Note aggiornate il 13 maggio 2024

1. Forme e campi olomorfi su superfici di Riemann

1.1. Forme lineari su $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1.1.1. Una struttura complessa su $\mathbb{R}^2$ è un elemento $J \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ tale che $J^2 = -I$.

Per esempio $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ è la struttura complessa standard di quando si identifica $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$. Nelle coordinate reali di $\mathbb{C}$, J rappresenta la moltiplicazione per i. Infatti quando scriviamo $z = x + iy$ diciamo che il numero complesso $z \in \mathbb{C}$ corrisponde al vettore $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Il numero $iz = ix - y$ corrisponde quindi al vettore $\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Più formalmente, la funzione $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$

$$z(x, y) = x + iy$$

soddisfa $z(J(x, y)) = iz(x, y)$.

Una superficie di Riemann S ha una struttura complessa su ogni piano tangente T_xS data appunto dalla moltiplicazione per i.

Definizione 1.1.2. Una forma lineare su $\mathbb{R}^2$ è un elemento di $\hom(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Una forma lineare su $\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{C}$ è un elemento di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) = \{\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} : \omega \text{ è } \mathbb{R}\text{-lineare}\}$.

Lo spazio $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ma ha pure una struttura naturale di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ data da

$$(\lambda\omega)(v) = \lambda\omega(v)$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$. Si tratta di spazi bidimensionali.

In coordinate canoniche ogni forma corrisponde a una matrice 1×2 a coefficienti complessi, cioè a una matrice riga con due elementi. In coordinate quindi ogni forma è del tipo

$$\omega \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ax + by = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Dunque $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ è isomorfo, come spazio vettoriale complesso, a $\mathbb{C}^2$.

Una base di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ è data dalle forme che corrispondono ai vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$. Tali forme prendono il nome di dx e dy rispettivamente:

Definizione 1.1.3.

La forma dx è defInta da $dx \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$.

La forma dy è defInta da $dy \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y$.

Per esempio, avremo quindi $dx(2,3) = 2$ e $dy(2,3) = 3$.

Con questo formalismo la forma ω data da $\omega(x,y) = ax + by$ non sarà altro che

$$\omega = adx + bdy.$$

Si noti che a, b possono essere numeri complessi. Per esempio è ammessa la forma $2idx + (1-i)dy$.

Una base alternativa di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ è data dalle forme dz e $d\bar{z}$ definite come segue:

$$dz = dx + idy \qquad d\bar{z} = dx - idy$$

esse corrispondono ai vettori $(1,i)$ e $(1,-i)$ rispettivamente (si noti che tali vettori sono una base di $\mathbb{C}^2$).

Notiamo in oltre che dz è proprio al differenziale della funzione $z : \mathbb{R}^2 \to C$. Infatti la funzione z è $\mathbb{R}$-lineare e dunque coincide col suo differenziale. Per cui si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{Diff}(z)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = z\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} &= x + iy = dx\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + idy\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\\ &= (dx + idy)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = dz\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Similmente $d\bar{z}$ è il differenziale della funzione $\bar{z} : \mathbb{R}^2 \to C$ data da $\bar{z}(x,y) = x - iy$.

Un'ultima osservazione prima di procedere. Un elemento di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ si può estendere imponendo la $\mathbb{C}$-linearità a un elemento di $\hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$. Viceversa, dato un elemento di $\hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ considerando la restrizione a $\mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{C}^2$ otteniamo un elemento di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. In altre parole un vettore riga (a, b) a coefficienti complessi può esser moltiplicato sia per un vettore colonna reale che per un vettore colonna complesso, ergo pensato come elemento sia di $\hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ che di $\hom(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$, spazi che risultano quindi isomorfi come spazi vettoriali complessi.

1.2. 1-forme differenziabili su $\mathbb{R}^2$.

Definizione 1.2.1. Una 1-forma differenziabile a valori in $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}^2$ è una funzione liscia $\omega : \mathbb{R}^2 \to \hom_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$.

Se non c'è ambiguità useremo semplicemente *forma* o *forma complessa* per indicare una 1-forma differenziabile a valori in $\mathbb{C}$.

In parole povere una forma complessa è la scelta, per ogni (x, y) di una forma lineare $\omega(x, y)$.

In altre parole ancora, una 1-forma è una cosa del tipo $\omega = adx + bdy$ ove a, b sono funzioni del punto (x, y).

