[\dot{\gamma}]$ ? In coordinate, se  $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$  allora

$$\dot{\gamma} = (\dot{\gamma}^1, \dots, \dot{\gamma}^n) = \dot{\gamma}^k \partial_k$$

(in notazione Einstein.) Per cui riepilogando

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) = \nabla_{\dot{\gamma}}f = dF[\dot{\gamma}] = \dot{\gamma}^i \frac{\partial F}{\partial x^i} = \dot{\gamma}^i \partial_i(F) = \dot{\gamma}^i \nabla_{\partial_i} F = \dot{\gamma}^i \nabla_{\partial_i} f$$

Adesso possiamo calcolare quindi la “derivata seconda” di  $\gamma$ . Infatti in coordinate  $\ddot{\gamma} = (\ddot{\gamma}^1, \dots, \ddot{\gamma}^n)$  ove, essendo  $\dot{\gamma}^i$  una funzione definita lungo  $\gamma$  (come la  $f$  di prima) possiamo applicare la formula qui sopra ottenendo

$$\ddot{\gamma}^k = \dot{\gamma}^i \nabla_{\partial_i} \dot{\gamma}^k$$

Bene, veniamo adesso all'equazione delle geodetiche. La quantità  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$  è ben definita e per calcolarla possiamo usare una qualsiasi estensione di  $\dot{\gamma}$  ad un campo su  $M$ . Possiamo usare quindi la linearità e scrivere

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} &= \nabla_{\dot{\gamma}^i \partial_i} \dot{\gamma}^k \partial_k = \dot{\gamma}_i \nabla_{\partial_i} \dot{\gamma}^k \partial_k = \dot{\gamma}_i (\nabla_{\partial_i} \dot{\gamma}^k) \partial_k + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \nabla_{\partial_i} \partial_j \\ &= \ddot{\gamma}^k \partial_k + \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k \partial_k \end{aligned}$$

Per cui l'equazione di una geodetica in coordinate diventa il sistema

$$\ddot{\gamma}^k + \sum_{ij} \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j \Gamma_{ij}^k = 0 \quad \forall k$$

Vediamolo su un esempio concreto.

**Esercizio 7.4.1.** Chi sono le geodetiche di  $S^2$ , la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$ ?

Mettiamoci in coordinate polari  $(\varphi, \theta)$

$$(x, y, z) \in S^2 = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$$

In queste coordinate la metrica è diagonale e si scrive come

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \quad g_{\varphi\varphi} = 1, g_{\theta\theta} = \cos^2 \varphi, g_{\varphi\theta} = 0$$

Adesso ci ricaviamo i Christoffel con la formula

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{(\partial_j(g_{ik}) + \partial_i(g_{jk}) - \partial_k(g_{ij})) g^{kh}}{2}$$

per cui gli unici Christoffel non nulli sono

$$\Gamma_{\varphi\theta}^\theta = -\tan \varphi \quad \Gamma_{\theta\theta}^\varphi = \cos \varphi \sin \varphi$$

e le equazioni per le geodetiche di  $S^2$  sono

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + \dot{\theta}^2 \cos \varphi \sin \varphi = 0 \\ \ddot{\theta} - \dot{\varphi} \dot{\theta} \tan \varphi = 0 \end{cases}$$

Sfido a ricavarne che le soluzioni sono cerchi massimi. Ed infatti per trovare chi sono le geodetiche di  $S^2$  si fa in modo diverso.

Sia  $\gamma$  una geodetica. La parametrizziamo in lunghezza d'arco e ci mettiamo in coordinate polari tali che  $\gamma(0) = (0, 0)$  e  $\dot{\gamma}(0) = \partial\theta$ .

Adesso si vede subito che il sistema  $\varphi(t) = 0, \theta(t) = t$  è una soluzione dell'equazione  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ , che per unicità deve coincidere con  $\gamma$ . Così si è dimostrato che  $\gamma$  è un cerchio massimo.

Se ne deduce che i Christoffel servono teoricamente, per esempio per dimostrare l'esistenza locale di geodetiche, ma che poi per fare i conti bisogna essere un po' scaltri, ché se si butta tutto in coordinate senza criterio non se ne leva piú le gambe.

Consideriamo adesso un prodotto  $N = \mathbb{R} \times M$  dove  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana qualsiasi. Dotiamo  $N$  di una metrica  $h$  data da  $dx^2 + f(x)ds^2$  ove  $ds^2$  è la metrica di  $M$  e  $f(x)$  è una funzione liscia mai nulla. In pratica la metrica  $h$  si scrive come

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(x) (g_{ij}) \end{pmatrix}$$

Sia  $\gamma$  una curva in  $N$ , in coordinate scriviamo

$$\gamma = (x(t), m(t))$$

ove  $m$  è la componente di  $\gamma$  lungo  $M$ . Si ha ovviamente

$$\dot{\gamma} = (\dot{x}, \dot{m})$$

**Esercizio 7.4.2.** *Dimostrare che per ogni  $m_0 \in M$  la curva  $\gamma(t) = (t, m_0)$  è geodetica.*

Potremmo anche metterci a scrivere i Christoffel e compagnia. Ma basta osservare che il campo  $\partial_x$  è ortogonale a  $\{p\} \times M$  in ogni punto e che la sua norma non dipende da  $M$ . Per cui localmente in coordinate locali  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$  per  $N$  se una curva  $\gamma$  giunge i punti  $(x_1, m)$  e  $(x_2, m)$  allora è necessariamente piú lunga del segmento tra i due punti che quindi è la geodetica tra i due punti. Ne segue che  $\nabla_{\partial_x}^N \partial_x = 0$ .

**Esercizio 7.4.3.** *Dimostrare che se  $\sigma$  è una geodetica di  $M$  allora la curva  $(x_0, \sigma(t))$  è una geodetica di  $N$  solo se  $f(x_0) = 0$ .*

Se uno parte in quarta e scrive, per una generica curva  $\gamma = (x, \sigma)$ ,

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \nabla_{\dot{x} + \dot{\sigma}} \dot{x} + \dot{\sigma} = \nabla_{\dot{x}} \dot{x} + \nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} + \nabla_{\dot{x}} \dot{\sigma} + \nabla_{\dot{\sigma}} \dot{x}$$

per poi dire che quando  $\dot{x} = 0$  si ha  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma}$  e quindi  $\gamma$  è geodetica se e solo se  $\sigma$  lo è, SBAGLIA. Dove? Questo conto è in fondo corretto, ma il fatto è che le connessioni di  $N$  e di  $M$  sono diverse. Nel conto appena fatto la connessione usata è quella di  $N$ . E potrebbe succedere che  $\nabla_{\dot{\sigma}}^M \dot{\sigma} = 0$  mentre  $\nabla_{\dot{\sigma}}^N \dot{\sigma} \neq 0$ . Abbiamo visto infatti che  $\nabla^M$  è la proiezione di  $\nabla^N$  su  $TM$ . Cioè, per vedere che  $\gamma$  sia una geodetica, anche sapendo che  $\sigma$  è geodetica per  $M$ , si deve controllare che  $\nabla_{\dot{\sigma}}^N \dot{\sigma}$  non abbia componenti lungo  $\partial_x$ . Per calcolare  $\nabla_{\dot{\sigma}}^N \dot{\sigma}$  ci dobbiamo procurare una estensione di  $\dot{\sigma}$  ad un intorno di  $\{x_0\} \times M$ , ed abbiamo piena libertà. La useremo tra poco. Adesso usiamo la Koszul

$$\begin{aligned} 2h(\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma}, \partial_x) &= \dot{\sigma}(h(\dot{\sigma}, \partial_x)) + \dot{\sigma}(h(\dot{\sigma}, \partial_x)) - \partial_x(h(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})) \\ &\quad + h([\dot{\sigma}, \dot{\sigma}], \partial_x) - h([\dot{\sigma}, \partial_x], \dot{\sigma}) + h([\partial_x, \dot{\sigma}], \dot{\sigma}) \\ &= 2\dot{\sigma}(h(\dot{\sigma}, \partial_x)) - \partial_x(h(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})) + 2h([\partial_x, \dot{\sigma}], \partial_x) \end{aligned}$$

Ora,  $h(\dot{\sigma}, \partial_x) = 0$  per come è definita la metrica e chiaramente possiamo estendere  $\dot{\sigma}$  in modo che sia ortogonale a  $\partial_x$ . Per cui la sua derivata è zero. Il commutatore di un campo con se stesso è sempre nullo. Il termine che ci dà noia è quello che contiene  $[\dot{\sigma}, \partial_x]$  ma possiamo estendere  $\dot{\sigma}$  ad un campo che commuti con  $\partial_x$  (siamo in un prodotto!) per cui rimane solo il termine

$$\partial_x(h(\dot{\sigma}, \dot{\sigma}))$$

ora qualsiasi estensione di  $\sigma$  che andate a considerare non vi potete liberare della  $f$ . Infatti, siccome abbiamo esteso  $\sigma$  in modo ortogonale a  $\partial_x$

$$\partial_x(h(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})) = \partial_x(f(x)g(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})) = \dot{f}g(\dot{\sigma}, \dot{\sigma}) + f\partial_x g(\dot{\sigma}, \dot{\sigma}) = \dot{f}\|\sigma\|_M^2$$

per cui la componente lungo  $\partial_x$  sparisce se e solo se  $\dot{f}(x_0) = 0$ .

**7.4.2. Esercizi.**

**Esercizio 7.4.4.** *Dimostrare che in un prodotto  $M \times N$  di due varietà Riemanniane (con la metrica prodotto,) una curva  $\gamma$  è geodetica se e solo se lo sono le entrambe le sue componenti. (Hint: In coordinate locali scrivere  $\gamma$  come  $(\alpha, \beta)$ ; estendere i campi  $(\dot{\alpha}, 0)$  e  $(0, \dot{\beta})$ , che sono definiti solo lungo  $\gamma$  a tutto un intorno di  $\gamma$  in modo che  $\dot{\alpha}$  sia costante lungo  $N$  e  $\dot{\beta}$  lo sia lungo  $M$ . Poi usare che  $\nabla^{M \times N} = \nabla^M + \nabla^N$  e un po' di Koszul.)*

**Esercizio 7.4.5.** *Dimostrare che ogni varietà Riemanniana  $(M, g)$  compatta è completa.*

**Esercizio 7.4.6.** *Sia  $M$  la varietà  $\{(x, y) : y > 0\}$  con la metrica  $\frac{dx^2 + dy^2}{y}$  (notare che non è quella iperbolica.) Dimostrare che il completamento metrico di  $M$  è lo spazio  $X$  ottenuto aggiungendo a  $M$  la retta  $\{y = 0\}$ . Dimostrare che su tale retta, con la distanza di  $X$  non esistono cammini non costanti di lunghezza finita. Dimostrare che  $X$  non è geodeticamente completo pur essendo completo come spazio metrico.*

## SETTIMANA 8

### Curvatura

#### 8.1. Lezione 29: Richiami sulle curve e superfici

Cominciamo con un ripasso di argomenti standard, che dovrebbero essere noti a chi ha seguito i fondamentali di geometria degli anni precedenti, tipo geometria differenziale delle curve e geometria delle superfici di  $\mathbb{R}^3$ . A chi non avesse mai visto tali argomenti si consiglia di sfogliare il libro “Differential geometry of curves and surfaces” di Manfredo P. Do Carmo (occhio che non è il “Riemannian Geometry” consigliato all’inizio, è un altro libro.)

Per ora ci limiteremo alle curve nel piano, ove una retta sarà considerata come un cerchio di raggio infinito.

**8.1.1. Cerchio osculatore e curvatura.** Sia  $\gamma$  una curva liscia nel piano, parametrizzata in modo da non avere mai velocità nulla. La retta tangente a  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$  è parallela al vettore  $\dot{\gamma}(t)$ . Tale retta approssima  $\gamma$  al prim’ordine.

Nel punto  $\gamma(t)$  ci sono infiniti cerchi tangenti a  $\gamma$ , ma ve n’è uno solo che approssima  $\gamma$  sino al second’ordine. Tale cerchio si chiama **cerchio osculatore** ed il disegno che se ne fa in quasi tutti i libri è “sbagliato”. Infatti, il disegno classico che si fa è una curva con un cerchio tangente che sta tutto dalla stessa parte di  $\gamma$ , mentre il cerchio osculatore in genere attraversa la curva. Per convincersene, supponete che  $\gamma$  sia una curva in  $\mathbb{R}^2$  passante per l’origine con tangente orizzontale. Localmente possiamo esprimere la differenza tra  $\gamma$  ed il cerchio osculatore come una funzione con derivata nulla fino all’ordine due. Se la derivata terza non è nulla (e questo è il caso generico) la funzione localmente è una roba come  $x^3$  e quindi attraversa l’asse orizzontale.

Il raggio del cerchio osculatore si chiama raggio di curvatura ed il suo reciproco si chiama **curvatura** di  $\gamma$ . Così, una retta ha curvatura zero ed un cerchio è tanto piú curvato quanto piú piccolo e l’intuizione del comune mortale legata alla parola “curvatura” non subisce traumi.

La curvatura è quindi una caratteristica del “secondo ordine”. Ed in effetti si può descrivere come la derivata seconda di  $\gamma$ . Se parametrizziamo  $\gamma$  per lunghezza d’arco (cioè  $|\dot{\gamma}| = 1$ ) si ha che  $\ddot{\gamma}$  è ortogonale a  $\dot{\gamma}$  infatti

$$0 = \frac{d}{dt}(\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle) = 2\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle.$$

In questo caso la curvatura è  $|\ddot{\gamma}|$ . Se il versore normale  $\nu$  di  $\gamma$  è preso in modo la base  $(\dot{\gamma}, \nu)$  orientata positivamente, il segno di  $\ddot{\gamma}$  (nel caso  $\ddot{\gamma} \neq 0$ ) ci dice semplicemente se la base  $(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$  di  $\mathbb{R}^2$  sia orientata positivamente o meno.

In altre parole, se prendiamo una curva  $\gamma$  con velocità unitaria, passante per l'origine al tempo 0, con  $\dot{\gamma}(0)$  verticale, il centro del raggio osculatore si trova in  $1/\ddot{\gamma}(0)$ . Provare (a fare il conto) per credere.

**8.1.2. Curvatura di superfici in  $\mathbb{R}^3$ .** Adesso consideriamo una superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ . Sappiamo che la connessione di Levi Civita per la metrica indotta su  $S$  non è altro che la proiezione di  $\nabla_X Y$  sul tangente a  $S$  e che la componente normale è la seconda forma fondamentale vettoriale.

Consideriamo una geodetica  $\gamma$  su  $S$ , parametrizzata per lunghezza d'arco. Il fatto che  $\gamma$  sia geodetica su  $S$  significa che  $\nabla_{\dot{\gamma}}^S \dot{\gamma} = 0$ . Ma  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  potrebbe non essere nullo. Cioè  $\gamma$  è dritta su  $S$  ma può essere storta in  $\mathbb{R}^3$ . In ogni caso, abbiamo che  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  è ortogonale a  $S$  e coincide quindi con la forma fondamentale vettoriale  $\Pi(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ .

Siccome  $\gamma$  è dritta in  $S$ ,  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  descrive quanto  $S$  è curva in  $\mathbb{R}^3$  nella direzione  $\dot{\gamma}$ . Fissando un versore normale  $\nu$  a  $S$ , positivamente orientato, la coordinata di  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  rispetto a  $\nu$  è la seconda forma fondamentale classica applicata alla coppia  $(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ .

La traccia della seconda forma fondamentale (rispetto a una base ortonormale) si chiama **curvatura media** e descrive quanto, localmente,  $S$  non sia una superficie minimale. Il determinante della seconda forma fondamentale (sempre rispetto a una base ortonormale) si chiama **curvatura Gaussiana** di  $S$  ed è, per il Teorema Egregium<sup>1</sup>, una quantità che dipende solo dalla metrica indotta su  $S$  e non dal particolare embedding in  $\mathbb{R}^3$  che induce tale metrica. (Chi non si ricordasse queste cose, può leggersele sul Do Carmo “Differential geometry of curves and surfaces”.)

Ripetiamo un attimo cos'è la curvatura gaussiana in un punto  $p$  di  $S$ . Si deve fare il determinante (rispetto a una base ortonormale) della seconda forma fondamentale, che è una forma bilineare simmetrica e quindi è completamente determinata dalla forma quadratica  $\Pi(v, v)$ . Per calcolare tale forma quadratica si prende una geodetica  $\gamma$  passante per  $p$  con  $\dot{\gamma}(0) = v$ , si calcola  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  e lo si proietta sul normale unitario di  $S$ . La forma quadratica associata alla seconda forma fondamentale ha un massimo e un minimo sull'insieme dei vettori unitari. Sono le **curvature principali**, ed il loro prodotto è il determinante cercato.

Nel caso delle curve nel piano,  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  descriveva completamente il cerchio osculatore, ossia la quadrica tangente fino al secondo ordine alla curva. Nel caso delle superfici in  $\mathbb{R}^3$  succede la stessa cosa: la seconda forma fondamentale ci dice chi è la quadrica (conica) tangente al

<sup>1</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Theorema\\_Egregium](http://en.wikipedia.org/wiki/Theorema_Egregium)

second'ordine a  $S$ . Tipo, se le curvatures principali coincidono allora la conica tangente sarà una sfera, se sono entrambe positive ma differenti, la conica tangente sarà un'ellissoide e le curvatures principali ci diranno chi siano gli assi etc...

**8.1.3. Il teorema dell'indice.** Questo teorema, molto intuitivo, ha una dimostrazione da urlo per eleganza e lo si può enunciare dicendo che una curva chiusa senza autointersezioni fa un solo giro.

Una curva senza autointersezioni si chiama semplice. Una curva semplice e chiusa è quindi un embedding di  $S^1$ .

**Teorema 8.1.1.** *Sia  $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un embedding liscio e parametrizzato con velocità costante. La funzione da  $S^1$  in sé definita da  $\dot{\gamma}/|\dot{\gamma}|$  ha grado  $\pm 1$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Parametrizziamo  $S^1$  con  $[0, 1]$ , imponendo  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . A meno di traslazioni e rotazioni, possiamo supporre che  $\gamma(0) = (0, 0)$ , che  $\dot{\gamma}(0)$  sia orizzontale e che l'immagine di  $\gamma$  sia contenuta tutta nel semipiano superiore. Sia  $T$  il triangolo  $\{(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] : s \leq t\}$  e sia  $\psi : T \rightarrow S^1$  la funzione definita da

$$\psi(s, t) = \begin{cases} \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{|\gamma(t) - \gamma(s)|} & s \neq t, (s, t) \neq (0, 1) \\ \dot{\gamma}(t)/|\dot{\gamma}(t)| & s = t \\ -\dot{\gamma}(0)/|\dot{\gamma}(0)| & (s, t) = (0, 1) \end{cases}$$

Siccome  $\gamma$  è liscia,  $\psi$  è continua (vedere Figura 1.)

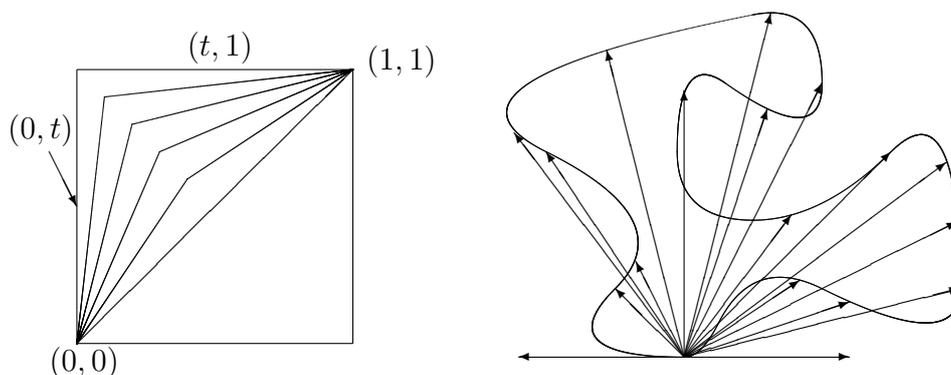


FIGURA 1. Il triangolo  $T$  ed i vettori  $\gamma(t) - \gamma(0)$  che riscalati forniscono  $\psi(0, t)$

La restrizione di  $\psi$  all'ipotenusa non è altro che la mappa  $\dot{\gamma}/|\dot{\gamma}|$  di cui vogliamo calcolare il grado. Il triangolo  $T$  ci fornisce un'omotopia con la restrizione di  $\psi$  ai due cateti, per cui basta calcolare il grado di tali mappe. La restrizione di  $\psi$  al lato  $(0, t)$  è una mappa da un intervallo in un intervallo che manda gli estremi negli estremi e quindi ha grado  $\pm 1$ . Lo stesso vale per il lato  $(t, 1)$  ed è evidente che ciò continua a valere per l'unione delle due mappe.  $\square$

**Corollario 8.1.2.** *Sia  $\gamma$  una curva semplice e chiusa nel piano. Sia  $w$  un vettore fissato non nullo e sia  $\varphi(t)$  l'angolo che  $\dot{\gamma}$  forma con  $w$ . Allora  $\int \dot{\varphi} = \pm 2\pi$  ove il segno dipende dall'orientazione di  $\gamma$ .*

## 8.2. Lezione 30: Curvatura geodetica, trasporto parallelo e Gauss-Bonnet

**8.2.1. Curvatura geodetica.** La nozione di curvatura geodetica di una curva si può dare in generale per una varietà Riemanniana.

**Definizione 8.2.1.** *Sia  $\gamma$  una curva in una varietà Riemanniana parametrizzata per lunghezza d'arco. Il vettore di curvatura geodetica di  $\gamma$  è  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ . La curvatura geodetica è il modulo del vettore di curvatura geodetica.*

Se  $\gamma$  è una curva con velocità costante non nulla, ma non necessariamente unitaria, il vettore di curvatura geodetica è dato da

$$\frac{\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}}{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$$

Il conto fatto nel piano vale in generale:

**Lemma 8.2.2.** *Sia  $\gamma$  una curva in una varietà Riemanniana. Se  $\gamma$  è parametrizzata con velocità costante, allora  $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$  è ortogonale a  $\dot{\gamma}$ .*

DIMOSTRAZIONE.

$$0 = \frac{d}{dt}(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

□

Usando questo fatto, nel caso delle superfici orientate, possiamo definire la curvatura con segno. La differenza è la stessa che c'è tra seconda forma fondamentale vettoriale e seconda forma fondamentale classica di superfici in  $\mathbb{R}^3$ .

