

Esercizi d'esame Geo Sup II 2009-2010

nota: tutte le metriche, anche se non esplicitamente richiesto, sono da considerarsi complete.

Esercizio 1. Sia Σ_2 la superficie orientabile di genere due, cioè il bordo di un intorno regolare di una curva a "8" in \mathbb{R}^3 . Scrivere un atlante differenziabile per Σ_2 .

Esercizio 2. Dimostrare che il toro \mathbb{T}^2 non ammette metriche di curvatura strettamente positiva.

Esercizio 3. Dimostrare che ogni toro in \mathbb{R}^3 , con la metrica indotta, ha almeno un punto a curvatura negativa.

Esercizio 4. Sia g una metrica su \mathbb{R}^3 a curvatura strettamente negativa $< k < 0$. Dimostrare che g non ammette geodetiche chiuse non costanti.

Esercizio 5. Scrivere una metrica su \mathbb{R}^2 con curvatura strettamente negativa in ogni punto.

Esercizio 6. Sia $\gamma(t, s)$ l'evoluzione per curvatura del cerchio di centro 0 e raggio 1 in \mathbb{R}^2 . Sia $k_{\max}(t)$ la curvatura massima di $\gamma(t, s)$ al variare di s e sia $\gamma_M = \gamma(t, s)/k_{\max}(t)$. Scrivere l'equazione di evoluzione per γ_M . Qual'è l'intervallo massimo di definizione?

Esercizio 7. Calcolare la curvatura geodetica di una retta a 45° rispetto all'asse x nel modello del semipiano di \mathbb{H}^2 .

Esercizio 8. Calcolare le curvature del grafico della funzione $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x, y) = \sin x \cos y$$

Esercizio 9. Calcolare le curvature della superficie ottenuta per rotazione del grafico della funzione $f(x) = x^4 - x^2 + 1$.

Esercizio 10. Calcolare le curvature di $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

Esercizio 11. Sia \circ il prodotto di Kulkarni-Nomizu. Dimostrare che in dimensione tre si ha:

$$R = \frac{\text{scal}}{12} g \circ g + \left(\text{Ric} - \frac{\text{scal}}{3} g \right) \circ g$$

ove g è la metrica e R è il Riemann.