Per esempio, $\omega(x, y) = \cos(x)dx + ie^{x+y}dy$ è una forma complessa su $\mathbb{R}^2$; nel punto $(0, 0)$ vale $dx + idy$, nel punto $(3, -2)$ vale $\cos(3)dx + iedy$.

Definizione 1.2.2. L'insieme delle 1-forme differenziabili su $\mathbb{R}^2$, a valori in $\mathbb{C}$, si denota con $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$.

Esso è un modulo sull'anello delle funzioni $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. Cioè data una forma ω e una funzione f si può moltiplicare ω per f e valgono le usuali proprietà associative e distributive.

Per esempio se $\omega = ydx + (x^2 + y^2)dy$ e $f(x, y) = \cos(x - y)$ si ha

$$f\omega = y\cos(x - y)dx + \cos(x - y)(x^2 + y^2)dy.$$

In oltre, se $V = (V_x, V_y)$ è un campo di vettori (V_x e V_y sono dunque funzioni del punto (x, y)) allora si può calcolare punto per punto ω su V. Se $\omega = adx + bdy$ si avrà

$$\omega(V) = aV_x + bV_y$$

che risulta quindi una funzione del punto (x, y).

Le forme dx e dy possono essere interpretate come forme i cui coefficienti sono costanti e formano una base del modulo $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$. Cioè ogni forma si esprime in modo unico come $\omega = adx + bdy$ con a, b funzioni lisce.

Come prima, anche la coppia

$$dz, d\bar{z}$$

è una base di $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$, cioè ogni forma si esprime in modo unico come combinazione di $dz, d\bar{z}$

$$\omega = fdz + gd\bar{z}$$

I cambi di base sono

$$dz = dx + idy \qquad d\bar{z} = dx - idy$$

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2} \qquad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

Ovviamente i coefficienti dipendono da quale base si è scelta. Per esempio, consideriamo la forma ω che nel punto (x, y) corrisponde alla riga $(\cos x, 2iy)$, essa si esprimerà come

$$\begin{aligned}\omega = \cos x dx + i2ydy &= \cos x\frac{dz + d\bar{z}}{2} + i2y\frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ &= (\frac{\cos x}{2} + y)dz + (\frac{\cos x}{2} - y)d\bar{z}.\end{aligned}$$

La forma dz genera un sotto modulo di $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$, così come $d\bar{z}$.

Definizione 1.2.3. Una 1-forma è detta di tipo $(1, 0)$ se è un multiplo di dz, è detta di tipo $(0, 1)$ se è un multiplo di $d\bar{z}$. Il modulo delle forme di tipo $(1, 0)$ si denota con $\Omega^{(1,0)}(\mathbb{R}^2)$ e quello delle forme di tipo $(0, 1)$ con $\Omega^{(0,1)}(\mathbb{R}^2)$.

Per esempio la forma zdz è di tipo $(1,0)$ e la forma $zd\bar{z}$ è di tipo $(0,1)$.

Ovviamente ci sono forme che non sono ne' di tipo $(1,0)$ ne' di tipo $(0,1)$, per esempio $2dx$, che coincide con $dz + id\bar{z}$ e dunque non è un multiplo ne' di dz ne' di $d\bar{z}$. Il fatto che $dz, d\bar{z}$ sia una base di Ω^1 ci dice che $\Omega^1 = \Omega^{(1,0)} \oplus \Omega^{(0,1)}$.

1.3. **Funzioni e forme olomorfe su $\mathbb{R}^2$.** Consideriamo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ differenziabile in senso reale. Il suo differenziale è un elemento di $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$, in particolare se $v = (v_x, v_y)$ è un vettore,

$$df[v] = \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial y} v_y$$

dunque possiamo scrivere

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Siamo abituati a identificare $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ e trattare le funzioni $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ come funzioni $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, esprimendo la condizione di olomorficità attraverso condizioni sulle derivate parziale delle componenti. Vediamo adesso come tutto ciò si traduce nel linguaggio che abbiamo introdotto.

Su $\mathbb{R}^2$ consideriamo la struttura complessa standard J e la corrispondenza $z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ definita come al solito da $z(x,y) = x + iy$.

Definizione 1.3.1. Una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ si dice J-olomorfa (o semplicemente olomorfa), se il differenziale df soddisfa la condizione

$$df(JV) = idf(V)$$

Per esempio, la funzione z è olomorfa secondo questa definizione.