**Definizione 8.2.3.** *Sia  $S$  una superficie orientata e dotata di una metrica Riemanniana. Sia  $\gamma$  una curva in  $S$  parametrizzata a velocità costante non nulla. Sia  $\nu$  il campo di vettori unitario normale a  $\gamma$ , orientato in modo che in ogni punto di  $\gamma$  la coppia  $(\dot{\gamma}, \nu)$  formi una base positiva di  $TS$ . La curvatura geodetica con segno  $k_\gamma$  di  $\gamma$  è definita dalla relazione da*

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = k_\gamma \nu$$

se  $|\dot{\gamma}| = 1$ , ed in generale da

$$\frac{\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}}{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})} = k_\gamma \nu$$

**8.2.2. Variazione dell'angolo tra una curva e un campo parallelo.** Adesso ci restringiamo al mondo delle superfici, ma stavolta intrinseche. Sia quindi  $(S, g)$  una superficie orientata dotata di una metrica Riemanniana.

Intuitivamente, una geodetica è dritta e la curvatura geodetica di una curva  $\gamma$  ci dice quanto  $\gamma$  è storta. Un'estrinsecazione formale di questa cosa è il fatto che la curvatura geodetica misura la derivata dell'angolo che una curva fa rispetto a un campo parallelo (cominciate pure a riguardarvi i contazzi sul cono fatti nella 5.4.1.)

Sia  $\gamma$  una curva parametrizzata per lunghezza d'arco e sia  $W$  un campo unitario lungo  $\gamma$  (cioè  $\nabla_{\dot{\gamma}}W = 0$ .) In generale se  $W$  è parallelo, il suo modulo è costante

$$\frac{d}{dt}g(W, W) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}}W, W) = 0$$

per cui supporre  $W$  unitario non è restrittivo.

L'angolo  $\varphi$  tra  $W$  e  $\dot{\gamma}$  viene misurato in senso antiorario (secondo l'orientazione di  $S$ ) partendo da  $W$  sino ad arrivare a  $\dot{\gamma}$  ed è definito dalla formula

$$g(W, \dot{\gamma}) = \cos \varphi$$

(sia  $\dot{\gamma}$  che  $W$  sono campi unitari.)

Derivando tale uguaglianza si ottiene

$$-\dot{\varphi} \sin \varphi = g(\nabla_{\dot{\gamma}}W, \dot{\gamma}) + g(W, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) = g(W, k_{\dot{\gamma}}\nu) = -k_{\dot{\gamma}} \sin \varphi$$

da cui

$$(14) \quad k_{\dot{\gamma}} = \dot{\varphi}.$$

Allo stesso modo, se supponiamo  $\gamma$  geodetica e  $W$  unitario ma non necessariamente parallelo, abbiamo che  $\nabla W$  è ortogonale a  $W$  per cui se orientiamo l'ortogonale unitario  $W^\perp$  a  $W$  in modo che la coppia  $(W, W^\perp)$  sia positiva, definendo  $k_W = g(W^\perp, \nabla_{\dot{\gamma}}W)$ , si ottiene

$$(15) \quad k_W = -\dot{\varphi}$$

(il segno meno dipende dalla scelta fatta per misurare  $\varphi$  in senso antiorario partendo da  $W$ .) Mettendo insieme le equazioni (14) e (15) otteniamo il caso generale:

**Fatto 8.2.4.** *Se  $\gamma$  è una curva parametrizzata a velocità costante e se  $W$  è un campo unitario, allora*

$$(16) \quad \dot{\varphi} = k_{\dot{\gamma}} - k_W.$$

**Corollario 8.2.5.** *Se  $\gamma$  è geodetica e  $W$  è parallelo, l'angolo tra  $W$  e  $\dot{\gamma}$  è costante.*

**8.2.3. Gauss-Bonnet infinitesimale.** Consideriamo adesso una curva semplice chiusa  $\gamma : [0, L] \rightarrow S$  (parametrizzata per lunghezza d'arco) e sia  $w$  un vettore unitario in  $T_{\gamma(0)}S$ . Sia  $W$  il campo ottenuto per trasporto parallelo di  $W$  lungo  $\gamma$ . Qual'è l'angolo che  $W(L)$  forma con  $w$ , cioè di quanto  $W$  non è tornato su sé stesso dopo un giro?

Beh, basta fare l'integrale di  $\dot{\varphi}$  lungo  $\gamma$ . Ma se  $W$  è parallelo, il termine  $k_W$  sparisce. Quindi tale quantità dipende solo da  $\gamma$ . Ciò non deve stupire, in quanto se due campi lungo  $\gamma$  sono paralleli l'angolo tra di loro è costante.

Consideriamo adesso un campo  $W$  su  $S$  e concentriamoci su  $k_W$ . Per come è definita,  $k_W$  è una quantità tensoriale in  $\dot{\gamma}$ , cioè dipende solo dal valore puntuale di  $\dot{\gamma}$ . Quindi, in ogni punto  $p$ , la quantità  $k_W$  misura la derivata dell'angolo che il campo  $W$  forma con la geodetica passante per  $p$  con velocità  $\dot{\gamma}$ . Per la (16) si ha

$$k_W = k_\gamma - \dot{\varphi}$$

per capire meglio cosa questo significhi lo riparafrasiamo: La derivata dell'angolo che  $W$  forma con la geodetica passante per  $\gamma(t)$  con velocità  $\dot{\gamma}(t)$  è uguale alla differenza della derivata dell'angolo formato da un campo parallelo con  $\gamma$  e la derivata dell'angolo tra  $W$  e  $\gamma$ .

Andiamo a fare l'integrale:

$$\int_\gamma k_W = \int_\gamma k_\gamma - \int_\gamma \dot{\varphi}$$

adesso vogliamo usare il teorema di Stokes piú il teorema dell'indice. Mettiamoci dunque nelle condizioni di poterlo fare.

Supponiamo che  $\gamma$  sia il bordo orientato di un disco  $D$  embedded in  $S$  e sia  $W$  un campo mai nullo. Supponiamo in oltre che il disco  $D$  sia contenuto in una carta locale per  $S$ , per cui possiamo fare il conto su  $\mathbb{R}^2$ . La curva  $\gamma = \partial D$  sarà quindi orientata in senso antiorario. Il teorema dell'indice ci dice che la funzione  $\dot{\gamma}$  ha grado 1, ed il corollario 8.1.2 ci dice che se  $W$  è un campo "costante" in coordinate, allora

$$\int_\gamma \dot{\varphi} = 2\pi$$

ed non è difficile convincersi che lo stesso vale anche per un campo generico  $W$  unitario. In ogni caso, per semplicità supponiamo che  $W$  sia un campo "costante" in coordinate, per esempio un campo coordinato, così siamo sicuri che la formula valga. D'altronde, per quanto detto sopra,

$$\int_\gamma k_\gamma$$

rappresenta lo scarto angolare tra un vettore ed il suo trasporto parallelo lungo  $\gamma$  dopo un giro. Per cui, se  $V_0$  è un vettore in  $\gamma(0)$  e  $V_1$  è il

suo trasportato parallelo lungo  $\gamma$  dopo un giro, si ha

$$\int_{\gamma} k_W = (\text{scarto angolare tra } V_0 \text{ e } V_1) - 2\pi$$

e adesso guardiamo da vicino  $k_W$ . Per definizione

$$k_W = g(W^\perp, \nabla_{\dot{\gamma}} W)$$

che come abbiamo detto, è tensoriale in  $\dot{\gamma}$ . Per cui, fissato  $W$ , questa non è altro che una 1-forma differenziale vista come applicazione che mangia un vettore (il nostro  $\dot{\gamma}$ ) e resituisce un numero ( $k_W$ .) Definiamo quindi  $\omega_W$  come

$$\omega_W(X) = g(W^\perp, \nabla_X W).$$

Adesso il teorema di stokes ci dice che

$$\int_D d\omega_W = \int_{\partial D} \omega_W = \int_{\gamma} k_W = \text{scarto tra } V_0 \text{ e } V_1 - 2\pi$$

Questa formula si può chiamare **teorema di gauss-bonnet infinitesimale**. La magia di questa formula è che, nel caso di una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , il calcolo diretto usando i Christoffel della connessione indotta, si ottiene

$$-d\omega_W = \text{Curvatura Gaussiana di } S$$

(vedere il conto sul Do Carmo curve e superfici.)

**8.2.4. Gauss-Bonnet poligonale.** Il teorema di Gauss-Bonnet è una versione globale di quello che noi abbiamo chiamato Gauss-Bonnet infinitesimale. Vediamo cosa succede se  $\partial D$  invece di essere una curva liscia è una spezzata, cioè parametrizzata in modo liscio ma con un numero finito di singolarità ove comunque esistono derivate destre e sinistre. Equivalentemente  $\gamma = \partial D$  è l'unione di un numero finito di curve lisce  $\gamma_i$  parametrizzate con intervalli in modo che il punto finale di una sia l'iniziale della successiva.

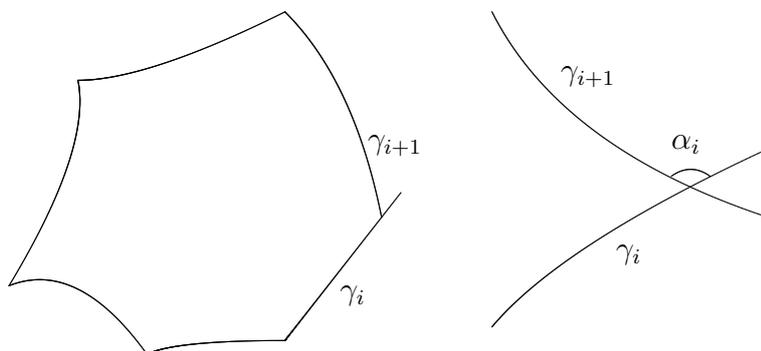


FIGURA 2. Angoli in una spezzata orientata in senso antiorario

Sia  $\alpha_i$  l'angolo tra  $\dot{\gamma}_i$  e  $\dot{\gamma}_{i+1}$  nel punto di incontro. L'angolo  $\alpha_i$  risulta essere il complemento a  $\pi$  dell'angolo interno formato da  $\gamma_i$  e

$\gamma_{i+1}$ . Adesso, se  $W$  è un campo lungo  $\gamma$  l'angolo  $\varphi$  che  $W$  forma con  $\dot{\gamma}$  subisce un salto di  $\alpha_i$  quando si attraversa la giuntura tra  $\gamma_i$  e  $\gamma_{i+1}$ .

Per cui la (16) può essere riscritta come

$$\dot{\varphi} = k_\gamma - k_W$$

nei punti lisci, e

$$\Delta\varphi = \alpha_i$$

nei punti singolari (ove il  $\Delta$ , indica il “salto”). Integrando si ottiene

$$\int_D d\omega_W = \int_{\partial D} k_W = \int_{\partial D} k_\gamma - \int_{\partial D} \dot{\varphi} + \sum_i \alpha_i$$

con le notazioni precedenti, si ha

$$\int_D d\omega_W = \text{scarto tra } V_0 \text{ e } V_1 - 2\pi + \sum_i \alpha_i.$$

In quest'uguaglianza la parte destra non dipende da  $W$  (come dev'essere.) In oltre, questa formula è interessante perché se i segmenti  $\gamma_i$  son geodetici, tutti i termini  $k_{\gamma_i}$  spariscono e quindi la formula diventa

$$\int_D d\omega_W = \sum_i \alpha_i - 2\pi$$

che non dipende da  $\gamma$  ma solo dagli angoli interni. Se chiamiamo  $\theta_i$  l'angolo interno a  $D$  formato tra  $\gamma_i$  e  $\gamma_{i+1}$ , si ha

$$\theta_i = \pi - \alpha_i$$

per cui la formula diventa

$$\int_D d\omega_W = (n-2)\pi - \sum_i \theta_i$$

dove  $n$  è il numero di lati di  $\partial D$ . Ricorda qualcosa? Quant'è la somma degli angoli interni di un usuale poligono in  $\mathbb{R}^2$ ? Esattamente  $(n-2)\pi$ . Ciò ci dice che in  $\mathbb{R}^2$   $d\omega_W \equiv 0$ . Consideriamo adesso un triangolo, la formula diventa

$$\int_D d\omega_W = \pi - \sum_i \theta_i$$

cioè se la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre minore di  $\pi$  allora siamo in una situazione  $-d\omega_W < 0$  e viceversa. Allo stesso modo, se la somma degli angoli interni di un triangolo è sempre maggiore di  $\pi$  siamo in una situazione  $-d\omega_W > 0$  e viceversa. Curioso fatto. Provate a immaginare una situazione in cui si dà per esempio su  $\mathbb{R}^2$  una metrica per cui valga sempre  $-d\omega_W = -1$ . Se prendete tre punti e fate il triangolo geodetico per questi tre punti la formula ci dice che l'area di tale triangolo non può eccedere  $\pi$ . Ciò se esistesse un tale mondo, là dentro i triangoli non possono avere area 42!!! Domanda: esiste un mondo fatto così? Le scommesse sono aperte.

### 8.3. Lezione31: Caratteristica di Eulero, Gauss Bonnet Globale e Tensore di Curvatura

**8.3.1. Caratteristica di Eulero-Poincarè per triangolazioni geodetiche e Gauss-bonnet globale.** Vediamo adesso come la formula per triangoli geodetici possa essere usata per definire un invariante di superfici, detto caratteristica di Eulero-Poincarè. In realtà tale invariante si definisce storicamente a mano, partendo da triangolazioni e poi si dimostra il teorema di Gauss-Bonnet, ma noi siamo ignoranti, abbiamo per le mani solo la formula che abbiamo dimostrato e faremo con quella.

Sia  $S$  una superficie orientata con una metrica Riemanniana  $g$ . Supponiamo di poter triangolare  $S$  con triangoli geodetici (come in una vetrata di una chiesa in cui tutti i pezzi del mosaico sono triangolari e con i lati geodetici.)

Siano  $\Delta_1, \dots, \Delta_T$  i triangoli usati e siano  $\theta_i^1, \theta_i^2, \theta_i^3$  gli angoli interni di  $\Delta_i$ . Su ogni  $\Delta_i$  vale (non dobbiamo preoccuparci del fatto che compare un campo  $W$  nella formula, abbiamo già visto che  $\int d\omega_W$  non dipende da  $W$ .)

$$\int_{\Delta_i} d\omega_W = \pi - \theta_i^1 - \theta_i^2 - \theta_i^3$$

per cui

$$\int_S d\omega_W = \sum_{i=1}^T \int_{\Delta_i} d\omega_W = \pi T - \sum_{i,j} \theta_i^j$$

Attorno ad ogni vertice della triangolazione la somma totale dei  $\theta_i^j$  vale  $2\pi$  per cui, se  $V$  è il numero totale dei vertici della triangolazione si ha

$$\sum \theta_i^j = 2\pi V$$

D'altra parte, se ogni  $\Delta_i$  è un triangolo, detto  $L$  il numero totale di lati della triangolazione, se facciamo  $3T$  otteniamo il numero dei lati, contati due volte perché ogni lato appartiene ad esattamente due triangoli. Da cui

$$3T = 2L$$

da cui

$$T + 2T = 2L \quad T = 2L - 2T \quad \pi T = 2\pi L - 2\pi T.$$

Totale:

$$\int_S d\omega_W = -2\pi(V - L + T)$$

La quantità  $V - L + T$  non dipende dunque dalla triangolazione scelta (il membro di sinistra ne è indipendente.) Tale numero si chiama caratteristica di  $S$  e si indica con  $\chi(S)$ . Abbiamo quindi trovato che

$$\int_S d\omega_W = -2\pi\chi(S)$$

sapendo che  $-d\omega_W$  è la curvatura gaussiana di  $S$ , si ottiene l'enunciato standard del teorema di Gauss-Bonnet: L'integrale della curvatura è  $2\pi\chi(S)$ .

**Esercizio 8.3.1.** *Dimostrare che l'argomento usato per le triangolazioni geodetiche vale anche se i lati non sono geodetici (che fine fanno i pezzi  $\int_{\gamma_i} k_{\gamma_i}$ ?)*

**Esercizio 8.3.2.** *Dimostrare che l'argomento usato per le triangolazioni vale anche se nella tassellazione di  $S$  compaiono tessere poligonali qualsiasi.*

### 8.3.2. Primo incontro ravvicinato col tensore di curvatura.

Ok, ci siamo. Questo termine  $d\omega_W$  che sta sempre tra le scatole, che dipende da  $W$  ma anche no, non può piú restar nell'anonimato: è giunta l'ora di calcolarlo. Sia  $S$  una superficie munita di una metrica Riemanniana  $g$ , sia  $W$  un campo di vettori unitario in un aperto  $U$  di  $S$  e sia  $W^\perp$  un campo di vettori unitario ortogonale a  $W$ . Sia  $\omega_W(X) = g(W^\perp, \nabla_X W)$ . Non ci mettiamo in coordinate ma usiamo la formula intrinseca per il differenziale

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

da cui

$$\begin{aligned} d\omega_W(X, Y) &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \\ &= \nabla_X(g(W^\perp, \nabla_Y W)) - \nabla_Y(g(W^\perp, \nabla_X W)) - g(W^\perp, \nabla_{[X, Y]} W) \\ &= g(\nabla_X W^\perp, \nabla_Y W) + g(W^\perp, \nabla_X \nabla_Y W) - g(\nabla_Y W^\perp, \nabla_X W) \\ &\quad - g(W^\perp, \nabla_Y \nabla_X W) - g(W^\perp, \nabla_{[X, Y]} W) \\ &= g(W^\perp, \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W) \\ &\quad + g(\nabla_X W^\perp, \nabla_Y W) - g(\nabla_Y W^\perp, \nabla_X W) \\ &\quad g(W^\perp, \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W) \end{aligned}$$

Ove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che  $\nabla W^\perp$  è ortogonale a  $W^\perp$  e quindi parallelo a  $W$ , mentre  $\nabla W$  è ortogonale a  $W$  e quindi il pezzo  $g(\nabla_X W^\perp, \nabla_Y W) - g(\nabla_Y W^\perp, \nabla_X W)$  è nullo.

**Lemma 8.3.3.** *Il termine  $\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W$  è tensoriale.*

**DIMOSTRAZIONE.** che sia tensoriale in  $X$  e  $Y$  è ovvio per le proprietà della connessione e del commutatore. La tensorialità in  $W$  è presto fatta: per ogni funzione liscia abbiamo

$$\begin{aligned}
& \nabla_X \nabla_Y fW - \nabla_Y \nabla_X fW - \nabla_{[X,Y]} fW \\
&= \nabla_X (Y(f)W + f \nabla_Y W) - \nabla_Y (X(f)W + f \nabla_X W) \\
&\quad - [X, Y](f)W - f \nabla_{[X,Y]} W \\
&= XY(f)W + Y(f) \nabla_X W + X(f) \nabla_Y W + f \nabla_X \nabla_Y W \\
&\quad - YX(f)W - X(f) \nabla_Y W - Y(f) \nabla_X W - f \nabla_Y \nabla_X W \\
&\quad - [X, Y](f)W - f \nabla_{[X,Y]} W \\
&= f(\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W)
\end{aligned}$$

□

**Osservazione 8.3.4.** *Il tensore*

$$g(Z, \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W)$$

non è altro che la versione (0, 4) del tensore (1, 3)

$$\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W.$$

**8.3.3. Il tensore di Riemann.** Forti dei conti appena fatti siamo pronti per definire il Tensore di Riemann o tensore di curvatura o curvatura. Tradizionalmente ciò si fa nella sua versione (1, 3). Si chiama curvatura perchè, come abbiamo detto, per una superficie immersa  $-dk_W$  è esattamente la curvatura di Gauss.

**ATTENZIONE ATTENZIONE** C'è in circolazione un segno meno su cui la letteratura non è concorde. Ossia vi capiterà di trovare libri in cui il tensore di curvatura sia definito come  $dk_W$  e altri in cui è definito come  $-dk_W$  (Per esempio il Petersen ed il Do Carmo usano notazioni opposte.) Basta saperlo e non ci si diventa matti.

**Definizione 8.3.5.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana e sia  $\nabla$  la connessione di Levi-Civita associata a  $g$ . Il tensore di curvatura di Riemann è definito come*

$$R(X, Y)W = \nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X,Y]} W.$$

La versione (0, 4) del Riemann è data da

$$R(X, Y, Z, T) = g(R(X, Y)Z, T)$$

La notazione  $R(X, Y)W$  e non  $R(X, Y, W)$  ha un suo perchè. Ecco:

**8.3.4. Forme a valori fibrati e differenziale covariante come mamma della curvatura.** In primis, si noti che la curvatura misura quanto l'hessiano di  $W$  non sia simmetrico. Aspetta: ma l'hessiano non è sempre stato una roba simmetrica? Passo indietro. Cos'era l'hessiano? Per una funzione era la derivata covariante seconda (ed è simmetrico.) In generale abbiamo visto che la derivata covariante

seconda di un tensore  $S$  (in soldoni, il suo hessiano) è dato da (si veda la (13) a pagina 89)

$$\nabla_{X,Y}^2 S = \nabla_X \nabla_Y S - \nabla_{\nabla_X Y} S$$

per cui se  $S$  è un campo di vettori si ha

$$\nabla_{X,Y}^2 S - \nabla_{Y,X}^2 S = R(X, Y)S$$

Quindi in realtà la nozione di curvatura c'ha senso anche applicata a tensori non solo a campi.

Per i piú curiosi (cioè fuori programma d'esame:) In generale si può formalizzare il tutto come segue.

**Definizione 8.3.6** (Forme a valori in un fibrato). *Sia  $E$  un fibrato vettoriale su  $M$ , una  $p$ -forma su  $M$  a valori in  $E$  è una forma  $C^\infty$ -multilineare alternate da  $(TM)^p$  in  $\Gamma(E)$ . Il modulo delle  $p$ -forme su  $E$  si denota con  $A^p(E)$ .*

Nel caso  $E = TM$ , un elemento di  $A^0(TM)$  non è altro che un campo di vettori, mentre un elemento di  $A^1(TM)$  non è altro che un tensore di tipo  $(1, 1)$ .

Data una connessione, che quindi si legge come  $\nabla : A^0(E) \rightarrow A^1(E)$ , si definisce la differenziazione covariante delle forme usando la formula intrinseca (copiando quella del differenziale usuale per intenderci.) Si veda l'esercizio 3.2.9.

**Definizione 8.3.7.** *L'operatore di differenziazione covariante (che indichiamo ancora con  $\nabla$  giusto per creare un po' di confusione he he he...)  $\nabla : A^p(E) \rightarrow A^{p+1}(E)$  è definito come*

$$\begin{aligned} \nabla \omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \nabla_{X_i} (\omega(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Per il differenziale usuale  $d \circ d = 0$ , per la differenziazione covariante  $\nabla^2$  è la curvatura.

#### 8.4. Lezione 32: Le simmetrie del Riemann

Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana,  $\nabla$  la sua connessione di Levi-Civita ed  $R$  il suo Riemann. Il tensore di Riemann c'ha un fottío di simmetrie (e meno male!) Cominciamo:

##### Antisimmetria in X e Y:

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$$

Questa è immediata dalla definizione.

##### Antisimmetria in Z e T:

$$R(X, Y, Z, T) = -R(X, Y, T, Z)$$

Per questa ci vuole un trucchetto, simile a quello che si usa per determinare una forma bilineare simmetrica a partire dalla forma quadratica. Osserviamo che

$$\begin{aligned} & g(R(X, Y)(Z + W), Z + W) \\ &= g(R(X, Y)Z, Z) + g(R(X, Y)W, W) \\ & \quad + g(R(X, Y)Z, W) + g(R(X, Y)W, Z) \end{aligned}$$

per cui se dimostriamo che  $R(X, Y, T, T) = 0$  per ogni  $T$  siamo a posto. E ora i soliti giochini delle tre carte:

$$g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) = \nabla_X(g(\nabla_Y Z, Z)) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z)$$

e

$$g(\nabla_X Z, Z) = \frac{1}{2} \nabla_X(g(Z, Z))$$

per cui

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= g(R(X, Y)Z, Z) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, Z) \\ &= g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) - g(\nabla_{[X, Y]} Z, Z) \\ &= \nabla_X(g(\nabla_Y Z, Z)) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) \\ & \quad - \nabla_Y(g(\nabla_X Z, Z)) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) \\ & \quad - \frac{1}{2} \nabla_{[X, Y]}(g(Z, Z)) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_X \nabla_Y g(Z, Z) - \nabla_Y \nabla_X g(Z, Z) - \nabla_{[X, Y]} g(Z, Z)) \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_{X, Y}^2(g(Z, Z)) - \nabla_{Y, X}^2(g(Z, Z))) = 0 \end{aligned}$$

perché l'hessiano di funzioni è simmetrico e  $g(Z, Z)$  è una bellissima funzione liscia.

**Prima identità di Bianchi (simmetria alla Jacobi):**

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

Sul Petersen c'è una dimostrazione veramente elegante, qui lo facciamo con le mani perché siamo ghiozzi (ma ricordiamo che la connessione ha torsione nulla:)

$$\begin{aligned} & R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = \\ & \quad \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ & \quad + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X \\ & \quad + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &= \nabla_X[Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Y[Z, X] - \nabla_{[Z, X]} Y + \nabla_Z[X, Y] - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \end{aligned}$$

Dove l'ultima uguaglianza l'avete dimostrata nell'esercizio 3.4.2.

**Simmetria a coppie:**

$$R(X, Y, Z, T) = R(Z, T, X, Y)$$

Per questa si deve giocare con le simmetrie precedenti; da

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
0 &= g(R(X, Y)Z, T) + g(R(Y, Z)X, T) + g(R(Z, X)Y, T) \\
&= g(R(X, Y)Z, T) - g(R(Y, Z)T, X) - g(R(Z, X)T, Y) \\
&= g(R(X, Y)Z, T) + g(R(Z, T)Y, X) + g(R(T, Y)Z, X) \\
&\quad + g(R(X, T)Z, Y) + g(R(T, Z)X, Y) \\
&= g(R(X, Y)Z, T) - 2g(R(Z, T)X, Y) \\
&\quad + g(R(T, Y)Z, X) + g(R(X, T)Z, Y) \\
&= g(R(X, Y)Z, T) - 2g(R(Z, T)X, Y) \\
&\quad - g(R(Y, Z)T, X) - g(R(Z, T)Y, X) - g(R(X, T)Y, Z) \\
&= g(R(X, Y)Z, T) - 2g(R(Z, T)X, Y) \\
&\quad - g(R(Y, Z)T, X) - g(R(Z, T)Y, X) \\
&\quad + g(R(T, Y)X, Z) + g(R(Y, X)T, Z) \\
&= 2g(R(X, Y)Z, T) - 2g(R(Z, T)X, Y) \\
&\quad - g(R(Y, Z)T, X) - g(R(Z, T)Y, X) - g(R(T, Y)Z, X) \\
&= 2g(R(X, Y)Z, T) - 2g(R(Z, T)X, Y)
\end{aligned}$$

**Seconda identità di Bianchi:**

$$(\nabla_X R)(Y, Z)T + (\nabla_Y R)(Z, X)T + (\nabla_Z R)(X, Y)T = 0$$

Qui si deve solo espandere tutto e vedere che si cancellano tutti i termini. Totale: tre pagine di simboli. Sul Petersen c'è una dimostrazione elegante in poche righe. Noi facciamo i conti, cercando di non farne tre pagine. Usiamo la notazione del commutatore anche per operatori, tipo  $[\nabla_X, R(Y, Z)]T$  significherà  $\nabla_X(R(Y, Z)T) - R(Y, Z)\nabla_X T$ , OK?

Per definizione  $(\nabla_X R)(Y, Z)T$  è dato da

$$\nabla_X(R(Y, Z)T) - R(\nabla_X Y, Z)T - R(Y, \nabla_X Z)T - R(Y, Z)\nabla_X T$$

per cui

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X R)(Y, Z)T + (\nabla_Y R)(Z, X)T + (\nabla_Z R)(X, Y)T \\
&= \nabla_X(R(Y, Z)T) - R(\nabla_X Y, Z)T - R(Y, \nabla_X Z)T - R(Y, Z)\nabla_X T \\
&+ \nabla_Y(R(Z, X)T) - R(\nabla_Y Z, X)T - R(Z, \nabla_Y X)T - R(Z, X)\nabla_Y T \\
&+ \nabla_Z(R(X, Y)T) - R(\nabla_Z X, Y)T - R(X, \nabla_Z Y)T - R(X, Y)\nabla_Z T
\end{aligned}$$

“Raccogliamo” ora la prima e la quarta colonna di questa formula

$$\begin{aligned}
& (\nabla_X R)(Y, Z)T + (\nabla_Y R)(Z, X)T + (\nabla_Z R)(X, Y)T \\
&= [\nabla_X, R(Y, Z)]T + [\nabla_Y, R(Z, X)]T + [\nabla_Z, R(X, Y)]T \\
&\quad - (R([X, Y], Z)T + R(Y, [X, Z])T + R([Y, Z], X)T)
\end{aligned}$$

In termini di operatori dobbiamo mostrare quindi che

$$\begin{aligned}
& [\nabla_X, R(Y, Z)] + [\nabla_Y, R(Z, X)] + [\nabla_Z, R(X, Y)] \\
&= R([X, Y], Z) + R(Y, [X, Z]) + R([Y, Z], X).
\end{aligned}$$

Vediamo il primo termine della prima riga

$$\begin{aligned}
[\nabla_X, R(Y, Z)] &= [\nabla_X, \nabla_Y \nabla_Z - \nabla_Z \nabla_Y - \nabla_{[Y, Z]}] \\
&= [\nabla_X, \nabla_Y \nabla_Z - \nabla_Z \nabla_Y] - [\nabla_X, \nabla_{[Y, Z]}] \\
&= \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z - \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_Z \nabla_X + \nabla_X \nabla_Y \nabla_X - [\nabla_X, \nabla_{[Y, Z]}].
\end{aligned}$$

I 4 termini  $\nabla.\nabla.\nabla.$  si cancellano quando si fa la somma dei termini della prima riga, che quindi si riduce a

$$[\nabla_{[X, Y]}, \nabla_Z] + [\nabla_{[Y, Z]}, \nabla_X] + [\nabla_{[Z, X]}, \nabla_Y].$$

Primo termine della seconda riga:

$$\begin{aligned}
R([X, Y], Z) &= \nabla_{[X, Y]} \nabla_Z - \nabla_Z \nabla_{[X, Y]} - \nabla_{[[X, Y], Z]} \\
&= [\nabla_{[X, Y]}, \nabla_Z] - \nabla_{[[X, Y], Z]}
\end{aligned}$$

Il primo addendo  $[\nabla_{[X, Y]}, \nabla_Z]$  è buono perchè compare nella riduzione della prima riga, il secondo no. Ma i secondi addendi si cancellano per l'identità di Jacobi quando si fa la somma di tutti i pezzi della seconda riga, che quindi risulta uguale alla prima e l'identità è dimostrata in “solo” una pagina di conti.

**Curvatura in secula seculorum: Operatore di curvatura, curvatura sezionale, tensore di Ricci, curvatura scalare, Lemma di Schur, Riemann coi Christoffel. Amen**

Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana.

**9.1. Lezione 33: Operatori di curvatura e curvatura sezionale**

**9.1.1. Lo (gli) operatore(i) di curvatura.** Il tensore di curvatura nella sua versione  $(0, 4)$  data da  $R(X, Y, Z, T)$  si mangia 4 campi e restituisce un numero. Vista l'antisimmetria nelle prime due e nelle ultime due variabili, possiamo interpretarlo come un operatore che si mangia 2 campi di vettori, in modo antisimmetrico e restituisce un tensore  $(0, 2)$  antisimmetrico. Ossia un'operatore

$$\mathfrak{R} : \Gamma(\Lambda^2(TM^*)) \rightarrow \Gamma(\Lambda^2(TM^*))$$

ossia possiamo interpretare la curvatura  $\mathfrak{R}$  come una 2-forma a valori 2-forme, cioè

$$\mathfrak{R} \in A^2(\Lambda^2(TM^*)).$$

**Esercizio 9.1.1.** *Dimostrare che la seconda identità di Bianchi è equivalente a dire che la curvatura è covariantemente esatta:*

$$\nabla \mathfrak{R} = 0$$

(per dimostrarlo occorre ricordarsi bene tutte le definizioni: specialmente quella di differenziazione covariante di forme a valori in fibrati e quella di derivata covariante di tensori.)

È comodo adesso introdurre quelli che i fisici chiamano “bi-vettori”. Non sono altro che la versione  $(2, 0)$  delle 2-forme, quindi elementi (e sezioni) del fibrato  $\Lambda^2(TM)$ . Sullo spazio dei bi-vettori c'è una metrica naturale indotta da quella  $g$  di  $M$ , che continueremo a indicare con la lettera  $g$ , definita da

$$\begin{aligned} g(X \wedge Y, Z \wedge T) &= g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z) \\ &= \det \begin{pmatrix} g(X, Z) & g(X, T) \\ g(Y, Z) & g(Y, T) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

notare che se  $\{e_i\}$  è base ortonormale di  $TM$ , allora i bi-vettori  $e_i \wedge e_j$  costituiscono una base ortonormale dello spazio dei bi-vettori.

Il tensore di curvatura può essere quindi visto come un operatore bilineare simmetrico

$$R : \Gamma(\Lambda^2(TM)) \times \Gamma(\Lambda^2(TM)) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(M)$$

ponendo

$$R(X \wedge Y, Z \wedge T) = R(X, Y, T, Z)$$

OCCHIO!!!!!!! non è un errore di stampa: Storicamente si scrive come qui sopra, con  $T$  e  $Z$  scambiati (se avessimo definito il tensore di curvatura col meno non avremmo dovuto scambiarli.)

L'importante è sapere qual'è il segno giusto delle cose ed essere coerenti con le notazioni usate.

A questo punto possiamo “alzare” una variabile della curvatura come operatore e definire

$$\mathfrak{R} : \Gamma(\Lambda^2(TM)) \rightarrow \Gamma(\Lambda^2(TM))$$

attraverso la formula

$$g(\mathfrak{R}(X \wedge Y), Z \wedge T) = R(X \wedge Y, Z \wedge T) = R(X, Y, T, Z)$$

adesso, sia che avessimo scelto la notazione col  $+$  o col  $-$  nel definire il tensore di Riemann, l'operatore di curvatura sui be-vettori riprende un segno che è univoco in letteratura.

**9.1.2. Curvatura sezionale.** Che roba è. Si potrebbe dire che sia l'analogo bi-dimensionale della curvatura geodetica di una curva. Praticamente si prende un piano bidimensionale nel tangente a un punto, si fa l'esponenziale e si calcola la curvatura della superficie che si ottiene.

Se, nella formula del famoso  $d\omega_W$  scegliamo  $Y = W$  e  $X = W^\perp$  otteniamo

$$d\omega_W(W^\perp, W) = g(W^\perp, R(W^\perp, W)W) = R(W^\perp, W, W, W^\perp)$$

Nel caso della curvatura geodetica dovevamo rinormalizzare per la velocità di parametrizzazione per avere un oggetto intrinseco, qui dobbiamo normalizzare per “l'area del bi-vettore  $W \wedge W^\perp$ ”. Dicamolo ammodino ché siamo matematici:

**Definizione 9.1.2** (Sectional Curvature). *Sia  $p \in M$ . Per ogni coppia di vettori linearmente indipendenti  $v, w \in T_pM$ , la curvatura sezionale  $\text{sec}(v, w)$  è definita da*

$$\text{sec}(v, w) = \frac{R(v, w, w, v)}{g(v, v)g(w, w) - g(v, w)^2} = \frac{g(\mathfrak{R}(v \wedge w), v \wedge w)}{g(v \wedge w, v \wedge w)}$$

e si denota anche con  $\text{sec}(v \wedge w)$ .

Si noti che, siccome  $v, w$  sono linearmente indipendenti, il denominatore è non nullo.

**Lemma 9.1.3** (La sezionale dipende solo dal piano spannato). *Se  $(v, w)$  e  $(x, y)$  sono coppie di vettori in  $T_pM$  che generano lo stesso piano, allora*

$$\sec(v, w) = \sec(x, y).$$

DIMOSTRAZIONE. Essendo normalizzata, per ogni  $a \neq 0$  si ha

$$\sec(v \wedge w) = \sec(a(v \wedge w)).$$

Se  $x, y$  generano lo stesso piano di  $v, w$  allora esistono  $a, b, c, d$  tali che  $x = av + bw$  e  $y = cv + dw$ , il che implica

$$x \wedge y = (ad - bc)v \wedge w$$

e  $ad - bc \neq 0$  perché  $x, y$  generano un piano e sono quindi linearmente indipendenti.  $\square$

Il lemma appena dimostrato ci dice che per ogni piano di  $T_pM$  è ben definito  $\sec(\pi)$  come  $\sec(v, w)$  ove  $(v, w)$  è una qualsiasi base di  $\pi$ .

**Teorema 9.1.4.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana e sia  $p \in M$ . Le seguenti tre condizioni sono equivalenti:*

- (1) *Esiste  $k$  tale che  $\sec(\pi) = k$  per ogni 2-piano  $\pi$  di  $T_pM$ .*
- (2)  *$\mathfrak{R} = k \cdot Id$ , cioè  $\mathfrak{R}(x \wedge y) = k(x \wedge y)$  per ogni  $x, y \in T_pM$ .*
- (3) *Per ogni  $W$  unitario in  $T_pM$  e per ogni  $X \in T_pM$ , il vettore  $R(X, W)W$  è  $k$  per la proiezione di  $X$  sull'iperpiano  $W^\perp$ .*

DIMOSTRAZIONE. Vediamo (1) se e solo se (2). Se  $\mathfrak{R} = k \cdot Id$  allora dalla definizione segue immediatamente che  $\sec(\pi) = k$  per ogni piano. Supponiamo il contrario. È il solito discorso della forma quadratica che determina la forma bilineare. Per le simmetrie del Riemann, la funzione  $g(\mathfrak{R}(v \wedge w), x \wedge y)$  è una forma bilineare simmetrica su  $\Lambda^2(T_pM)$ . Se  $\sec(\pi) = k$  per ogni piano, la forma quadratica associata a  $g(\mathfrak{R}(v \wedge w), x \wedge y)$  è  $kg(v \wedge w, x \wedge y)$  per cui

$$g(\mathfrak{R}(v \wedge w), x \wedge y) = kg(v \wedge w, x \wedge y)$$

per ogni  $v, w, x, y$  da cui  $\mathfrak{R} = k \cdot Id$ .

(1) se e solo (3) si dimostra allo stesso modo. Sia  $W$  unitario. Per ogni  $X$  sia  $B(X) = R(X, W)W$ . La forma bilineare  $g(B(X), Y)$  è simmetrica per cui è determinata dalla sua forma quadratica, che è

$$g(B(X), X) = \sec(X, W)(g(X, X) - g(X, W)^2)$$

(dalla definizione di  $\sec$ .) Se  $P(X)$  indica la proiezione di  $X$  su  $W^\perp$  si ha  $X = P(X) + Wg(X, W)$  da cui

$$g(P(X), P(X)) = g(X, X) - g(X, W)^2$$

dunque

$$g(B(X), X) = \sec(X, W)g(P(X), P(X))$$

da cui, se  $\sec(X, W) = k$ , per ogni  $X, Y$

$$g(B(X), Y) = kg(P(X), P(Y))$$

in particolare, ciò vale per ogni  $Y$  tale che  $Y = P(Y)$  da cui

$$B(X) = kP(X).$$

Viceversa, se per ogni  $W$  unitario e per ogni  $X$  si ha  $X B(X) = kP(X)$ , allora

$$kg(P(X), X) = \sec(X, W)g(P(X), P(X))$$

ma  $X = P(X) + Wg(X, W)$  ed essendo  $P(X)$  ortogonale a  $W$  si ha  $g(P(X), X) = g(P(X), P(X))$  da cui

$$k = \sec(X, W)$$

□

**Definizione 9.1.5.** Una varietà Riemanniana  $(M, g)$  si dice a curvatura costante se esiste una costante  $k$  tale che per ogni punto  $p \in M$  e per ogni piano  $\pi$  di  $T_p M$  si ha  $\sec(\pi) = k$ .

**Esempio 9.1.6.** Lo spazio  $\mathbb{R}^n$  con la metrica Euclidea canonica ha curvatura costante zero. Le sfere  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$  con la metrica indotta hanno curvatura costante 1. Gli spazi iperbolici  $\mathbb{H}^n$  hanno curvatura costante  $-1$ . Se si riscalda la metrica moltiplicandola per  $k$ , la connessione di Levi-Civita non cambia (per Koszul) mentre la curvatura viene divisa per  $k$  (come c'era da aspettarsi pensando alle sfere: sfere piccolissime=curvatura grandissima, sfere giganti=curvatura quasi nulla; infatti la terra sembra piatta vista dalla sua superficie.)

## 9.2. Lezione 34: Curvatura di Ricci e curvatura scalare

**9.2.1. Il Ricci.** Mai sentito parlare di Ricci flow? C'hanno dimostrato la congettura di Poincaré, vinto (e rifiutato) la Medaglia Fields<sup>1</sup> e pure il millennium prize del Clay institute<sup>2</sup>.

Sentirete dire “è come se fosse il laplaciano della metrica” e questa cosa è più un modo di dire che un'espressione matematica precisa (anche se in coordinate normali o armoniche...<sup>3</sup>)

Ma torniamo a bomba. Fissati due dei tre campi  $X, Y, Z$ , il tensore  $R(X, Y)Z$  è di tipo  $(1, 1)$  e quindi (come abbiamo visto per l'hessiano) la sua traccia è un tensore.

**Definizione 9.2.1.** Il tensore di Ricci è la traccia di  $R(\cdot, X)Y$ . Ossia

$$\text{Ric}(X, Y) = \text{tr}(V \mapsto R(V, X)Y)$$

<sup>1</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Fields\\_Medal](http://en.wikipedia.org/wiki/Fields_Medal)

<sup>2</sup><http://www.claymath.org/millennium/>

<sup>3</sup>[http://en.wikipedia.org/wiki/Ricci\\_curvature](http://en.wikipedia.org/wiki/Ricci_curvature)

Come abbiamo già detto, la traccia la si può calcolare nel modo usuale usando una base ortonormale  $e_1, \dots, e_n$ :

$$\begin{aligned} \text{Ric}(X, Y) &= \sum_i g(R(e_i, X)Y, e_i) = \sum_i R(e_i, X, Y, e_i) \\ &= \sum_i R(e_i, Y, X, e_i) = \text{Ric}(Y, X). \end{aligned}$$

Il Ricci risulta quindi essere una sezione del fibrato delle forme bilineari simmetriche e quindi è un tensore della stessa natura della metrica. Alternativamente, visto che

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_i R(X, e_i, e_i, Y) = \sum_i g(R(X, e_i)e_i, Y)$$

se ne può considerare la sua versione  $(1, 1)$ , che risulta quindi

$$\text{Ric}(X) = \sum_i R(X, e_i)e_i$$

(sempre con  $\{e_i\}$  base ortonormale.)

Sentirete anche parlare di varietà “Ricci-positive” e questo si formalizza.

**Definizione 9.2.2.** *Il tensore di ricci si dirà maggiore (minore) di  $k$  se la forma bilineare*

$$\text{Ric}(X, Y) - kg(X, Y)$$

*è definita positiva (negativa).*

Per cui Ricci positivo significa Ricci definito positivo e Ricci negativo significa Ricci definito negativo. Similmente  $\text{Ric} > k$  significa che tutti gli autovalori di  $\text{Ric}(X)$  sono maggiori di  $k$  e via dicendo.

**Definizione 9.2.3.** *Una varietà Riemanniana  $M$  si dice di Einstein se esiste una costante  $k$  tale che*

$$\text{Ric} = kg.$$

*Si dice Ricci-piatta se  $k = 0$ .*

**Teorema 9.2.4.** *Le sezionali determinano il Ricci.*

**DIMOSTRAZIONE.** Al solito, usiamo la forma quadratica  $\text{Ric}(v, v)$ . Possiamo normalizzare  $v$  in modo che sia unitario. Completando  $v$  ad una base ortonormale  $v, e_2, \dots, e_n$  del tangente di  $M$  abbiamo

$$\text{Ric}(v, v) = R(v, v, v, v) + \sum_{i=2}^n R(e_i, v, v, e_i) = \sum_{i=2}^n \text{sec}(v, e_i).$$

□

Cioè  $\text{Ric}(v, v)$  è la somma di tutte le curvatures sezionali di piani “ortonormali” contenenti  $v$ . Ne segue che una varietà a curvatura costante è Einstein.

In realtà è vero di più. Infatti la sezionale non è altro che la forma quadratica (sui bivettori) associata all'operatore di curvatura, che quindi ne è determinato. Cioè **le sezionali determinano il Riemann**.

**Corollario 9.2.5.** *In una varietà di dimensione  $n$ , se in un punto  $p$  tutte le sezionali sono uguali, cioè se  $\sec(\pi) = k$  indipendentemente da  $\pi$  allora*

$$\text{Ric}_p = (n - 1)kg_p.$$

**Teorema 9.2.6.** *In dimensione 2 e 3 il Ricci determina le sezionali. E quindi in dimensione 2 e 3 il Ricci determina il Riemann.*

**DIMOSTRAZIONE.** In dimensione 2 c'è poco da tracciare: c'è un solo piano in circolazione e la sezionale ed il Ricci sono la stessa cosa. In dimensione tre, basta applicare tre volte la formula qui sopra per una base ortonormale  $e_1, e_2, e_3$  di  $T_pM$ :

$$\sec(e_1, e_2) + \sec(e_1, e_3) = \text{Ric}(e_1, e_1)$$

$$\sec(e_2, e_1) + \sec(e_2, e_3) = \text{Ric}(e_2, e_2)$$

$$\sec(e_3, e_1) + \sec(e_3, e_2) = \text{Ric}(e_3, e_3)$$

da cui

$$2 \sec(e_2, e_3) = \text{Ric}(e_2, e_2) + \text{Ric}(e_3, e_3) - \text{Ric}(e_1, e_1)$$

$$2 \sec(e_1, e_3) = \text{Ric}(e_1, e_1) + \text{Ric}(e_3, e_3) - \text{Ric}(e_2, e_2)$$

$$2 \sec(e_1, e_2) = \text{Ric}(e_1, e_1) + \text{Ric}(e_2, e_2) - \text{Ric}(e_3, e_3)$$

□

Dalla dimensione quattro in poi, questo giochino non funziona più perché ci ritroviamo quattro equazioni ma i piani in circolazione sono ben di più.

In particolare, in dimensione tre una varietà è Einstein se e solo se ha curvatura costante.

**9.2.2. Curvatura scalare.** Si chiama scalare perché è un numero (o meglio una funzione su  $M$ .) Siamo partiti da un tensore  $(0, 4)$  e ne abbiamo fatte di tutti i colori, traccie, operatori di tutto. Siamo arrivati al Ricci, non ci rimane che tracciarlo (come tensore  $(1, 1)$ .)

**Definizione 9.2.7.** *La curvatura scalare è la traccia del Ricci*

$$\text{scal} = \text{tr}(\text{Ric}).$$

Per calcolare le tracce, come al solito ci mettiamo in una base ortonormale  $e_1, \dots, e_n$  di  $T_pM$ , per cui

$$\text{scal}(p) = \sum_i g(\text{Ric}(e_i), e_i) = \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_j, e_i) = 2 \sum_{i < j} \sec(e_i, e_j)$$

In oltre, l'insieme  $\{e_i \wedge e_j : i < j\}$  è una base ortonormale dei bivettori. Se indichiamo con  $\mathfrak{R}$  l'operatore di curvatura sui bivettori abbiamo:

$$\begin{aligned} \text{scal}(p) &= \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_j, e_i) = \sum_{i,j} g(\mathfrak{R}(e_i \wedge e_j), e_i \wedge e_j) \\ &= 2 \sum_{i < j} g(\mathfrak{R}(e_i \wedge e_j), e_i \wedge e_j) = 2\text{tr}(\mathfrak{R}) \end{aligned}$$

Per le superfici abbiamo quindi  $\text{scal} = 2\text{sec}$  che in base ortonormale diventa  $2\text{sec} = \text{scal} = \text{tr}(\text{Ric}) = \text{Ric}(e_1, e_1) + \text{Ric}(e_2, e_2)$ . E se siamo in una Einstein con  $\text{Ric} = \varphi g$  allora  $2\text{sec} = \text{scal} = \text{tr}(\text{Ric}) = \varphi \text{tr}(g)$  il ché in coordinate normali diventa  $2\text{sec} = \text{scal} = \varphi \text{tr}(g) = 2\varphi$  per cui  $\text{sec} = \varphi$ .

**Lemma 9.2.8.** *Vale l'uguaglianza:*

$$d \text{scal} = 2 \text{div}(\text{Ric})$$

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome è tutta roba tensoriale, cioè puntuale, ci mettiamo in coordinate normali intorno a un punto  $p$ . Per cui abbiamo  $\nabla \partial_i = 0$  in  $p$  e  $\{\partial_i\}$  base ortonormale di  $T_p M$ . Cosa ci guadagnamo? Primo, che per fare le tracce possiamo usare l'usuale formula col prodotto scalare. Secondo, possiamo mettere le parentesi dove ci pare in scritte come

$$\nabla(S(\partial_1, \dots, \partial_k)) = (\nabla S)(\partial_1, \dots, \partial_k)$$

perché la differenza contiene termini  $\nabla \partial_i$ , che spariscono tutti quando calcolati in  $p$  (occhio che questo trucco vale solo quando c'è in circolazione una derivata sola, quando ce ne sono di più non vale: avere la derivata nulla in un punto è diverso a essere costantemente zero!!!)

Per sapere chi è  $d(\text{scal})$  basta sapere chi è  $d(\text{scal})[v]$  per ogni  $v \in T_p M$ . Sia  $V$  un campo che vale  $v$  in  $p$  e tale che  $\nabla V = 0$  (così spostiamo le parentesi come sopra.)

La seconda identità di Bianchi ci dice

$$(\nabla_V R)(\partial_i, \partial_j)X = (\nabla_{\partial_i})R(V, \partial_j)X + (\nabla_{\partial_j})R(\partial_i, V)X$$

Siamo pronti:

$$\begin{aligned}
d\text{scal}[V]_p &= \nabla_V \left( \sum_i g(\text{Ric}(\partial_i), \partial_i) \right) = \sum_{i,j} \nabla_V (g(R(\partial_i, \partial_j)\partial_j, \partial_i)) \\
&= \sum_{i,j} g(\nabla_V (R(\partial_i, \partial_j)\partial_j), \partial_j) = \sum_{i,j} g((\nabla_V R)(\partial_i, \partial_j)\partial_j, \partial_i) \\
&= \sum_{ij} g((\nabla_{\partial_i} R)(V, \partial_j)\partial_j + (\nabla_{\partial_j} R)(\partial_i, V)\partial_j, \partial_i) \\
&= \sum_{ij} \nabla_{\partial_i} R(V, \partial_j, \partial_j, \partial_i) + \sum_{ij} \nabla_{\partial_j} R(\partial_i, V, \partial_j, \partial_i) \\
&= 2 \sum_{ij} \nabla_{\partial_i} R(V, \partial_j, \partial_j, \partial_i) = 2 \sum_i \nabla_{\partial_i} (g(\text{Ric}(V), \partial_i)) \\
&= 2 \sum_i g(\nabla_{\partial_i} (\text{Ric}(V)), \partial_i) = 2\text{tr}(\nabla \text{Ric}(V))_p = 2 \text{div}(\text{Ric})(V)_p
\end{aligned}$$

□

Grazie di esistere, coordinate normali! Come corollario di questo fatto abbiamo

**Teorema 9.2.9.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana di dimensione  $n$  almeno 3. Allora,  $M$  è localmente Einstein se e solo se lo è globalmente. Cioè, se esiste una funzione  $\varphi$  tale che*

$$\text{Ric} = \varphi g$$

Allora  $\varphi$  è costante.

**DIMOSTRAZIONE.** Da un lato abbiamo

$$d\text{scal} = d(\text{tr Ric}) = d(n\varphi) = nd\varphi.$$

Dall'altro abbiamo, per ogni  $p$  e  $V$  tale che  $\nabla V = 0$  in  $p$ , in coordinate normali in  $p$

$$\begin{aligned}
d\text{scal}_p[V] &= 2 \text{div Ric}(V) = 2 \sum_i g((\nabla_{\partial_i} \text{Ric})(V), \partial_i) \\
&= 2 \sum_i g(\nabla_{\partial_i} (\text{Ric}(V)) - \text{Ric}(\nabla_{\partial_i} V), \partial_i) \\
&= 2 \sum_i g(\nabla_{\partial_i} (\text{Ric}(V)), \partial_i) \\
&= 2 \sum_i g(\nabla_{\partial_i} (\varphi V), \partial_i) = 2 \sum_i g(d\varphi[\partial_i]V + \varphi \nabla_{\partial_i} V, \partial_i) \\
&= 2 \sum_i g(d\varphi[\partial_i]V, \partial_i) = 2 \sum_i g(V, d\varphi[\partial_i]\partial_i) \\
&= 2g(V, \sum_i d\varphi[\partial_i]\partial_i) = 2g(V, \text{grad } \varphi) = 2d\varphi[V]
\end{aligned}$$

Se ne deduce che  $nd\varphi = 2d\varphi$  e quindi se  $n \geq 3$  deve per forza essere  $d\varphi = 0$ .  $\square$

Un'immediato corollario si ottiene osservando che se in ogni punto  $p$  le scalari non dipendono dal punto scelto, allora  $M$  è Einstein:

**Teorema 9.2.10.** *Sia  $M$  una varietà Riemanniana di dimensione  $n$  almeno 3. Se le sezionali  $\text{sec}_p(\pi)$  non dipendono da  $\pi$ , cioè se esiste una funzione  $f$  tale che per ogni  $p \in M$  e per piano  $\pi$  di  $T_pM$  valga*

$$\text{sec}_p(\pi) = f(p)$$

*allora  $M$  è Einstein.*

DIMOSTRAZIONE. Se  $\text{sec}_p(\pi) = f(p)$  allora per 9.2.5

$$\text{Ric}_p = (n-1) \text{sec}_p g = (n-1)f(p)g$$

ed il teorema precedente conclude.  $\square$

Questi ultimi due teoremi vanno sotto in nome di "Lemma di Schur". Notare che l'equazione qui sopra si può riscrivere come  $\text{sec} = \varphi/(n-1)$  ove  $\text{Ric} = \varphi g$ .

**Corollario 9.2.11.** *Se  $M$  è di dimensione almeno 3,  $M$  è Einstein se e solo se*

$$\text{Ric} = \frac{\text{scal}}{n}g$$

*se in oltre  $M$  è a curvatura costante  $k$  si ha*

$$k = \frac{\text{scal}}{n(n-1)}.$$

DIMOSTRAZIONE. Siccome  $\text{scal} = \text{tr}(\text{Ric})$ , se  $\text{Ric} = Cg$  si ha  $\text{scal} = nC$  da cui  $\text{Ric} = \text{scal}g/n$ . Per la seconda uguaglianza basta osservare che se  $M$  è a curvatura costante allora

$$(n-1) \text{sec} g = \text{Ric} = \frac{\text{scal}g}{n}$$

da cui

$$\text{sec} = \frac{\text{scal}}{n(n-1)}$$

$\square$

### 9.3. Lezione 35: La curvatura in coordinate e un po' di equazioncielle bbelle

**9.3.1. Il Riemann in coordinate.** Il Riemann è un tensore  $(1, 3)$  per cui avrà, in coordinate, simboli

$$R^i_{jkl}$$

e nella sua versione  $(0, 4)$

$$R_{ijkl} = R^a_{ijk}g_{al}$$

Il che significa che se  $X = X^i \partial_i, Y = Y^j \partial_j, Z = Z^k \partial_k$  allora

$$R(X, Y)Z = X^i Y^j Z^k R_{ijk}^l \partial_l$$

cioè

$$R(X, Y)Z = \begin{pmatrix} X^i Y^j Z^k R_{ijk}^1 \\ \vdots \\ X^i Y^j Z^k R_{ijk}^l \\ \vdots \\ X^i Y^j Z^k R_{ijk}^n \end{pmatrix}$$

Per gli amanti dei Christoffel, il conto è servito:

$$\begin{aligned} R_{jkl}^i &= dx^i(R(\partial_j, \partial_k)\partial_l) = dx^i(\nabla_j \nabla_k \partial_l - \nabla_k \nabla_j \partial_l - \nabla_{[\partial_j, \partial_k]}\partial_l) \\ &= dx^i(\nabla_j(\Gamma_{kl}^s \partial_s) - \nabla_k(\Gamma_{jl}^s \partial_s)) \\ &= dx^i(\partial_j(\Gamma_{kl}^s)\partial_s + \Gamma_{kl}^s \nabla_j \partial_s - \partial_k(\Gamma_{jl}^s)\partial_s - \Gamma_{jl}^s \nabla_k \partial_s) \\ &= dx^i(\partial_j(\Gamma_{kl}^s)\partial_s + \Gamma_{kl}^s \Gamma_{js}^h \partial_h - \partial_k(\Gamma_{jl}^s)\partial_s - \Gamma_{jl}^s \Gamma_{ks}^h \partial_h) \\ &= \partial_j(\Gamma_{kl}^i) + \Gamma_{kl}^s \Gamma_{js}^i - \partial_k(\Gamma_{jl}^i) - \Gamma_{jl}^s \Gamma_{ks}^i \end{aligned}$$

Siccome i Christoffel dipendono dalle derivate prime della metrica, la curvatura dipende dalle derivate seconde della metrica.

Come la torsione nulla equivale ad avere i Christoffel simmetrici, tutte le simmetrie del Riemann si traducono in simmetrie dei simboli  $R_{jkl}^i$  e  $R_{ijkl}$ :

Antisimmetrie e simmetrie:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk} = R_{jilk} = R_{klij}$$

Bianchi uno:

$$R_{ijk}^h + R_{jki}^h + R_{kij}^h = 0$$

Bianchi due:

$$\partial_i(R_{jklm}) + \partial_j(R_{kilm}) + \partial_k(R_{ijlm}) = 0$$

$$\partial_i(R_{jkm}^l) + \partial_j(R_{kim}^l) + \partial_k(R_{ijm}^l) = 0$$

per dimostrare la seconda identità di bianchi in coordinate si usa il solito trucco: per le robe tensoriali ci si può mettere in coordinate normali e le derivate prime spariscono nel punto. Per cui le parentesi nelle derivate dei tensori le mettiamo, con criterio, un po' come ci pare, quindi

$$\partial_i(R_{jklm}) = \partial_i(g(R(\partial_j, \partial_k)\partial_l, \partial_m)) = g((\nabla_i R)(\partial_j, \partial_k)\partial_l, \partial_m)$$

e la seconda identità di bianchi ora si traduce in quella qui sopra. Per la versione (1, 3), sempre in coordinate normali

$$\partial_i(R_{jkm}^l) = \partial_i(dx^l(R(\partial_j, \partial_k)\partial_m)) = \partial_i g(R(\partial_j, \partial_k)\partial_m, \partial_l) = \partial_i(R_{jklm})$$

Notare che nella versione (2, 2) la seconda identità di Bianchi diventa

$$\partial_i(R_{jk}^{ab}) - \partial_j(R_{ik}^{ab}) + \partial_k(R_{ij}^{ab}) = 0$$

il che ci ridà una dimostrazione che la seconda identità di Bianchi non è altro che  $\nabla \mathfrak{R} = 0$  (qui il simbolo  $\nabla$  indica la differenziazione covariante.)

**9.3.2. Il prodotto di Kulkarni-Nomizu.** Adoro i nomi improbabili.

Dati due tensori  $g, h$  entrambi di tipo  $(0, 2)$  e simmetrici, si definisce il loro prodotto di Kulkarni-Nomizu, che è un tensore  $(0, 4)$ , come

$$g \cdot h(X, Y, Z, T) = g(X, Z)h(Y, T) + g(Y, T)h(X, Z) - g(X, T)h(Y, Z) - g(Y, Z)h(X, T)$$

Sta roba c'ha le stesse simmetrie a coppie del Riemann e può essere utile in qualche conto.

**Lemma 9.3.1.** *M ha curvatura costante k se e solo se*

$$2R = -k(g \cdot g)$$

(ove  $R$  indica il tensore di Riemann e  $gg$  indica il prodotto di Kulkarni-Nomizu della metrica  $g$  con sé stessa.)

DIMOSTRAZIONE. Se  $2R = -k(g \cdot g)$  allora

$$2R(x, y, y, x) = -k(2g(x, y)^2 - 2g(x, x)g(y, y))$$

da cui  $\text{sec} = k$ . Viceversa, se  $\text{sec} = k$  allora

$$g(\mathfrak{R}(x \wedge y), x \wedge y) = R(x, y, y, x) = k(g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2)$$

e come al solito la conoscenza della forma quadratica  $g(\mathfrak{R}(\xi), \xi)$  determina l'operatore  $\mathfrak{R}$  e quindi anche  $R$ .  $\square$

**9.3.3. Immersioni e sommersioni Riemanniane.** Se

$$f : (M, g) \rightarrow (N, h)$$

è una funzione liscia tra due varietà Riemanniane, allora  $f^*(h)$  ha senso come forma bilineare su  $TM$ , anche se le dimensioni di  $M$  ed  $N$  son differenti, ponendo

$$f^*(h)(X, Y) = h(df(X), df(Y))$$

Una tale  $f$  si dice *immersione* Riemanniana o *immersione isometrica* se

$$f^*h = g.$$

Per esempio, una curva liscia in  $M$  parametrizzata per lunghezza d'arco è un'immersione isometrica di  $\mathbb{R}$  in  $M$ .

Ciò è equivalente a dire che localmente,  $g$  è il pull-back della metrica indotta da  $h$  sull'immagine di  $f$ . Ovviamente, siccome una metrica è

definita positiva, se  $f$  è un'immersione allora la dimensione di  $M$  non eccede quella di  $N$ .

Nel caso invece in cui la dimensione di  $M$  sia almeno quella di  $N$ , la  $f$  si dice *summersione* Riemanniana se è una summersione (differenziale surgettivo) e se la restrizione di  $g$  all'ortogonale di  $\ker df$  è  $f^*(h)$ . Cioè se localmente la metrica di  $M$  si spezza come

$$g = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & f^*(h) \end{pmatrix}$$

ove  $k$  è una metrica su  $\ker(df)$ . Per esempio, per la metrica prodotto, le proiezioni sui fattori sono summersioni Riemanniane.

**9.3.4. Equazione di Hamilton-Jacobi.** Il Lemma di Gauss ci dice che le geodetiche emananti da  $x$  sono ortogonali alle sfere di centro  $x$ , per cui se  $f$  denota la funzione "distanza da  $x$ " cioè  $f(y) = d(x, y)$  il gradiente di  $f$  non è altro che il vettore velocità della geodetiche emananti da  $x$  e si ha quindi

$$g(\text{grad } f, \text{grad } f) = 1$$

questa è nota come equazione di Hamilton-Jacobi e una funzione che soddisfa tale uguaglianza è spesso chiamata funzione distanza da chi fa equazioni differenziali.

**Lemma 9.3.2.** *Una funzione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa la Hamilton-Jacobi se e solo se è una summersione Riemanniana.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $W \in \ker(df)^\perp$ . Siccome l'ortogonale a  $\ker f$  è generato da  $\text{grad } f$ , si ha  $W = a \text{grad } f$  e

$$df(W) = g(W, \text{grad } f) = ag(\text{grad } f, \text{grad } f) = a$$

per cui

$$W = df(W) \text{grad } f$$

e quindi

$$g(W, W) = g(df(W) \text{grad } f, df(W) \text{grad } f) = |df(W)|^2$$

cioè la metrica su  $(\ker df)^\perp$  è il pull-back di quella su  $\mathbb{R}$  tramite  $f$ .  $\square$

Ora consideriamo una varietà Riemanniana  $M$  di dimensione  $n$  e mettiamoci, localmente vicino a un punto  $p$ , in coordinate polari  $(\rho, \theta)$ , ove  $\theta$  è una coordinata su  $S^{n-1}$  e  $\rho$  è la funzione distanza da  $p$ . Le sfere  $S_r$  sono le curve di livello della distanza la metrica su  $S_r$  la chiamiamo  $g_r$ . Il lemma di Gauss dice che la metrica è localmente un prodotto  $d\rho \otimes d\rho + g_r$ .

Si noti che  $\partial\rho$  è il vettore unitario normale a  $S_r$ . Eh, si. Chi si è fatto il do Carmo uno comincia a intuire. La seconda forma fondamentale scalare di  $S_r$  non è altro che la proiezione di  $\nabla$  sul normale di  $S_r$  per cui per ogni coppia di campi su  $TS_r$  si ha

$$\Pi_r(X, Y) = g(\nabla_X Y, \partial\rho) = X(g(Y, \partial\rho)) - g(Y, \nabla_X \partial\rho) = -g(Y, \nabla_X \partial\rho)$$

(perché  $Y$  è ortogonale a  $\partial\rho$ .)

Ossia  $\nabla\partial\rho$  — che non è altro che la versione  $(1, 1)$  dell'hessiano di  $\rho$  — ci da la seconda forma fondamentale di  $S_r$ . In letteratura, il gradiente della normale, ossia  $\nabla\partial\rho$  si chiama *shape operator* e il Petersen lo indica con la lettera  $S$ . Noi, per non fare casino con le  $S_r$  e per ricordarci che è il gradiente del normale lo chiamiamo  $N$ :

$$N(X) = \nabla_X \partial\rho.$$

Per cui

$$-\Pi_r(X, Y) = g(N(X), Y).$$

**9.3.5. Equazione della curvatura radiale.** Questa è un'equazione che lega i termini di curvatura “radiali”  $R(X, \partial\rho)\partial\rho$  alle seconda forma fondamentale “tangenziale”  $\Pi_r$  attraverso la formula

$$\nabla_{\partial\rho} N + N^2 = -R(\cdot, \partial\rho)\partial\rho$$

che vale per ogni funzione  $\rho$  che soddisfa la Hamilton-Jacobi, ove  $\partial\rho$  indica il suo gradiente e  $N = \nabla\partial\rho$  è l'hessiano  $(1, 1)$  di  $\rho$  che a sua volta è  $-\Pi_r$ , la seconda forma fondamentale delle superfici di livello  $S_r$  per  $\rho$ .

**Lemma 9.3.3.** *Se  $f$  è una funzione liscia tale che  $g(\text{grad } f, \text{grad } f)$  sia costante su ogni ipersuperficie di livello, allora, per ogni  $X$  ortogonale a  $\text{grad } f$  si ha  $g(\nabla_{\text{grad } f} \text{grad } f, X) = 0$ . Se in oltre  $g(\text{grad } f, \text{grad } f)$  è costante ovunque, in particolare se  $f$  soddisfa la Hamilton-Jacobi, allora le linee di flusso di  $\text{grad } f$  sono geodetiche.*

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} & g(\nabla_{\text{grad } f} \text{grad } f, X) \\ &= \text{Hess}_f(\text{grad } f, X) = \text{Hess}_f(X, \text{grad } f) = g(\nabla_X \text{grad } f, \text{grad } f) \\ &= \frac{1}{2} \nabla_X (g(\text{grad } f, \text{grad } f)) = 0 \end{aligned}$$

e se  $\text{grad } f$  ha modulo costante ovunque, allora il conto appena fatto vale per ogni  $X$ , non solo per i normali a  $\text{grad } f$ , e quindi  $\nabla_{\text{grad } f} \text{grad } f = 0$ .  $\square$

Da cui segue che per ogni  $X \in \Gamma(TS_r)$

$$\begin{aligned} -R(X, \partial\rho)\partial\rho &= R(\partial\rho, X)\partial\rho = \nabla_{\partial\rho} \nabla_X \partial\rho - \nabla_X \nabla_{\partial\rho} \partial\rho - \nabla_{[\partial\rho, X]} \partial\rho \\ &= \nabla_{\partial\rho} \nabla_X \partial\rho - \nabla_{\nabla_{\partial\rho} X - \nabla_X \partial\rho} \partial\rho = \nabla_{\partial\rho} \nabla_X \partial\rho - \nabla_{\nabla_{\partial\rho} X} \partial\rho + \nabla_{\nabla_X \partial\rho} \partial\rho \\ &= \nabla_{\partial\rho} (N(X)) - N(\nabla_{\partial\rho} X) + N(N(X)) \\ &= (\nabla_{\partial\rho} N)(X) + N^2(X) \end{aligned}$$

e l'equazione è dimostrata. Si noti che come al solito, per fare i conti a volte si può sfruttare la tensorialità di  $N$  e scegliere coordinate normali nel punto  $p$  cui siamo interessati in modo che  $\nabla_X \partial\rho = 0$  in  $p$  per cui il termine  $N^2$  sparisce in  $p$  (occhio che siccome  $\nabla Y$  è una

derivazione in  $Y$ , il termine  $\nabla N(X)$  non sparisce anche se  $N(X) = 0$  in  $p$ .) Anche se in genere se  $\rho$  è proprio la distanza da un punto le coordinate polari sono tendenzialmente migliori per i conti.

**9.3.6. Gauss, e Codazzi-Mainardi.** Ok, se quella di prima era l'equazione della curvatura radiale, adesso ci servirà quella tangenziale.

Dove sta il busillis? Consideriamo per esempio un piano orizzontale nello spazio iperbolico  $\mathbb{H}^3 = (\{(x, y, t) : t > 0\}, \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2})$ . La metrica indotta su tale piano è piatta, cioè tutti i suoi tensori di curvatura sono zero, in quanto è un riscaldamento di  $\mathbb{R}^2$ . Ma in  $\mathbb{H}^3$  un piano orizzontale è curvo, e anche parecchio! Allo stesso modo, un piano verticale sarà isometrico a  $\mathbb{H}^2$  e quindi è intrinsecamente curvo, mentre in  $\mathbb{H}^3$ , e cioè estrinsecamente, tale piano è "piatto". Cioè, c'è una bella differenza tra la curvatura di una sottovarietà intrinseca ed estrinseca, ossia la curvatura della metrica indotta e la curvatura della metrica ambiente, anche se si considerano le componenti tangenziali (non vale più il giochino tanto comodo per le connessioni)

Qui bisogna fissare le notazioni e usare i colorini. Come prima ci mettiamo in coordinate polari intorno a un punto o equivalentemente fissiamo una funzione  $\rho$  che soddisfa la Hamilton-Jacobi. Il tensore di curvatura e la connessione sulle superfici di livello  $S_r$  saranno indicati con  $R^r$  e  $\nabla^r$ , mentre la metrica la indichiamo sempre con  $g$  (tanto è la restrizione). Ricordiamoci che  $N(X) = \nabla_X \partial \rho$  è tangente a  $S_r$ . Per cui, se  $X, Y$  sono campi tangenti a  $S_r$  si ha

$$\nabla_X Y = \nabla_X^r Y + \Pi_r(X, Y) \partial_\rho = \nabla_X^r Y - g(N(X), Y) \partial_\rho$$

**Lemma 9.3.4.** *Per ogni  $X, Y, Z \in \Gamma(TS_r)$  vale la formoluzza*

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= R^r(X, Y)Z + \Pi_r(Y, Z)N(X) - \Pi_r(X, Z)N(Y) \\ &\quad - (g((\nabla_X N)(Y) - (\nabla_Y N)(X), Z)) \partial_\rho \end{aligned}$$

ove si noti che la prima riga fornisce la componente tangenziale di  $R(X, Y)Z$  e la seconda quella normale.

**DIMOSTRAZIONE.** Prima di tutto si noti che la componente radiale di  $R(X, Y)Z$  non è altro che

$$g(R(X, Y)Z, \partial_\rho) = R(X, Y, Z, \partial_\rho) = -R(X, Y, \partial_\rho, Z)$$

che quindi è

$$\begin{aligned} &-g(\nabla_X \nabla_Y \partial_\rho - \nabla_Y \nabla_X \partial_\rho - \nabla_{[X, Y]} \partial_\rho, Z) \\ &= -g(\nabla_X(N(Y)) - \nabla_Y(N(X)) - \nabla_{\nabla_X Y} \partial_\rho + \nabla_{\nabla_Y X} \partial_\rho, Z) \\ &= -g((\nabla_X N)(Y) - (\nabla_Y N)(X), Z) \end{aligned}$$

e la seconda riga è fatta. Veniamo alla componente tangenziale. Nel contazzo seguente tutte le volte che incontriamo un termine  $\partial_\rho$  lo raccogliamo senza considerarlo ulteriormente, tanto tutte le componenti radiali si sommano a fare il pezzo che abbiamo appena calcolato.

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\
&= \nabla_X (\nabla_Y^r Z - g(N(Y), Z) \partial_\rho) - \nabla_Y (\nabla_X^r Z - g(N(X), Z) \partial_\rho) \\
&\quad - \nabla_{[X, Y]}^r Z + g(N([X, Y]), Z) \partial_\rho \\
&= \nabla_X \nabla_Y^r Z - \nabla_Y \nabla_X^r Z - \nabla_{[X, Y]}^r Z \\
&\quad - \nabla_X (g(N(Y), Z) \partial_\rho) + \nabla_Y (g(N(X), Z) \partial_\rho) \\
&\quad + \text{termini in } \partial_\rho \\
&= \nabla_X^r \nabla_Y^r Z - g(N(X), \nabla_Y^r Z) \partial_\rho \\
&\quad - \nabla_Y^r \nabla_X^r Z + g(N(Y), \nabla_X^r Z) \partial_\rho - \nabla_{[X, Y]}^r Z \\
&\quad - \nabla_X (g(N(Y), Z) \partial_\rho) + \nabla_Y (g(N(X), Z) \partial_\rho) \\
&\quad + \text{termini in } \partial_\rho \\
&= R^r(X, Y)Z - \nabla_X (g(N(Y), Z) \partial_\rho) + \nabla_Y (g(N(X), Z) \partial_\rho) \\
&\quad + \text{termini in } \partial_\rho \\
&= R^r(X, Y)Z - g(N(Y), Z) N(X) + g(N(X), Z) N(Y) \\
&\quad + \text{termini in } \partial_\rho \\
&= R^r(X, Y)Z + \Pi_r(Y, Z) N(X) - \Pi_r(X, Z) N(Y) \\
&\quad + \text{termini in } \partial_\rho
\end{aligned}$$

□

L'equazione della parte tangenziale riscritta come

$$\begin{aligned}
&R(X, Y, Z, W) \\
&= g_r(R^r(X, Y)Z, W) - \Pi_r(Y, Z) \Pi(X, W) + \Pi_r(X, Z) \Pi(Y, W)
\end{aligned}$$

(ove  $W$  è un campo tangente a  $S_r$ ) prende il nome di equazioni di Gauss (plurale perché in coordinate viene fuori un sistema.) Mentre la parte in  $\partial_\rho$ , cioè la componente normale, riscritta anche lei in versione (0, 4) come

$$R(X, Y, Z, \partial_\rho) = -g((\nabla_X N)(Y) - (\nabla_Y N)(X), Z)$$

o equivalentemente come

$$R(X, Y, Z, \partial_\rho) = -(\nabla_X \Pi)(Y, Z) + (\nabla_Y \Pi)(X, Z)$$

prende il nome di equazioni di Codazzi-Mainardi.

#### 9.4. Lezione 36: Esercitazione

La prima cosa che c'è da fare ora è calcolare un po' di curvature. In  $\mathbb{R}^n$  c'è poco da calcolare: la connessione è il differenziale usuale, i Christoffel son tutti nulli, le derivate commutano, i campi costanti son paralleli e il Riemann è nullo. In  $\mathbb{S}^n$ , la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , è facile vedere che il conto si riconduce a  $\mathbb{S}^2$  e lì si trova che la curvatura è costante ed è 1. In  $\mathbb{H}^n$  le cose funzionano praticamente come per

$\mathbb{S}^n$ . Vediamo in dettaglio i conti in  $\mathbb{H}^n$  e lasciamo quelli su  $\mathbb{S}^n$  come esercizio.

**9.4.1. Geodetiche e curvatura dell'iperbolico.** Ci mettiamo nel modello dell'iperboloide. Sia  $(v, w)$  la forma bilineare simmetrica su  $\mathbb{R}^{n+1}$  di segnatura  $(n, 1)$  definita da

$$((x_0, x_1, \dots, x_n), (y_0, y_1, \dots, y_n)) = -x_0y_0 + \sum_{i=1}^n x_iy_i$$

la cui forma quadratica è

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Lo spazio  $\mathbb{H}^n$  è definito come la “sfera di raggio  $i$ ”

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) : (x, x) = -1, x_0 > 0\}$$

e la metrica  $g$  è la restrizione di  $(\cdot, \cdot)$  al tangente di  $\mathbb{H}^n$ . Si controlla facilmente che  $T_p\mathbb{H}^n = \{x : (x, p) = 0\}$ , cioè il tangente di  $\mathbb{H}^n$  in  $p$  è l'ortogonale a  $p$  secondo  $(\cdot, \cdot)$  (come per le sfere.) Essendo  $p$  un vettore di norma immaginaria —  $(p, p) = -1$  — la restrizione  $g$  di  $(\cdot, \cdot)$  al suo ortogonale è definita positiva in quanto  $(\cdot, \cdot)$  ha segnatura  $(n, 1)$ . Quindi  $\mathbb{H}^n$  così definito è una varietà Riemanniana.

Ora uno si può mettere lí, impazzire di conti, scrivere tutti i  $g_{ij}, \Gamma_{ij}^k, R_{ijk}^s$ , scrivere le equazioni delle geodetiche e risolverle, scrivere la metrica sui bivettori e trovare alla fine che  $\mathbb{H}^n$  ha curvatura costante  $-1$ . Ma troppi conti fanno venire l'orticaria, cerchiamo di farne pochi ma buoni. Primo:

**Esercizio 9.4.1.** *Chi è la connessione di  $\mathbb{H}^n$ ?*

Si usa la Koszul, ovviamente. Ma prima c'è da fare una osservazione. Se dotiamo  $\mathbb{R}^{n+1}$  della forma bilineare  $(\cdot, \cdot)$  il risultato non è una varietà Riemanniana perchè  $(\cdot, \cdot)$  non è un prodotto scalare. Nonostante questo piccolo particolare, la Koszul fatta con la forma  $(\cdot, \cdot)$  definisce lo stesso una connessione. Infatti, nella dimostrazione dell'esistenza e unicità della connessione di Levi-Civita, non abbiamo mai, e dico mai, usato il fatto che la metrica fosse definita positiva, ma solo il fatto che fosse non degenera. E la forma  $(\cdot, \cdot)$  è non degenera alla grande. Quindi su  $\mathbb{R}^{n+1}$  munito di  $(\cdot, \cdot)$  c'è una unica connessione a torsione nulla che rende  $(\cdot, \cdot)$  parallelo. Siccome la derivata usuale di  $\mathbb{R}^{n+1}$  è una tale connessione, è lei. Totale: la connessione di  $\mathbb{R}^{n+1}$  dotato della forma bilineare  $(\cdot, \cdot)$  è la Levi-Civita Euclidea e cioè la derivata usuale.

A questo punto, il conto che abbiamo fatto per dimostrare che se  $N \subset M$  allora la connessione di  $N$  è la proiezione di quella di  $M$  sul tangente di  $N$ , funziona paro paro anche in questo caso (i commutatori di campi non dipendono dalla metrica scelta) ed otteniamo quindi

che se  $X, Y$  sono campi su  $\mathbb{H}^n$ ,  $\nabla_X Y$  si ottiene facendo l'usuale derivata componente per componente in  $\mathbb{R}^{n+1}$  e poi proiettando il risultato, **usando la forma**  $(\cdot, \cdot)$ , sul tangente di  $\mathbb{H}^n$ .

Bene. Adesso ci possiamo chiedere:

**Esercizio 9.4.2.** *Chi sono le geodetiche di  $\mathbb{H}^n$ ?*

Una geodetica deve soddisfare  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ , il ché nel nostro caso significa che  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ , fatto con la derivata usuale di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , sia ortogonale a  $\dot{\gamma}$  rispetto alla forma  $(\cdot, \cdot)$ .

Siccome abbiamo unicità delle geodetiche, dato un punto  $p \in \mathbb{H}^n$  ed un vettore  $v \in T_p \mathbb{H}^n$  esiste una unica geodetica passante per  $p$  con velocità  $v$ .

Riduciamo le dimensioni del problema. In  $\mathbb{R}^{n+1}$  consideriamo il piano  $P$  generato da  $p$  e  $v$ . Sia  $\gamma$  una geodetica in  $H = \mathbb{H}^n \cap P$  passante per  $p$  con velocità  $v$ . Si noti che  $H$  è unidimensionale. Il vettore  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  calcolato con la derivata usuale di  $\mathbb{R}^{n+1}$  non esce da  $P$ . Siccome  $T_p \mathbb{H}^n = p^\perp$ , la proiezione ortogonale su  $T_p \mathbb{H}^n$  di vettori in  $P$  è contenuta in  $P$ . Quindi se  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$  in  $H$ , lo è anche in  $\mathbb{H}^n$  e quindi una curva  $\gamma$  è geodetica in  $\mathbb{H}^n$  se e solo se è contenuta in un piano ed è ivi parametrizzata a velocità costante. Ossia, le geodetiche di  $\mathbb{H}^n$  sono intersezioni di  $\mathbb{H}^n$  con piani.

OK. Per fare i conti aggiungiamo una dimensione considerando l' $\mathbb{R}^3$  generato da  $P$  e  $(1, 0, \dots, 0)$  in modo da lavorare nell'usuale  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$  con  $(\cdot, \cdot)$ , coordinate  $(x_0, x_1, x_2)$  e forma  $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2$ .

Dimostriamo che dato  $p \in \mathbb{H}^2$  e  $v \in T_p \mathbb{H}^2$  unitario, la geodetica per  $p$  con velocità iniziale  $v$ , parametrizzata per lunghezza d'arco è

$$t \mapsto \cosh(t)p + \sinh(t)v.$$

Essendo combinazione lineare di  $p$  e  $v$  è chiaro che  $\gamma(t)$  è contenuta nell'intersezione di  $\mathbb{H}^2$  col piano di  $\mathbb{R}^3$  generato da  $p$  e  $v$ . Intanto vediamo che è una curva in  $\mathbb{H}^2$ :

$$\begin{aligned} & (\gamma(t), \gamma(t)) \\ &= \cosh^2(t)(p, p) + \sinh^2(t)(v, v) + 2 \cosh(t) \sinh(t)(p, v) \\ &= -\cosh^2(t) + \sinh^2(t) = -1 \end{aligned}$$

OK. Adesso vediamo che è parametrizzata per lunghezza d'arco:

$$\begin{aligned} & g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = (\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \\ &= (\sinh(t)p + \cosh(t)v, \sinh(t)p + \cosh(t)v) \\ &= \sinh^2(t)(p, p) + \cosh^2(t)(v, v) + 2 \sinh(t) \cosh(t)(p, v) \\ &= \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1 \end{aligned}$$

OK. Per quanto detto sopra basta. Ma rivediamo direttamente a mano che  $\gamma$  è geodetica. Siccome è parametrizzata per lunghezza d'arco,  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  è ortogonale a  $\dot{\gamma}$ , bisogna quindi controllare che se  $w(t)$  è un vettore

non nullo tangente a  $T_{\gamma(t)}\mathbb{H}^2$  e normale a  $\dot{\gamma}$ , si ha  $g(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t), w(t)) = 0$ . Osserviamo che se  $w$  è un vettore non nullo di  $\mathbb{R}^3$ , ortogonale secondo  $(\cdot, \cdot)$  al piano generato da  $p$  e  $v$ , allora  $w$  sarà sempre ortogonale, sempre secondo  $(\cdot, \cdot)$ , sia a  $\gamma(t)$  che a  $\dot{\gamma}(t)$ . Ne segue che possiamo considerare il campo  $w(t) = w$  che è costante e non dipende da  $t$ . Per cui  $\nabla_{\dot{\gamma}}w = 0$  e

$$g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, w) = \dot{\gamma}(\dot{\gamma}, w) - (\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}w) = 0.$$

Notate che il fatto di esserci messi in  $\mathbb{R}^3$  non ci è servito a nulla se non psicologicamente. Tutti i conti fatti valgono infatti in generale per cui dato  $p \in \mathbb{H}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  e  $v \in T_p\mathbb{H}^n$  unitario, la geodetica per  $p$  con velocità  $v$  è  $p \cosh t + v \sinh t$ .

Possiamo adesso finalmente rispondere alla domanda:

**Esercizio 9.4.3.** *Che roba è la curvatura di  $\mathbb{H}^n$ ?*

Sappiamo che quello che dobbiamo calcolare sono le curvature sezionali. Siccome le geodetiche di  $\mathbb{H}^n$  sono le intersezioni di  $\mathbb{H}^n$  con piani di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , per calcolare la sezionale del piano generato da  $v, w \in T_p\mathbb{H}^n$ , basta restringerci all'intersezione di  $\mathbb{H}^n$  con lo spazio tridimensionale generato da  $p, v, w$ . Cioè possiamo fare il conto su  $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^3$ , come prima.

Dobbiamo calcolare

$$\frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

per cui dobbiamo ammaestrare il termine di curvatura

$$g(\nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X, Y]} X)$$

senza impazzire, sapendo che abbiamo piena libertà nella scelta di  $X, Y$ . Un termine che ci vogliamo subito togliere di torno è quello col commutatore, che sparisce se  $X, Y$  sono campi coordinati. Dopo di ché, se ci mettiamo in coordinate in cui  $Y$  è il tangente a geodetiche il termine  $\nabla_Y Y$  se ne va. Any suggestion? Proviamo con le coordinate polari. Cioè consideriamo l'esponenziale in  $p = (1, 0, 0)$ . Avremo quindi le geodetiche uscenti da  $p$  a velocità unitarie che ci daranno il campo  $Y$ . E poi abbiamo il parametro  $\theta$ . La geodetica con angolo  $\theta$  sarà

$$\gamma_\theta(t) = (\cosh t, \sinh t \cos \theta, \sinh t \sin \theta)$$

$$Y_\theta(t) = \dot{\gamma}_\theta(t) = \sinh t(1, 0, 0) + \cosh t(0, \cos \theta, \sin \theta)$$

e  $Y_{\theta,t} = \dot{\gamma}_\theta(t)$  ove la derivata è intesa in  $t$ . Adesso dobbiamo sistemare il campo  $X$ . Ovviamente, vogliamo che sia  $X = \partial_\theta$ , quindi  $X_{\theta,t}$  sarà un multiplo di  $(0, -\sin \theta, \cos \theta)$ . Quale multiplo? Se mettiamo semplicemente  $X = (0, -\sin \theta, \cos \theta)$  è facile vedere che le linee di flusso non si chiudono, cioè  $X$  non è  $\partial_\theta$ . Andiamo con ordine. Se  $\theta$  varia su  $[0, 2\pi)$ , allora al tempo  $t$  il parametro  $\theta$  descrive la circonferenza

$$(\cosh t, \sinh t \cos \theta, \sinh t \sin \theta)$$

Cioè la circonferenza ad altezza  $\cosh t$  di raggio quadrato  $\cosh^2 t - 1 = \sinh^2 t$  (come deve essere visto che  $\mathbb{H}^2$  è il luogo dei punti per cui  $x_1^2 + x_2^2 = x_0^2 - 1$ .)

Per cui

$$X = \partial_\theta = \sinh t(0, -\sin \theta, \cos \theta).$$

A questo punto possiamo fare il conto

$$\begin{aligned} & g(R(X, Y)Y, X) \\ = & g(\nabla_X \nabla_Y Y - \nabla_Y \nabla_X Y - \nabla_{[X, Y]} Y, X) = -g(\nabla_Y \nabla_X Y, X) \\ & = -Y(g(\nabla_X Y, X)) + g(\nabla_X Y, \nabla_Y X) \\ & = -Y(g(\nabla_Y X, X)) + g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) \end{aligned}$$

Il termine  $\nabla_Y X$  non è altro che la derivata in  $t$  di  $X$  che quindi è

$$\cosh t(0, -\sin \theta, \cos \theta)$$

che è già tangente a  $\mathbb{H}^2$  e quindi non c'è bisogno di proiettarcelo. Per cui abbiamo

$$\begin{aligned} & g(R(X, Y)Y, X) = \\ -Y(\sinh t \cosh t) + \cosh^2 t & = -\cosh^2 t - \sinh^2 t + \cosh^2 t = -\sinh^2 t \end{aligned}$$

e

$$\sec(X \wedge Y)_{\theta, t} = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} = \frac{-\sinh^2 t}{\sinh^2 t} = -1$$

e quindi le sezionali di  $\mathbb{H}^n$  son tutte  $-1$ .

**Esercizio 9.4.4.** Generalizzare quanto fatto al caso in cui  $(\cdot, \cdot)$  sia una qualsiasi forma quadratica definita positiva o di segnatura  $(n, 1)$ , calcolando tutte le curvatures di ellissoidi e iperboloidi anche non simmetrici.

**9.4.2. Curvatura di tubi a diametro variabile e di superfici.**

Adesso generalizziamo il conto fatto per  $\mathbb{H}^2$  e vediamo che quello che abbiamo fatto non è altro che rifare i conti del teorema di Gauss e dell'equazione radiale della curvatura (ossia: il tutto poteva essere fatto in poche righe he he he...)

Mettiamoci su un tubo  $S^1 \times \mathbb{R}$  con parametro  $\theta \in (0, 2\pi]$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Consideriamo la metrica

$$dt^2 + \varphi^2(t)d\theta.$$

Che roba è? è un cilindro in cui la circonferenza a livello  $t$  è lunga  $2\pi\varphi(t)$ .

Il campo  $Y = \partial_t$  è unitario e le sue linee di flusso son geodetiche per lunghezza d'arco. Il campo  $X = \partial_\theta$  si comporta come nel coticino fatto or ora per  $\mathbb{H}^2$ . Per cui

$$\begin{aligned} g(X, X) &= \varphi^2(t) \\ \nabla_Y X &= \frac{\dot{\varphi}}{\varphi} X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)Y, X) &= -Y(g(\nabla_Y X, X)) + g(\nabla_Y X, \nabla_Y X) \\ &= -Y(\dot{\varphi}\varphi) + \dot{\varphi}^2 = -\dot{\varphi}^2 - \ddot{\varphi}\varphi + \dot{\varphi}^2 = -\ddot{\varphi}\varphi \end{aligned}$$

e

$$\sec(\theta, t) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} = \frac{-\ddot{\varphi}\varphi}{\varphi^2} = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$$

Lo stesso conto vale se  $\varphi$  dipende anche da  $\theta$ , ottenendo

$$\sec(\theta, t) = -\frac{1}{\varphi(\theta, t)} \frac{\partial^2 \varphi(\theta, t)}{\partial t}$$

D'altra parte, siccome la funzione  $t$  soddisfa la Hamilton-Jacobi, l'equazione della curvatura radiale ci dice che

$$\nabla_t N + N^2 = -R(\cdot, \partial_t)\partial_t.$$

Nel nostro caso

$$N(X) = \nabla_X \partial_t = \nabla_X Y = \nabla_Y X$$

e

$$N(Y) = \nabla_Y Y = 0.$$

Siccome  $Y$  è unitario,  $N(X) = \nabla_X Y$  è normale a  $Y$  e quindi ha solo la componente lungo  $X$ . Essendo  $\frac{X}{|X|}, Y$  una base ortonormale, e  $N(X) = \nabla_X \text{grad } t$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \text{div}(\text{grad } t) = \text{tr}(\nabla(\text{grad } t)) = \text{tr}(N) \\ &= g(N(\frac{X}{|X|}), \frac{X}{|X|}) + g(N(Y), Y) = g(N(\frac{X}{|X|}), \frac{X}{|X|}) \end{aligned}$$

Per cui abbiamo

$$N(X) = X\Delta(t)$$

e

$$\begin{aligned} (\nabla_Y N)(X) &= \nabla_Y(N(X)) - N(\nabla_Y X) \\ &= \nabla_Y(X\Delta(t)) - N(N(X)) = \Delta(t)\nabla_Y X + X \cdot Y(\Delta(t)) - N^2(X) \\ &= ((\Delta t)^2 + \frac{\partial \Delta t}{\partial t})X - N^2(X) \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} -g(R(X, Y)Y, X) &= g((\nabla_Y N)(X) + N^2(X), X) \\ &= g(X, X)((\Delta t)^2 + \frac{\partial \Delta t}{\partial t}) \end{aligned}$$

da cui

$$-\sec(\theta, t) = (\Delta t)^2 + \partial_t(\Delta t)$$

Tornando al conto con  $ds^2 = dt^2 + \varphi(\theta, t)^2 d\theta^2$ , abbiamo  $\Delta t = \text{tr}(N)$  ed abbiamo visto che

$$\nabla_Y X = N(X) = X \text{tr}(N).$$

Per cui

$$\varphi^2 \text{tr}(N) = g(X, X) \text{tr}(N) = g(\nabla_Y X, X) = \frac{1}{2} \partial_t (g(X, X)) = \dot{\varphi} \varphi$$

ove  $\dot{\varphi}$  sta per  $\partial\varphi/\partial t$  per cui

$$\Delta t = \text{tr}(N) = \frac{\dot{\varphi}}{\varphi}$$

e quindi

$$-\text{sec}_{(\theta, t)} = \frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^2} + \frac{\ddot{\varphi}\varphi - \dot{\varphi}^2}{\varphi^2} = \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$$

come doveva essere in quanto non abbiamo fatto altro che fare gli stessi conti di prima con un formalismo diverso.

Però questa volta abbiamo imparato una cosa nuova. Su una superficie, la curvatura è data dal laplaciano della distanza. Ossia, se su una superficie consideriamo vicino a un punto  $x$  la funzione  $d(p) = d(p, x)$ , allora la sezione in  $p$  è data da

$$\text{sec}_p = -(\Delta d)^2 - \partial_\rho(\Delta d)$$

ove  $\partial_\rho$  indica il vettore unitario tangente alla geodetica che parte da  $x$  e arriva in  $p$ . Si noti che questa espressione non dipende da  $x$ !!! E ci dice per esempio che se la distanza è una funzione armonica allora la curvatura è zero.

**9.4.3. Tasso di crescita delle circonferenze.** Vi ricordate il cono? Ecco, il conto che abbiamo fatto ci dice che su una superficie, in coordinate polari intorno a un punto  $p$ , con metrica  $d\rho^2 + \varphi^2 d\theta^2$  si ha

$$\text{sec}(\rho, \theta) = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}.$$

Se per esempio la curvatura è costante  $k$  si ha

$$-k\varphi = \ddot{\varphi}$$

Per cui, essendo  $\varphi(0) = 0$  perché siano le cose lisce,

$$\varphi = C(e^{\sqrt{-k}t} - e^{-\sqrt{-k}t})$$

che è  $\sin(\sqrt{|k|}t)$  o  $\sinh(\sqrt{|k|}t)$  a seconda che  $k$  sia positivo o negativo.

Siccome la lunghezza della circonferenza di raggio  $r$  è

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) d\theta$$

abbiamo

$$\text{sec} = -\frac{\ddot{L}(r)}{L(r)}$$

e in generale anche se  $\text{sec}$  non è costante si ha

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ddot{L}(r)}{L(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int \ddot{\varphi} d\theta}{\int \varphi d\theta} = - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int \text{sec} \varphi}{\int \varphi} = - \text{sec}(p)$$

e, se la funzione  $L(r)$  si annulla in zero di ordine  $n$ , si ha

$$-\sec(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ddot{L}(r)}{L(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ddot{L}(r)r^n}{L(r)r^n} = \frac{L^{(n+2)}(0)}{L^{(n)}(0)}.$$

Nel caso vero di varietà (non quindi metriche costruite ad hoc che possono essere singolari in  $p$ ) si ha  $L(r) \sim 2\pi r$  al prim'ordine e quindi

$$-\sec(p) = \frac{\ddot{L}(0)}{2\pi}.$$

Ma torniamo al caso di curvatura costante. Nel piano iperbolico, quindi  $k = -1$  si ha

$$L(r) = 2\pi \sinh r$$

Cioè le circonferenze di raggio  $r$  sono lunghe esponenzialmente in  $r$ .

Mentre invece se  $S$  ha curvatura positiva, allora

$$L(r) = 2\pi \sin r.$$

Cioè per  $r = \pi$  si ha  $L(r) = 0$ . Cosa? Eh sì, supponendo che tutto rimanga liscio, le palle di raggio  $r$  prima crescono e poi si strizzano. Ed infatti questo succede sulla sfera, ma a quanto pare anche su tutte le varietà a curvatura positiva...

Concludiamo con un'ultima osservazione: Dalla formula  $\ddot{\varphi} = -\varphi \sec$  segue che l'esistenza di bound (cioè di limiti) sulla curvatura, per esempio tipo  $a < \sec < b$ , implica dei bound sull'andamento delle palle di raggio  $r$  (e vice versa.)

**9.4.4. Il Teorema Egregium e la differenza tra sezione intrinseca ed estrinseca.** L'osservazione egregia di Gauss fu che la curvatura di Gauss di una superficie in  $\mathbb{R}^3$  Euclideo dipende solo dalla metrica indotta su  $S$ , cioè è intrinseca. Noi abbiamo detto che la famosa forma  $-d\omega_W$  era la curvatura di Gauss e cioè il determinante della seconda forma fondamentale. Il conto in coordinate va fatto una volta nella vita, ma adesso vediamo come lo possiamo riottenere usando le equazioni di Gauss.

Sia  $S$  una superficie in  $\mathbb{R}^3$  dotato della metrica Euclidea. Localmente, la funzione "distanza da  $S$ " è liscia e soddisfa l'equazione di Hamilton-Jacobi. Ossia  $S$  è localmente un'insieme di livello di una funzione distanza. Per cui per  $p \in S$ , in una base ortonormale di  $T_p\mathbb{R}^3$  fatta da  $X, Y \in T_pS$  e il normale ad  $S$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \sec_p(S) &= R^S(X, Y, Y, X) \\ &= R^{\mathbb{R}^3}(X, Y, Y, X) + \Pi_p(Y, Y)\Pi(X, X) - \Pi(X, Y)\Pi(Y, X) \\ &= 0 + \det \Pi \end{aligned}$$

Ove abbiam messo in evidenza lo zero che viene dal termine Euclideo  $R^{\mathbb{R}^3}(X, Y, Y, X)$  perchè questa formula vale in generale: la curvatura sezionale **intrinseca** di una ipersuperficie è la curvatura sezionale

di  $S$  **immersa** + il determinante della seconda forma fondamentale.  
Se  $p \in S \subset M$  è una ipersuperficie allora

$$\sec_p^S = \sec_p^M + \det \Pi$$

Per cui per esempio cose che ereditano metriche piatte da  $\mathbb{H}^3$  hanno curvatura 1 dentro  $\mathbb{H}^3$ .

## Curvatura e topologia

### 10.1. Lezione 37: Variazione seconda di Lunghezza ed Energia e Campi di Jacobi

Abbiamo visto come la curvatura sia legata alla variazione seconda della lunghezza delle circonferenzine intorno a un punto. Vediamo adesso come entra nelle formule di variazione seconda di energia e lunghezza.

Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana e sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una geodetica. Sia  $\sigma : [a, b] \times [0, \varepsilon] \rightarrow M$  una variazione di  $\gamma$  (quindi  $\gamma(t) = \sigma(t, 0)$ .) Chiamiamo  $t$  il parametro in  $[a, b]$  ed  $s$  quello in  $[0, \varepsilon]$ ; poniamo  $T = d\sigma(\partial_t)$  ed  $S = d\sigma(\partial_s)$  (per cui  $\dot{\gamma}(t) = T(t, 0)$ .)

**10.1.1. Variazione seconda dell'energia.** Poniamo

$$E(s) = \frac{1}{2} \int_a^b g(T, T) dt$$

e ci proponiamo di calcolare

$$\frac{\partial^2(E(s))}{\partial s^2} \Big|_{s=0}.$$

Derivata prima:

$$\frac{\partial(E(s))}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b \frac{1}{2} g(T, T) dt = \int_a^b g(\nabla_S T, T) dt = \int_a^b g(\nabla_T S, T) dt$$

Derivata seconda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(E(s))}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \int_a^b g(\nabla_T S, T) dt \\ &= \int_a^b g(\nabla_S \nabla_T S, T) + g(\nabla_T S, \nabla_S T) dt \\ &= \int_a^b g(\nabla_S \nabla_T S, T) + g(\nabla_T S, \nabla_T S) dt \\ &= \int_a^b R(S, T, S, T) + g(\nabla_T \nabla_S S, T) + g(\nabla_T S, \nabla_T S) dt \\ &= \int_a^b R(S, T, S, T) + \partial_t(g(\nabla_S S, T)) - g(\nabla_S S, \nabla_T T) + g(\nabla_T S, \nabla_T S) dt \end{aligned}$$

Calcolando per  $s = 0$  il termine  $\nabla_T T$  sparisce perchè  $\gamma$  è geodetica ed otteniamo

$$\frac{\partial^2(E(s))}{\partial s^2}\Big|_{s=0} = \int_a^b R(S, T, S, T) + g(\nabla_T S, \nabla_T S) dt + g(\nabla_S S, T)\Big|_a^b.$$

Perfetto. Adesso giochiamo un po' con questa formuletta. Primo, il termine estemale  $g(\nabla_S S, T)\Big|_a^b$  lo buttiamo via ogni volta che  $\gamma$  è una geodetica chiusa, oppure richiedendo che le curve descritte dalla variazione degli estremi di  $\gamma$  siano geodetiche (ovvero  $\nabla_S S = 0$  in  $a$  e in  $b$ .)

Spippoliamo un po' sul pezzo che rimane in tal caso:

$$\int_a^b R(S, T, S, T) + g(\nabla_T S, \nabla_T S) dt$$

La prima osservazione è che c'è di mezzo la curvatura. La seconda è che il secondo pezzo è positivo. Riscriviamolo così

$$\int_a^b -R(S, T, T, S) + g(\nabla_T S, \nabla_T S) dt$$

ricordate che per la sezionale bisogna scambiare gli ultimi due vero? Per cui se la sezionale del piano  $S \wedge T$  è negativa lungo  $\gamma$  l'integrando è positivo. Ma questo discorso lo analizziamo meglio dopo quando calcoleremo la derivata seconda della lunghezza.

Un'altra osservazione facile è che se  $S$  è parallelo il secondo pezzo sparisce e rimane solo il termine di curvatura. Ma questo non è spippolare. Spippolare significa fare questo:

$$\begin{aligned} & \int_a^b -R(S, T, T, S) + g(\nabla_T S, \nabla_T S) dt = \\ &= \int_a^b -R(S, T, T, S) + \nabla_T(g(\nabla_T S, S)) - g(\nabla_T \nabla_T S, S) dt \\ &= - \int_a^b g(R(S, T)T + \nabla_T \nabla_T S, S) dt + g(\nabla_T S, S)\Big|_a^b \end{aligned}$$

Adesso abbiamo un termine estemale del tipo  $g(\dot{S}, S)$  ove abbiamo usato il puntino perché se uno è un fisico  $\nabla_T$  è la derivata rispetto al tempo. E poi c'è il termine integrando, che pare un troiaio e invece è bellissimissimo! Infatti...

**10.1.2. Campi di Jacobi.** Continuando lo spippolamento si ottiene

$$\nabla_T \nabla_T S + R(S, T)T = \nabla_T \nabla_S T + \nabla_S \nabla_T T - \nabla_T \nabla_S T - \nabla_{[S, T]} T = \nabla_S \nabla_T T$$

ma  $\nabla_T T$  è nullo per  $s = 0$  perchè  $\gamma$  è geodetica, per cui

$$\nabla_S \nabla_T T = 0 \text{ se e solo se } \nabla_T T = 0 \text{ sempre}$$

e cioè se tutte le curve

$$\gamma_s(t) : t \mapsto \sigma(t, s)$$

son geodetiche! Tale variazione si chiama variazione per geodetiche, ed in tal caso si ha

$$\frac{\partial^2(E(s))}{\partial s^2} \Big|_{s=0} = g(\nabla_T S, S) \Big|_a^b + g(\nabla_S S, T) \Big|_a^b.$$

**Definizione 10.1.1** (Jacobi vector field). *Un campo  $J$  lungo  $\gamma$  si chiama di Jacobi se soddisfa*

$$\ddot{J} + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0.$$

Quindi campo di Jacobi lungo geodetiche  $\leftrightarrow$  variazione per geodetiche.

Ora, visto che i campi di Jacobi si portano dentro informazioni sulla curvatura, sarà ben possibile ricavarne qualcosa!

**Lemma 10.1.2.** *Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una geodetica. I campi di Jacobi lungo  $\gamma$  sono uno spazio vettoriale di dimensione doppia rispetto a  $M$ . Un campo di Jacobi  $J$  è univocamente determinato da  $J(a)$  e  $\dot{J}(a)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** L'equazione che determina un Jacobi è lineare quindi le soluzioni costituiscono uno spazio vettoriale. Siccome  $J$  è di Jacobi, è dato da una variazione per geodetiche, ma una geodetica è completamente determinata dalla sua velocità iniziale. Se  $J(a) = 0$  e la geodetica  $\gamma_s(t)$  è data da  $\exp(tv_s)$ , il campo  $J$  è univocamente determinato dal vettore  $\dot{v}_s$  (ove il puntino indica derivata in  $s$ .)

Esplicitamente, se  $J(a) = 0$

$$\gamma_s(t) = \exp_{\gamma(a)}(t(\dot{\gamma}(a) + s\dot{J}(a)))$$

per cui se anche  $\dot{J}(a) = 0$  allora  $J = 0$ . □

**Corollario 10.1.3.** *Localmente un campo  $J$  è determinato dai suoi valori iniziali e finali.*

**DIMOSTRAZIONE.** Questo è perchè localmente c'è unicità di geodetiche che congiungono due punti. □

**Esercizio 10.1.4.** *Scrivere esplicitamente i campi di Jacobi in ognuno degli spazi  $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$ .*

In coordinate polari intorno a un punto  $p$ , il campo  $\partial_\theta$  (con  $\theta$  una coordinata di  $\mathbb{S}^{n-1}$  se  $M$  ha dimensione  $n$ ) è un campo di Jacobi perchè i raggi son geodetici. Siccome localmente le geodetiche sono i raggi, i campi di Jacobi localmente li chiappo tutti cosí. Quindi

$$L_{\partial_\rho} J = [J, \partial_\rho] = 0$$

e questa è infatti un'altra possibile definizione di campo di Jacobi.

Torniamo alla curvatura. Mettiamoci su una superficie, localmente in coordinate polari abbiamo

$$ds^2 = d\rho^2 + \varphi(\rho, \theta)d\theta^2$$

Fissiamo un raggio  $\gamma$  a  $\theta$  fissato e sia  $X$  un campo di vettori unitario, parallelo lungo  $\gamma$  e ortogonale a  $\gamma$ . Per il lemma di Gauss  $\partial_\theta$  è un multiplo di  $X$  lungo  $\gamma$  e in particolare si ha

$$\partial_\theta = \varphi(\rho, \theta)X$$

Essendo  $\theta$  di Jacobi e siccome  $X$  è parallelo si ha

$$-R(\partial_\theta, \partial_\rho)\partial_\rho = \nabla_\rho \nabla_\rho \partial_\theta = \frac{\partial^2 \varphi(\rho, \theta)}{\partial \rho^2} X$$

e quindi

$$-\sec_{(\rho, \theta)} = \frac{g(R(\partial_\theta, \partial_\rho)\partial_\rho, \partial_\theta)}{g(\partial_\theta, \partial_\theta)} = \frac{g(\ddot{\varphi}X, \varphi X)}{\varphi^2} = \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$$

come già abbiamo visto altre due volte.

**10.1.3. Variazione seconda della lunghezza.** Il conto è piú o meno come quello per l'energia. Poniamo

$$L(s) = \int_a^b \sqrt{g(T, T)} dt$$

e ci proponiamo di calcolare

$$\frac{\partial^2(L(s))}{\partial s^2} \Big|_{s=0}.$$

Siccome alla prima derivazione il termine con la radice quadrata vien di sotto e rompe le scatole, scegliamo delle parametrizzazioni decenti. Primo, invece di parametrizzare con  $[a, b]$  parametrizziamo con  $[0, 1]$ . Secondo, scegliamo una variazione per geodetiche, così avremo  $S$  di Jacobi e

$$\|T\| = \sqrt{g(T, T)} = L(s).$$

Derivata prima:

$$\frac{\partial(L(s))}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^1 \sqrt{g(T, T)} dt = \int_0^1 \frac{g(\nabla_s T, T)}{\sqrt{g(T, T)}} dt = \int_0^1 \frac{g(\nabla_T S, T)}{\sqrt{g(T, T)}} dt$$

Derivata seconda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2(L(s))}{\partial s^2} &= \frac{\partial}{\partial s} \int_0^1 \frac{g(\nabla_T S, T)}{\sqrt{g(T, T)}} dt \\
&= \int \frac{g(\nabla_S \nabla_T S, T) + g(\nabla_T S, \nabla_S T)}{L(s)} - \frac{g(\nabla_T S, T)g(\nabla_T S, T)}{L(s)^3} dt \\
&= \frac{1}{L(s)} \int R(S, T, S, T) + g(\nabla_T \nabla_S S, T) + \|\nabla_T S\|^2 - g(\nabla_T S, \frac{T}{\|T\|})^2 dt \\
&= \frac{1}{L(s)} \int R(S, T, S, T) + \nabla_T g(\nabla_S S, T) + \|\nabla_T S\|^2 - g(\nabla_T S, \frac{T}{\|T\|})^2 dt \\
&= \frac{1}{L(s)} \int R(S, T, S, T) + \|\nabla_T S\|^2 - g(\nabla_T S, \frac{T}{\|T\|})^2 dt \\
&\quad + g(\nabla_S S, \frac{T}{\|T\|})|_0^1
\end{aligned}$$

Adesso, il termine estremale

$$+g(\nabla_S S, \frac{T}{\|T\|})|_0^1$$

sappiamo come togliercelo di mezzo: basta chiedere che le curve “laterali”  $\sigma(0, s)$  e  $\sigma(1, s)$  siano geodetiche, in modo da avere  $\nabla_S S = 0$  agli estremi. Oppure consideriamo curve chiuse. Vediamo il resto. Il termine

$$\|\nabla_T S\|^2 - g(\nabla_T S, \frac{T}{\|T\|})^2$$

Questo numero è la norma quadrata della componente normale di  $\nabla_T S$ . Ma siccome  $S$  è di Jacobi, per il Lemma 10.1.2, la componente normale di  $S$  è ancora Jacobi e quindi la derivata della componente normale coincide con la componente normale della derivata. Quindi, se chiamiamo  $\widehat{S}$  la componente di  $S$  normale a  $T$ , abbiamo

$$\|\nabla_T S\|^2 - g(\nabla_T S, \frac{T}{\|T\|})^2 = \|\nabla_T \widehat{S}\|^2$$

In totale abbiamo

$$\frac{\partial^2(L(s))}{\partial s^2} \Big|_{s=0} = \frac{1}{L(0)} \int_0^1 -R(S, T, T, S) + \|\nabla_T \widehat{S}\|^2 dt + g(\nabla_S S, \frac{T}{\|T\|})|_0^1$$

e quindi se  $L = L = (0)$  denota lunghezza di  $\gamma$ , riparametrizzando il tutto con  $\gamma$  per lunghezza d’arco considerando tutte le normalizzazioni del caso, con geodetiche laterali abbiamo

$$(17) \quad \ddot{L}(0) = \int_0^L -\sec(S \wedge T) \|\widehat{S}\|^2 + \|\nabla_T \widehat{S}\|^2 dt$$

**Esercizio 10.1.5.** *Dimostrare che l’ultima formula è giusta (cioè verificare tutte le normalizzazioni del caso.)*

Questa formula ci dice subito una cosa: Se la curvatura è negativa allora  $\ddot{L}$  è positivo. E questo vale anche se la variazione non è per geodetiche (il fatto che ci sia  $\|\nabla_T S\|^2$  o  $\|\nabla_T \widehat{S}\|^2$  non cambia nulla.)

### 10.2. Lezione 38: Geodetiche in curvatura negativa e Teorema di Hadamard-Cartan

Quindi, mettiamoci in curvatura negativa. Se  $p = \gamma(0)$  e  $q = \gamma(L)$  abbiamo  $L = d(p, q)$ , almeno localmente. La formula della variazione seconda della lunghezza ci dice quindi che quando  $p$  e  $q$  si muovono lungo geodetiche (le geodetiche laterali) la funzione  $d(p, q)$  è strettamente convessa. Anche se  $p$  sta fermo. In curvatura negativa la distanza è convessa. Cosa che abbiamo già visto mille volte per le superfici ( $\sec = -\ddot{\varphi}/\varphi$ .)

Adesso facciamo un passo in avanti. Consideriamo curve chiuse. La formula della variazione prima della lunghezza e dell'energia ci dice che se  $\gamma$  è un punto critico della lunghezza allora è geodetica. Ma se siamo in curvatura negativa, la formula (17) ci dice che la lunghezza ha un minimo in  $\gamma$ . Totale, in curvatura negativa le geodetiche non possono essere massimi della lunghezza.

Questo giochino è una roba standard. Si chiama principio del massimo e si usa a randa in equazioni differenziali: Se una funzione ha hessiano positivo nei punti critici, c'ha al massimo minimi. Ok è standard ma serve saper fare bene i conti di tipo variazionale (regolarità etc...) per poterlo usare.

Vediamo una manifestazione tipica di questo fenomeno.

**Teorema 10.2.1.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana compatta con tutte le sezioni negative. Allora in ogni classe di omotopia libera di curve chiuse non contrattili c'è un'unica geodetica.*

Questo è un teorema. La dimostrazione si può fare in tanti modi diversi e richiede vari passi. Cerchiamo di farlo nel modo più indolore possibile, minimizzando il numero di nozioni necessarie.

Primo passo, l'esistenza. Questo è facile. Sia  $[c]$  la classe di omotopia libera di una curva omotopicamente non banale. Si prende una successione  $\gamma_n$  di curve in  $[c]$  minimizzante la lunghezza, ossia tali che  $L(\gamma_n) \rightarrow \inf\{L(\gamma) : \gamma \in [c]\}$ . A meno di rimpiazzare  $\gamma_n$  con una spezzata geodetica a tratti (il che non ne aumenta la lunghezza) possiamo supporre che le  $\gamma_n$  siano lipschitziane con costante di lipschitz indipendente da  $n$ . Siccome  $M$  è compatta il teorema di Ascoli-Arzelà ci dice che  $\gamma_n$  ammette un limite  $\gamma_0$ . Siccome una varietà è localmente diffeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , il limite  $\gamma_0$  è omotopo a  $\gamma_n$  per  $n$  sufficientemente grande e quindi a  $c$ . In oltre, tutte le curve vicine a  $\gamma_0$  sono più lunghe di  $\gamma_0$  perchè altrimenti la successione  $\gamma_n$  non sarebbe minimizzante. Quindi  $\gamma_0$  è minimo della lunghezza per perturbazioni locali e quindi è una geodetica (vedere capitolo 7.)

Per l'unicità. Serve un po' di lavoro.

**Lemma 10.2.2.** *In curvatura non positiva, un campo di Jacobi lungo una geodetica è completamente determinato dai suoi valori agli estremi.*

DIMOSTRAZIONE. Localmente, abbiamo visto che è sempre vero. Sia  $\gamma$  una geodetica e  $J$  un campo di Jacobi lungo  $\gamma$ . Basta dimostrare che se  $J$  è nullo agli estremi allora è nullo sempre.

Sia

$$\varphi(t) = g(J(t), J(t)).$$

Abbiamo

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= 2\nabla_{\dot{\gamma}}(g(J, \nabla_{\dot{\gamma}}J)) = 2g(\nabla_{\dot{\gamma}}J, \nabla_{\dot{\gamma}}J) + 2g(\nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}J, J) \\ &= 2\|\dot{J}\|^2 - 2R(J, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, J) \end{aligned}$$

che, se la curvatura è non positiva, è positivo. Quindi  $\varphi$  è una funzione positiva, convessa e nulla agli estremi. Quindi è sempre nulla e quindi  $J = 0$   $\square$

Un corollario immediato è:

**Corollario 10.2.3.** *In curvatura negativa non esistono variazioni per geodetiche a estremi fissi.*

DIMOSTRAZIONE. Se ne esistesse una avremmo un campo di Jacobi non nullo a estremi nulli.  $\square$

**Corollario 10.2.4.** *Se  $M$  ha curvatura non positiva, allora dati comunque  $p, q \in M$  esiste al più un numero finito di geodetiche tra  $p$  e  $q$  che realizzano la distanza.*

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo  $p$  e  $q$  e sia  $\gamma_n$  una successione di geodetiche distinte che realizzano la distanza tra  $p$  e  $q$ , tutte parametrizzate per lunghezza d'arco su  $[a, b]$  con  $\gamma_n(a) = p$ . Sia  $v_n = \dot{\gamma}_n(a)$ . La geodetica  $\gamma_n$  è completamente determinata da  $v_n$ , che è unitario; precisamente  $\gamma_n(t) = \exp_p(v_n t)$ . Siccome  $v_n$  è unitario e la sfera unitaria è compatta, a meno di sotto successioni  $v_n$  ha un limite  $v$ . Ne segue che, a meno di sottosuccessioni,  $\gamma_n(t) \rightarrow \gamma(t) = \exp_p(vt)$ . Se i  $v_n$  fossero in numero infinito, potremmo sceglierne una sottosuccessione che converga a  $v$  in modo tangente ad una curva liscia  $\alpha$  della sfera unitaria di  $T_p M$  con  $\alpha(0) = v$  e  $\dot{\alpha}(0) \neq 0$ . In altre parole, in modo che  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n - v}{\|v_n - v\|} = \dot{\alpha}(0) \neq 0$ . Ciò implicherebbe l'esistenza di tempi  $s_n$  tali che

$$\|v_n - \alpha(s_n)\|/s_n \rightarrow 0.$$

La variazione per geodetiche data da  $(t, s) \rightarrow \exp_p t\alpha(s)$  fornirebbe quindi un campo di Jacobi lungo  $\gamma$ , non nullo perchè  $\dot{\alpha}(0) \neq 0$ . Ma in tal caso il teorema di dipendenza dai dati iniziali delle equazioni differenziali fornisce una costante tale che

$$d(\exp_p b v_n, \exp_p b \alpha(s_n)) < C \|v_n - \alpha(s_n)\|$$

da cui

$$\begin{aligned} \|J(\gamma(b))\| &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d(\exp_p(b\alpha(s)), q)}{s} = \lim_{t_n \rightarrow 0} \frac{d(\exp_p(b\alpha(t_n)), \exp_p(bv_n))}{t_n} \\ &\leq \lim_{t_n \rightarrow 0} \frac{C\|v_n - \alpha(t_n)\|}{t_n} = 0 \end{aligned}$$

Il ch  contraddirebbe il Lemma 10.2.2. Quindi i  $v_n$  sono in numero finito e cos  le  $\gamma_n$ .  $\square$

Veniamo all'unicit . Supponiamo che esistano  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  geodetiche differenti in  $[c]$ , parametrizzate entrambe con  $s \in S^1$  (non necessariamente a velocit  unitaria.)

Sia  $\eta_s$  una geodetica minima (cio  che realizza la distanza) tra  $\gamma_0(s)$  e  $\gamma_1(s)$ .

Se  $(s, t) \rightarrow \eta_s(t)$  fosse liscia, sarebbe una variazione per geodetiche (con geodetiche laterali  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ ) e la formula (17), insieme all'ipotesi di curvatura negativa, ci direbbe che la lunghezza di  $\eta_s$  avrebbe derivata seconda strettamente positiva ovunque e quindi non potrebbe avere un massimo su  $S^1$ , cosa che d'altronde dovrebbe avere se fosse continua. Per finire dobbiamo quindi "solo" dimostrare che  $\eta_s(t)$  sia effettivamente liscia.

**Lemma 10.2.5.** *Sia  $(M, g)$  una variet  Riemanniana con curvature sezionali non positive. Allora per ogni  $p \in M$  l'esponenziale  $T_pM \rightarrow M$    un diffeomorfismo locale in ogni punto di  $T_pM$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Sappiamo che   vero localmente, cio  per vettori piccoli di  $T_pM$ , va visto globalmente. Sia  $f : T_pM \rightarrow M$  la mappa esponenziale. In coordinate polari su  $T_pM$  abbiamo visto che se  $\theta_1, \dots, \theta_{n-1}$  sono coordinate di  $S^{n-1}$  (ove  $n$    la dimensione di  $M$ ) allora i  $df[\partial_{\theta_i}]$  sono una base per tutti i campi di Jacobi lungo i raggi uscenti da  $p$  in  $M$  e nulli in  $p$ . Se l'esponenziale non fosse un diffeo locale allora da qualche parte  $df$  avrebbe un nucleo non banale, siccome  $df[\partial_p]$  non   mai nullo (ha norma uno) allora dovrebbe esistere  $v \in S^{n-1}$  con  $df[\partial v] = 0$  il ch  fornirebbe un campo di Jacobi in  $M$  non nullo e nullo agli estremi. Impossibile se  $M$  ha curvatura non negativa.  $\square$

**Teorema 10.2.6** (Hadamard-Cartan). *Sia  $(M, g)$  una variet  Riemanniana completa e connessa con curvature sezionali non positive. Allora per ogni  $p$  l'esponenziale  $T_pM \rightarrow M$    un rivestimento.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome non tutti sanno cos'  un rivestimento, questo non   programma d'esame. Per gli altri:   facile vedere che  $T_pM$  col pull-back della metrica di  $M$    una variet  completa. Sia  $p \in M$ . Per ogni  $x$  esiste una geodetica che unisce  $x$  a  $p$  perch   $M$    completa. Sia  $x \in M$  e sia  $\gamma : [0, 1) \rightarrow M$  un cammino rettificabile emanante da  $x$ . Sia  $z \in T_pM$  un punto tale che  $\exp_p(z) = x$ . Siccome  $\exp_p$    un diffeo locale, il cammino  $\gamma$  si pu  sollevare in modo unico

vicino a  $z$ . Sia  $\tau$  il sup dei tempi per cui  $\gamma|_{[0,t]}$  si solleva in modo unico. Siccome  $\gamma$  è rettificabile, se  $\tau < 1$  allora  $\gamma|_{[0,\tau]}$  ha lunghezza finita, per cui anche il suo sollevamento. Ne segue che  $\gamma$  si solleva in modo unico fino a  $\tau$  compreso. Per connessione di  $[0, 1)$ , tutto  $\gamma$  si solleva in modo unico. Se  $\gamma$  non è rettificabile, lo si approssima con rettificabili e la proprietà del sollevamento dei cammini è dimostrata perchè  $\exp$  è un diffeo locale. Quindi  $\exp$  è un rivestimento.  $\square$

**Corollario 10.2.7.** *Se  $M$  è semplicemente connessa ed ha curvatura non negativa, allora per ogni coppia di punti  $p, q$  esiste una unica geodetica che li connette.*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $M$  è semplicemente connessa, allora è isometrica a  $T_p M$  con la metrica pull-back ed il lemma di Gauss conclude.  $\square$

Con questi teoremi in mano siamo pronti a concludere. Intanto, chi è  $\eta_s$ ? Abbiamo detto che tra  $\gamma_0(s)$  e  $\gamma_1(1)$  ci sono un numero finito di geodetiche minime ma ce ne possono essere tranquillamente 64. Ne va scelta una per ogni  $s$  in modo che  $\eta_s(t)$  sia liscia in  $s$  e  $t$ . Non abbiamo ancora usato l'ipotesi che  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  sono omotope, è ora di farlo. Sia  $h : S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$  un'omotopia tra  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ . Dal Corollario 10.2.7 segue che per ogni  $s \in S^1$  esiste una unica geodetica tra  $\gamma_0(s)$  e  $\gamma_1(s)$  che sia omotopa, ad estremi fissi, alla curva

$$t \mapsto h(s, t).$$

Adesso  $\eta_s$  è ben definita. Sia  $v_s$  il vettore tangente iniziale di  $\eta_s$ , ci basta vedere che  $v_s$  è una funzione liscia di  $s$ . Grazie al teorema di Hadamard-Cartan, possiamo generalizzare il Teorema 7.2.16 come segue. Sia  $\pi : TM \rightarrow M$  la proiezione naturale del fibrato tangente di  $M$  su  $M$ .

**Lemma 10.2.8.** *Se  $M$  ha curvatura non positiva, per ogni  $x \in M$  esiste un intorno di  $U$  di  $x$  tale che la mappa*

$$\phi(x, v) = (\pi(x), \exp_{\pi(x)}(v))$$

*sia un diffeomorfismo locale tra  $\pi^{-1}(U) = TU$  e  $U \times M$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La mappa  $\phi$  è liscia per il teorema di dipendenza liscia dai dati iniziali delle soluzioni di problemi di Cauchy. Il differenziale di  $\phi$  nel punto  $(x, v)$  ha la forma

$$d\phi = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ Q & d\exp_{\pi(x)} \end{pmatrix}$$

dove il pezzo  $Q$  come “Quello che gli pare” non conta ai fini dell'invertibilità di  $d\phi$ , che lo è perché  $d\exp_{\pi(x)}$  è invertibile per Hadamard-Cartan.  $\square$

A questo punto basta notare che localmente la curva  $s \mapsto (s, v_s)$  non è altro che  $\phi^{-1}(s, \gamma_1(s))$  e quindi è liscia. Ale'. Fine. Maremma boia.  $\square$

### 10.3. Lezione 39: Teorema di Myers. Superfici Minime.

**10.3.1. Il teorema di Myers.** Anche noto come Bonnet-Myers, dice che le robe curve si richiudono su sé stesse. Curvo qui significa Ricci positivo.

Dunque, avevamo visto che in curvatura positiva le lunghezze delle circonferenze di centro  $p$  e raggio  $r$  hanno andamento sinusoidale e quindi, se continuano ad essere lisce, dopo un po' hanno voglia di collassare. Vediamo come si formalizzano questi conti. Se in curvatura negativa la distanza tra geodetiche era una funzione convessa, uno potrebbe dire "in curvatura negativa sarà concava!" Ecco, se dice così sbaglia. Ma non di tanto. Nella formula della variazione seconda della lunghezza avevamo tra i piedi un termine  $\|\nabla_T \widehat{S}\|^2$  che è positivo e quindi dà noia se uno vuole derivata seconda negativa. Ma con un po' di diplomazia lo si convince a tacere.

**Teorema 10.3.1.** *Se una varietà Riemanniana  $(M, g)$  è completa ed ha curvature sezionali  $> k > 0$ , allora è compatta.*

DIMOSTRAZIONE. Ma un s'era detto Ricci? Vabbeh, aspettate un attimo. Siccome  $M$  è completa ci basta dimostrare che ha diametro finito, ove il diametro di  $M$  è definito come

$$\text{diam}(M) = \sup_{x, y \in M} d(x, y).$$

Siano  $x, y \in M$  e sia  $D$  la loro distanza. Sia  $\gamma : [0, D] \rightarrow M$  una geodetica minima tra  $x$  e  $y$ . Sia  $V_0 \in T_x M$  un vettore ortogonale a  $\dot{\gamma}(0)$  e sia  $V$  il suo trasporto parallelo lungo  $\gamma$ . Sia  $X$  il campo di vettori

$$X = \varphi V$$

con  $\varphi$  liscia tale che  $\varphi(0) = \varphi(D) = 0$ .

Sia  $h$  una variazione di  $\gamma$  a estremi fissi ottenuta integrando  $X$  (una sua qualsiasi estensione.)

Siccome  $X$  è nullo agli estremi, la variazione seconda dell'energia è (formula spippolata)

$$- \int_0^D g(R(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma} + \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} X, X) dt$$

siccome  $V$  è parallelo,  $\nabla_{\dot{\gamma}} X = \dot{\varphi} V$  e quindi

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} X = \ddot{\varphi} V \quad g(R(X, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, X) = \varphi^2 \sec(X \wedge \dot{\gamma}).$$

In totale, la variazione seconda dell'energia viene

$$- \int_0^D \varphi^2 \left( \sec + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} \right) dt$$

ove magicamente ricompare il solito termine  $\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$ .

Siccome  $\gamma$  è una geodetica minima, minimizza la distanza e quindi anche l'energia per cui la derivata seconda dell'energia deve essere positiva. Quindi il termine

$$\int \sec + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$$

deve essere negativo. Se  $\sec$  è positivo, allora  $\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$  deve essere negativo e superare in media  $\sec$ . Questo per ogni  $\varphi$  nulla agli estremi. Scegliamo

$$\varphi(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{D}\right)$$

che è evidentemente nulla in 0 e  $D$ . Si ha

$$\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} = -\frac{\pi^2}{D^2}$$

per cui se  $\sec > k > 0$  si ottiene

$$0 > \int \sec + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} > \int k - \frac{\pi^2}{D^2} = D\left(k - \frac{\pi^2}{D^2}\right)$$

da cui

$$\frac{\pi^2}{D^2} > k \quad D < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$$

□

**Teorema 10.3.2** (Myers, o Bonnet-Myers). *Se  $M$  è una varietà Riemanniana completa con*

$$\text{Ric} > k > 0$$

*allora è compatta.*

**DIMOSTRAZIONE.** Facciamo esattamente lo stesso conto di prima, ma stavolta consideriamo una base ortonormale di  $T_x M$

$$\dot{\gamma}(0), v_2, \dots, v_n$$

(ove  $n$  è la dimensione di  $M$ ) definiamo  $V_i$  come trasporto parallelo di  $v_i$  e poniamo

$$X_i = \varphi V_i.$$

Per ogni  $i = 2, \dots, n$  abbiamo

$$0 > \int \sec(\dot{\gamma} \wedge V_i) + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$$

ma sappiamo che

$$\sum_i \sec(\dot{\gamma}, V_i) = \text{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$$

e  $\text{Ric} > k$  significa  $\text{Ric}(W, W) > kg(W, W)$  per ogni  $W$ , per cui sommando le disugualianze su  $i$  otteniamo

$$0 > \sum_i \int \sec(\dot{\gamma}, V_i) + \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} = \int \text{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + (n-1) \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} > D\left(k + (n-1) \frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}\right)$$

da cui, con  $\varphi = \sin(\frac{\pi t}{D})$

$$k - (n-1)\frac{\pi^2}{D^2} > 0 \quad D < \pi\sqrt{\frac{n-1}{k}}$$

□

Notate che Ricci positivo è un'ipotesi piú debole di sezionali positive (ed infatti la stima sul diametro è un po' peggiore.)

**10.3.2. Superfici minime.** Una superficie minima è quella membrana di bolla di sapone che si crea sul fil di ferro immerso nell'acqua saponata. Affrontare e risolvere (con risposte positive e negative) il problema dell'esistenza di superfici minime è stata una delle grandi sfide della matematica del ventesimo secolo. Ci stanno di mezzo nomi come De Giorgi e Nash (the beautiful mind.)

Essere superficie localmente minima significa essere "tesa" come un elastico e quindi la curvatura c'entrerà di sicuro.

Una sottovarietà  $k$ -dimensionale  $N$  di una varietà Riemanniana  $(M, g)$  si dice localmente *minima* se per ogni  $x \in N$  esiste un intorno  $U$  di  $x$  tale che ogni altra sottovarietà che coincide con  $N$  fuori da  $U$  ha volume ( $k$ -dimensionale) piú grande di  $N$ .

La stessa cosa si può dire in termini variazionali.

**Definizione 10.3.3.** *Sia  $N$  una sottovarietà  $k$ -dimensionale orientata di una varietà  $M$ . Sia  $p \in N$  e sia  $U$  un intorno di  $p$ . Una variazione a supporto in  $U$  di  $N$  è una funzione liscia  $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \rightarrow M$  tale che*

- $\varphi(0, x) = x$ .
- *Esiste un compatto  $K \subset U$  tale che  $\varphi(s, x) = x$  per ogni  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  e  $x \in U \setminus K$ .*

Se  $M$  è dotata di una metrica Riemanniana  $g$ , la forma bilineare simmetrica  $g_s$  su  $U$  è definita come il pull-back di  $g$  sulle sezioni orizzontali. Cioè per ogni  $x \in U$  e vettori  $V, W \in T_x U$

$$g_s(V, W) = g(d\varphi_{(s,x)}(V), d\varphi_{(s,x)}(W)).$$

La forma  $dvol_s$  è definita in coordinate come  $\sqrt{\det g_s} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k$ . Tale forma coincide con la forma di volume  $dvol$  di  $N$  fuori da  $K$ . Se per ogni  $s$ , l'immagine di  $\varphi(s, x)$  è una sottovarietà di  $M$  allora  $g_s$  e  $dvol_s$  non sono altro che la metrica e la forma di volume indotte.

**Definizione 10.3.4.** *Una sottovarietà  $N$  di una varietà Riemanniana  $(M, g)$  si dice localmente minima se per ogni variazione locale di  $N$  a supporto in  $U$  si ha*

$$\int_U dvol_s \geq \int_U dvol = vol(U)$$

si dice *minimale* se è un punto critico della funzione volume:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \int_U dvol_s \right) \Big|_{s=0} = 0.$$

**Esempio 10.3.5.** *Una geodetica è una sottovarietà localmente minima. Ma può non esserlo globalmente (si veda  $S^2$ .)*

Avrete sentito dire che in  $\mathbb{R}^3$  le superfici minime son quelle a curvatura media nulla. La curvatura media era la traccia della seconda forma fondamentale giusto? Ecco, sta roba vale in generale:

**Teorema 10.3.6.** *Una sottovarietà  $N$  di  $M$  è minimale se e solo se la **traccia** della seconda forma fondamentale è nulla.*

DIMOSTRAZIONE. Sia  $n$  la dimensione di  $N$ . C'è poco da fare, bisognerà fare la derivata di qualche determinante. Ricordiamo come si fa. se

$$A = [A_1, \dots, A_n]$$

è una matrice quadrata i cui vettori colonna sono  $A_i$ , per linearità sulle colonne del determinante, derivando si ottiene

$$(\det A)' = \sum_i \det[A_1, \dots, A'_i, \dots, A_n].$$

Sia  $\varphi$  una variazione di  $N$  a supporto in un aperto  $U$  a frontiera regolare. Dobbiamo calcolare

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \int_U dvol_s \right) \Big|_{s=0}$$

Come ormai siamo abituati, portiamo le derivate dentro e fuori dall'integrale come selvaggi:

$$\int_U \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_s(\det g_s)}{\sqrt{\det g_s}} \right) \Big|_{s=0} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_U \frac{1}{2} \frac{\partial_s(\det g_s) \Big|_{s=0}}{\det g_0} dvol$$

Quindi ci dobbiamo preoccupare di calcolare la funzione

$$\frac{1}{2} \frac{\partial_s(\det g_s) \Big|_{s=0}}{\det g_0}$$

in ogni punto  $p$  di  $U$ . Mettiamoci in coordinate normali su  $N$  vicino a  $p$  (sempre siano lodate!) Abbiamo

$$\det g_0(p) = 1$$

e, per la regola della derivata del determinante,

$$\frac{1}{2} \partial_s(\det g_s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_s(g_{ii})$$

Adesso mettiamoci in  $M$ . Siano  $X_i$  i campi  $d\varphi(\partial_i)$  e  $S = d\varphi(\partial_s)$ . Siccome  $\partial_s, \partial_1, \dots, \partial_n$  sono campi coordinati di  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times U$ , possiamo scambiare le derivate. Andiamo avanti

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \partial_s(g_{ii}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \nabla_S g(X_i, X_i) \\
& = \sum_i g(\nabla_S X_i, X_i) = \sum_i g(\nabla_{X_i} S, X_i) \\
& = \sum_i X_i(g(S, X_i)) - \sum_i g(S, \nabla_{X_i} X_i) \\
& = \sum_i X_i(g(S, X_i)) - \sum_i g(S, \nabla_{X_i}^N X_i) + \sum_i g(S, \Pi(X_i, X_i)) \\
& = \sum_i X_i(g(S, X_i)) - \sum_i g(S, \nabla_{X_i}^N X_i) + g(S, \sum_i \Pi(X_i, X_i))
\end{aligned}$$

Essere in coordinate normali su  $N$  significa, oltre a  $g(X_i, X_j) = \delta_{ij}$ , avere  $\nabla X_i = 0$  nel punto  $p$  e nelle direzioni tangenti a  $N$ . Per cui il termine di mezzo sparisce per  $s = 0$ . In oltre, in coordinate normali le tracce e le divergenze si calcolano “as usual” per cui il primo pezzo è la divergenza della proiezione  $S^N$  di  $S$  su  $N$  e l'ultimo è il prodotto di  $S$  con la traccia della seconda forma fondamentale. Quindi

$$\frac{1}{2} \frac{\partial_s(\det g_s)|_{s=0}}{\det g_0} = \operatorname{div}(S^N) + g(S, \operatorname{tr}(\Pi))$$

il bello di sta roba è che abbiamo usato le coordinate normali in  $p$  per calcolarla ma il risultato è intrinseco (non dipende dalle coordinate) Quindi

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \int_U d\operatorname{vol}_s \right) \Big|_{s=0} = \int_U \operatorname{div}(S^N) + g(S, \operatorname{tr}(\Pi)) d\operatorname{vol}$$

Se avete fatto l'esercizio 6.3.18 sapete che

$$\operatorname{div}(X)d\operatorname{vol} = d(i_X d\operatorname{vol})$$

e siccome la variazione è a supporto contenuto in  $U$ , il campo  $S$  è nullo sul bordo di  $U$  e per il teorema di Stokes

$$\int_U \operatorname{div}(X) d\operatorname{vol} = \int_U d(i_{S^N} d\operatorname{vol}) = \int_{\partial U} i_{S^N} d\operatorname{vol} = 0$$

per cui abbiamo la formula per la variazione prima del volume:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \int_U d\operatorname{vol}_s \right) \Big|_{s=0} = \int_U g(S, \operatorname{tr}(\Pi)) d\operatorname{vol}$$

e l'integrando è nullo per ogni  $S$  se e solo se

$$\operatorname{tr}(\Pi) = 0.$$

□

Mi piacciono sti teoremi dove si usa un po' di tutto.

Adesso vediamo che relazione c'è con le geodetiche. Le geodetiche minimizzano la lunghezza, sarà mica che le robe che minimizzano l'area sono quelle totalmente geodetiche?

**Definizione 10.3.7.** *Una sottovarietà  $N$  di una varietà Riemanniana  $M$  si dice totalmente geodetica se ogni geodetica di  $N$  è geodetica anche in  $N$ .*

**Esempio 10.3.8.**  $S^k \subset S^{k+h}$  è totalmente geodetica,  $\mathbb{H}^k \subset \mathbb{H}^{k+h}$  è totalmente geodetica,  $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{k+h}$  è totalmente geodetica (le inclusioni sono quelle naturali.)

Ovviamente se la seconda forma fondamentale di  $N$  è identicamente nulla, allora  $N$  è totalmente geodetica. Vale il viceversa

**Teorema 10.3.9.**  *$N$  è totalmente geodetica se e solo se la sua seconda forma fondamentale è identicamente nulla.*

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo  $N$  totalmente geodetica e calcoliamo

$$\Pi(X, Y).$$

Come al solito ci basta vedere che la forma quadratica associata è identicamente nulla. Si  $X \in T_p N$ ; siccome la seconda forma fondamentale è tensoriale, possiamo estendere  $X$  a un campo come ci pare. Scegliamo la geodetica in  $N$  data da  $\gamma = \exp_p^N tX$  ed estendiamo  $X$  lungo  $\gamma$  con  $\dot{\gamma}$  e poi a  $M$  come ci pare. Siccome  $\gamma$  è geodetica in  $N$ , se  $N$  è totalmente geodetica in  $M$  allora  $\gamma$  è geodetica in  $M$  per cui  $\nabla_{\dot{\gamma}}^M \dot{\gamma} = 0$  quindi

$$\Pi(X, X) = 0.$$

□

Quindi le superfici minimali son di piú di quelle totalmente geodetiche perché traccia nulla non implica essere nulli. Ed infatti le membrane delle bolle di sapone non sono piatte.

Vediamo ora un teoremino bellino, tanto per gradire. Allora, intanto per le ipersuperfici, le equazioni di Gauss ci dicono che

$$\begin{aligned} 0 &= R^M(X, Y, Z, T) - R^N(X, Y, Z, T) = \\ &= -\Pi(Y, Z)\Pi(X, T) + \Pi(X, Z)\Pi(Y, T) \end{aligned}$$

per cui,  $N \subset M$  e fissiamo una base ortonormale  $\nu_1, \dots, \nu_k$  del normale a  $N$  in  $M$ , possiamo scrivere la seconda forma fondamentale di  $N$  in componenti

$$\Pi(X, Y) = \sum_{i=1}^k \Pi_i(X, Y) \nu_i.$$

Poi, per induzione si mostra che vale

$$0 = R^M(X, Y, Z, T) - R^N(X, Y, Z, T) = \sum_{i=1}^k -\Pi_i(Y, Z)\Pi_i(X, T) + \Pi_i(X, Z)\Pi_i(Y, T)$$

a questo punto possiamo dimostrare questo:

**Teorema 10.3.10.** *Sia  $(M, g)$  una varietà Riemanniana di dimensione  $n$  e sia  $N \subset M$  una sottovarietà di codimensione  $k$ , tale che il tensore di curvatura intrinseco ed estrinseco coincidono, cioè tale che per ogni quadrupla di campi  $X, Y, Z, T \in TN$  si ha  $R^M(X, Y, Z, T) = R^N(X, Y, Z, T)$ . Allora  $N$  è minimale se e solo se è totalmente geodetica.*

**DIMOSTRAZIONE.** Inanzitutto notiamo che abbiamo già visto che le curvature intrinseche ed estrinseche possono essere differenti, quindi l'ipotesi di avere  $R^M = R^N$  non è vuota. Per i teoremi qui sopra se  $N$  è totalmente geodetica, allora è minimale sempre. Vediamo il viceversa. Le equazioni di Gauss ci dicono che

$$0 = R^M(X, Y, Z, T) - R^N(X, Y, Z, T) = \sum_{j=1}^k -\Pi_j(Y, Z)\Pi_j(X, T) + \Pi_j(X, Z)\Pi_j(Y, T)$$

Se  $N$  è minimale allora la traccia di  $\Pi$  è nulla. Quindi sono nulle le tracce di tutte le sue componenti  $\Pi_j$ . Ponendo  $X = T$  e tracciando su  $Y = Z = e_i$  in coordinate normali si ottiene

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n -\Pi_j(e_i, e_i)\Pi_j(X, X) + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \Pi_j(X, e_i)\Pi_j(X, e_i) \\ &= \sum_j \sum_i (\Pi_j(X, e_i))^2 \end{aligned}$$

per cui

$$\Pi_j(X, e_i) = 0$$

per ogni  $X$  e  $i, j$  e quindi  $\Pi$  è il tensore nullo, ergo  $N$  è totalmente geodetica.  $\square$

Questo teoremino bellino, o meglio la sua dimostrazione ci dice un'altra cosetta: Abbiamo tracciato roba, il Ricci è in agguato. Supponiamo  $N$  minimale, allora il conto appena fatto ci dice

$$\sum_i R^M(X, e_i, e_i, X) - R^N(X, e_i, e_i, X) = \sum_{i,j} (\Pi_j(X, e_i))^2 \geq 0$$

quindi

$$\text{Ric}^M(X, X) - \text{Ric}^N(X, X) \geq 0$$

come forme quadratiche. Ossia abbiamo il teorema:

**Teorema 10.3.11.** *Se  $N \subset M$  è minimale allora*

$$\text{Ric}^M \geq \text{Ric}^N.$$

In particolare le superfici minimali di  $\mathbb{R}^3$  hanno curvatura negativa (come ci si doveva aspettare intuitivamente.)

Ovviamente non può valere il viceversa perchè se una roba a ricci negativo la perturbo un po' riesco a farla rimanere ricci negativo ma non è più minimale.

Studiando le equazioni di Jacobi, Gauss e Codazzi-Mainardi avevamo visto come il laplaciano entrava tra i piedi tracciando la seconda forma fondamentale. Vediamo in  $\mathbb{R}^n$  cosa vien fuori. Il seguente teorema lo facciamo in codimensione 1 ma vale in codimensione qualsiasi.

**Teorema 10.3.12.** *Sia  $N$  una ipersuperficie di  $\mathbb{R}^n$  con prodotto scalare Euclideo standard  $(\cdot, \cdot)$ . Sia  $V \in \mathbb{R}^n$  e sia  $\varphi$  la funzione  $\varphi(p) = (p, V)$ . Sia  $\nu$  un campo unitario normale a  $N$ . Allora*

$$\Delta^N(\varphi) = \text{tr}(\Pi)(V, \nu)$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione

$$\Delta^N(\varphi) = \text{tr}(\text{grad}^N \varphi).$$

Chi è il gradiente di  $\varphi$ ? È quel vettore  $w$  tangente a  $N$  tale che per ogni  $x$  tangente a  $N$

$$d\varphi(x) = (w, x)$$

chi è  $d\varphi$ ? Siamo in  $\mathbb{R}^n$  quindi

$$d\varphi(x) = (x, V)$$

a uno gli vien voglia di dire che allora  $\text{grad} \varphi = V$  ma c'è il problemino che  $V$  non è tangente a  $N$ . Bisogna prenderne la sua proiezione su  $TN$  per cui

$$\text{grad}^N \varphi = V - (V, \nu)\nu$$

Adesso, ricordiamoci che siamo in  $\mathbb{R}^n$  per cui le derivate son le usuali,

$$\begin{aligned} \nabla^N \text{grad}^N \varphi &= \\ \text{componente lungo } TN \text{ di: } \nabla V - (\nabla V, \nu)\nu - (V, \nabla \nu)\nu - (V, \nu)\nabla \nu &= \\ &= -(V, \nu)\nabla^N \nu \end{aligned}$$

per cui

$$\Delta^N(\varphi) = -(V, \nu)\text{tr}(\nabla^N \nu) = (V, n)\text{tr}(\Pi).$$

□

**Corollario 10.3.13.** *Se  $N \subset \mathbb{R}^n$  è minimale le proiezioni lungo una direzione fissata sono armoniche (con la metrica di  $N$ .) In oltre  $N$  è minimale se e solo se le sue coordinate sono funzioni armoniche (con la metrica di  $N$ .)*

DIMOSTRAZIONE. La prima affermazione segue immediatamente dai teoremi 10.3.6 e 10.3.12. D'altra parte se tutte le coordinate sono armoniche allora

$$0 = \text{tr}(\Pi)(e_i, \nu)$$

per ogni  $i$  e quindi  $\text{tr}(Pi) = 0$  e  $N$  è minimale.  $\square$

Siccome le funzioni armoniche di  $\mathbb{R}$  sono solo quelle lineari, abbiamo appena dimostrato che le rette di  $\mathbb{R}^2$  sono le uniche curve che minimizzano la distanza ha ha ha...

#### 10.4. Lezione 40: Evoluzione di curve nel piano.

Per le curve nel piano Euclideo, essere curva equivale a non essere geodetica, cioè a non essere minimale. La teoria delle evoluzioni per curvatura ha come idea fondamentale che si spingono le cose curve in dentro e si tirano le cose curvate negativamente in fuori, cercando così di ottenere qualcosa di regolare. La cosa si può fare anche intrinsecamente, impostando equazioni differenziali che fanno evolvere la metrica con derivata nel tempo dipendente dalla curvatura. Queste tecniche si sono rivelate parecchio potenti, sia in matematica pura (vedi Ricci flow e Poincaré) che in matematica applicata (per esempio rioscimento di immagini.)

Qui facciamo un esempio facile facile di cosa succede quando si fanno evolvere robe per curvatura. Problemi tecnici che saltano sempre fuori sono esistenza e regolarità delle soluzioni.

Noi qui non ce ne occupiamo e facciamo finta che tutto sia sempre liscio.

Consideriamo una curva parametrizzata per lunghezza d'arco nel piano, per ora con la metrica Euclidea,

$$\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

e supponiamo che sia un embedding liscio, orientato in senso antiorario. Sia  $s \in S^1$  il parametro "spaziale" e  $t$  il tempo su cui impostaremo l'equazione di evoluzione. Sia  $k(s)$  la curvatura geodetica di  $\gamma$  in  $s$ :

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = k\nu |\dot{\gamma}|^2$$

ove  $\nu$  è la normale unitaria interna alla curva, così da avere che  $k > 0$  se  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$  punta dentro la regione racchiusa da  $\gamma$ .

Adesso impostiamo l'equazione di evoluzione per curvatura:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = k\nu.$$

Una soluzione liscia di tale equazione è una variazione

$$\sigma : [0, 1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

tale che  $\sigma(0, s) = \gamma(s)$  e

$$\frac{\partial \sigma(t, s)}{\partial t} = k\nu$$

già, ma chi è  $k$  e chi è  $\nu$ ? Come al solito, per capirci qualcosa bisogna mettere ordine.

Chiamiamo  $T$  il campo  $d\sigma(\partial_t)$  e  $S = d\sigma(\partial_s)$  come d'abitudine. Se chiamiamo  $\gamma_t$  le curve  $\sigma(t, s)$ , abbiamo  $S = \dot{\gamma}_t$ , avendo indicato con  $\dot{\gamma}_t$  la derivata in  $s$  di  $\gamma_t$  (tautologico.)

La normale  $\nu$  sarà la normale unitaria alle curve  $\gamma_t$  col verso scelto in modo che al tempo zero punti dentro  $\gamma$ . Fare la derivata in  $t$  di una quantità significa farne  $\nabla_T$  e l'equazione di evoluzione diventa

$$T = k\nu$$

Ma ancora non dobbiamo avere fretta. Chi è  $k$ ? Bisogna usare la definizione giusta. Per usare la definizione usuale bisogna riparametrizzare  $\gamma_t$  per lunghezza d'arco e poi considerarne la derivata seconda. Se chiamiamo  $\widehat{S}$  il campo  $S$  normalizzato

$$\widehat{S} = \frac{S}{|S|}$$

abbiamo quindi

$$\nabla_{\widehat{S}} \widehat{S} = k\nu$$

che definisce la curvatura a modino. Notate, che essendo  $\nu$  la normale unitaria interna, avremmo potuto definire  $k$  attraverso l'uguaglianza  $\nabla_{\widehat{S}} \nu = -k\widehat{S}$ .

Ora il tutto ha una faccia pulita. Bene, supponiamo di avere una tale soluzione per l'evoluzione per curvatura e vediamo come variano le varie quantità in gioco. La prima cosa che succede è che, anche se  $\gamma_t$  fosse parametrizzata per lunghezza d'arco o a velocità costante, non ci pensa nemmeno lontanamente a rimanere tale durante l'evoluzione. Ossia  $|S|$  varia e come. Ecco, vediamo come. Indichiamo con  $(\cdot, \cdot)$  il prodotto scalare Euclideo standard. Primo, siccome  $(\nu, \nu) = 1$  si ha

$$(\nabla \nu, \nu) = 0$$

questa cosa la useremo un centinaio di volte implicitamente senza stare a ridirlo. Se  $S$  fosse di modulo costante,  $\nabla_S S$  sarebbe il vettore  $|S|^2 k\nu$ . Questa rimane comunque la componente di  $\nabla_S S$  lungo  $\nu$ :

**Fatto 10.4.1.**  $(\nabla_S S, \nu) = |S|^2 k$

$$\begin{aligned} (\nabla_S S, \nu) &= |S|(\nabla_{\widehat{S}} S, \nu) = |S|(\nabla_{\widehat{S}} |S| \widehat{S}, \nu) \\ &= |S|(\widehat{S} \nabla_{\widehat{S}} |S|, \nu) + |S|^2(\nabla_{\widehat{S}} \widehat{S}, \nu) = |S|^2(\nabla_{\widehat{S}} \widehat{S}, \nu) = |S|^2 k. \end{aligned}$$

□

Come abbiamo detto,  $\nabla_S \nu$  non ha componenti lungo  $\nu$  ma solo lungo  $S$ , per cui basta conoscerne la norma per sapere chi è:

**Fatto 10.4.2.**  $(\nabla_S \nu, \nabla_S \nu) = k^2 |S|^2$

$$(\nabla_{\widehat{S}} \nu, \nabla_{\widehat{S}} \nu) = (\nabla_{\widehat{S}} \nu, \widehat{S})^2 = (\nabla_{\widehat{S}}(\widehat{S}, \nu) - (\nu, \nabla_{\widehat{S}} \widehat{S}))^2 = k^2.$$

□

Ok, adesso vediamo come varia la velocità delle curve  $\gamma_t$  (il parametro  $ds$ , direbbe un fisico)

**Fatto 10.4.3.**  $\frac{\partial(|S|^2)}{\partial t} = -2k|S|^2$

$$\begin{aligned} \nabla_T(S, S) &= 2(\nabla_T S, S) = 2(\nabla_S T, S) = 2\nabla_S(T, S) - 2(T, \nabla_S S) \\ &= -2(k\nu, \nabla_S S) = -2k^2 |S|^2. \end{aligned}$$

□

Adesso possiamo partire coi fuochi artificiali. Usiamo le abbreviazioni  $k_t = \nabla_T k$  e  $k_{ss} = \nabla_{\widehat{S}} \nabla_{\widehat{S}} k$  (ricordiamo che  $(\nu, \nabla \nu) = 0$  e quindi anche  $(T, \nabla \nu)$ .) Ale' via:

$$\nabla_T(k(S, S)) = k \nabla_T(S, S) + |S|^2 \nabla_T k = -2k^3 |S|^2 + |S|^2 k_t.$$

Sed etiam

$$\begin{aligned} \nabla_T(k(S, S)) &= \nabla_T(\nabla_S S, \nu) = (\nabla_T \nabla_S S, \nu) + (\nabla_S S, \nabla_T \nu) \\ &= (R(T, S)S, \nu) + (\nabla_S \nabla_T S, \nu) + (\nabla_S S, \nabla_T \nu) \\ &= (\nabla_S \nabla_S T, \nu) + (\nabla_S S, \nabla_T \nu) + 0 \\ &= \nabla_S(\nabla_S T, \nu) - (\nabla_S T, \nabla_S \nu) + (\nabla_S S, \nabla_T \nu) + 0 \\ &= \nabla_S \nabla_S(T, \nu) - (\nabla_S T, \nabla_S \nu) + (\nabla_S S, \nabla_T \nu) + 0 \\ &= \nabla_S \nabla_S k - k(\nabla_S \nu, \nabla_S \nu) + (\nabla_S S, \nabla_T \nu) + 0 \\ &= \nabla_S \nabla_S k - k|S|^2(\nabla_{\widehat{S}} \nu, \nabla_{\widehat{S}} \nu) + (\nabla_S S, \nabla_T \nu) + 0 \\ &= \nabla_S \nabla_S k - k^3 |S|^2 + (\nabla_S S, \nabla_T \nu) + 0 \end{aligned}$$

ove lo zero lo riscriviamo perché viene dal fatto che in  $\mathbb{R}^2$  il termine di curvatura sparisce, ma poi vorremo discutere che succede in curvatura non nulla.

Adesso vogliamo mettere a cuccia il termine

$$(\nabla_S S, \nabla_T \nu)$$

usiamo il fatto che  $\nu$  e  $\widehat{S}$  sono unitari per cui  $\nabla \nu$  è parallelo a  $S$ , mentre  $\nabla \widehat{S}$  lo è a  $\nu$  e quindi sono tra loro ortogonali.

$$\begin{aligned}
(\nabla_S S, \nabla_S \nu) &= (\nabla_S |S| \widehat{S}, \nabla_T \nu) = (\widehat{S} \nabla_S |S|, \nabla_T \nu) + |S| (\nabla_S \widehat{S}, \nabla_T \nu) \\
&= (\nabla_{\widehat{S}} |S|)(S, \nabla_T \nu) = -(\nabla_{\widehat{S}} |S|)(\nabla_T S, \nu) = -(\nabla_{\widehat{S}} |S|)(\nabla_S T, \nu) \\
&= -(\nabla_{\widehat{S}} |S|)(\nabla_S k \nu, \nu) = -(\nabla_{\widehat{S}} |S|) \nabla_S k
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$|S|^2 k_t = \nabla_S \nabla_S k + k^3 |S|^2 - (\nabla_{\widehat{S}} |S|) \nabla_S k + 0$$

Adesso vogliamo far comparire  $k_{ss} = \nabla_{\widehat{S}} \nabla_{\widehat{S}} k$  che rappresenta la derivata seconda della curvatura lungo  $\gamma_t$ , derivata seconda fatta per parametro d'arco.

$$\nabla_S \nabla_S k = |S| \nabla_{\widehat{S}} (|S| \nabla_{\widehat{S}} k) = |S| (\nabla_{\widehat{S}} |S|) \nabla_{\widehat{S}} k + |S|^2 k_{ss}$$

Mettendo tutto insieme abbiamo trovato la formula di evoluzione per la curvatura di  $\gamma_t$ :

**Teorema 10.4.4** (Evoluzione della curvatura).

$$k_t = k_{ss} + k^3 + \frac{0}{|S|^2}$$

Ora possiamo commentare un po' sta formula. Il termine di curvatura non è altro che

$$R(T, \widehat{S}, \widehat{S}, \nu) = k \sec(T \wedge S)$$

per cui in generale avremo

$$k_t = k_{ss} + k(k^2 + \sec)$$

dopo di ché osserviamo che questa formula è bellina nei massimi, minimi e flessi locali della curvatura lungo  $\gamma$ . Per esempio, se siamo il minimo della curvatura lungo  $\gamma_t$  è positivo, nel punto di minimo avremo  $k_{ss} > 0$  e quindi  $k_t > 0$  per cui il minimo sale. Nei flessi della curvatura abbiamo  $k_{ss} = 0$  e quindi l'equazione diventa  $k_t = k^3$ .

In generale, supponendo che ci sia una funzione  $c(t)$  per cui  $k(t, c(t))$  è un punto critico della curvatura lungo  $\gamma_t$ , tipo il massimo o il minimo, si ha

$$\partial_t(k(t, c(t))) = \partial_t k(t, c(t)) + \partial_s(t, c(t)) \dot{c} = \partial_t k$$

ossia la derivata del minimo della curvatura è la derivata della curvatura nel punto di minimo (e così nel massimo.) Questa cosa è non è banale se la funzione  $c$  non è liscia (ch'ha pure un nome, si chiama Hamilton trick.)

Il seguente è un risultato molto difficile, roba per i piú sfegatati, che cito solo per dire dove si va a parare.

**Teorema 10.4.5.** *Se si parte da un embedding, dopo un po' la curva diventa convessa e si strizza su un punto in modo che i riscaldati approssimino dei cerchi tondi.*

Intuitivamente torna:

**Esercizio 10.4.6.** *Dimostrare che l'evoluzione per curvatura sui cerchi è un'omotetia che collassa il cerchio iniziale su un punto.*

Una nota finale. Se  $\sec$  è parecchio negativa, allora  $k_t$  è negativa. Cioè, se dentro alla curva  $\gamma$  ci metto artificialmente parecchia curvatura negativa concentrata da qualche parte, diciamo che ci stacco delle regioni a curvatura  $-\infty$ , l'evoluzione parte e si strizza fiché non trova curvatura negativa, lí comincia a frenare e si spalma su l'involuppo convesso della regione a curvatura negativa. Almeno intuitivamente. Fare i conti è un altro paio di maniche.