1. Curvatura negativa su spazi metrici

1.1. Disclaimer. Tutto quello che segue non è altro che un invito a leggersi il meraviglioso libro *Metric Spaces of Non-Positive Curvature* di M. Bridson e A. Haefliger, che è da considararsi la bibbia di riferimento sul tema e sul quale ci sono le definizioni precise, i teoremi e le loro dimostrazioni e una bibliografia dettagliata.

1.2. Superfici e coni. Quello che intuitivamente percepiamo come curvatura di una superficie nello spazio è l'ostruzione ad avere campi di vettori tangenti costanti e non nulli. In $\mathbb{R}^2$, mondo piatto, curvatura $k = 0$ tutto va liscio. Consideriamo adesso un settore circolare di cartoncino, di angolo $\alpha = 3\pi/2$ e incolliamone i due lati formando un cono con angolo al vertice $3\pi/2 < 2\pi$. Prendiamo il campo vettoriale "costante" orizzontale. Dopo l'incollamento ciò che era orizzontale diventa verticale e viceversa. Per cui l'unico campo di vettori costante su tale cono non può essere né verticale né orizzontale ed è quindi nullo. Possiamo pensare questo esempio come una superficie con della curvatura $k > 0$ tutta concentrata nel vertice del cono. Quest'oggetto è familiare. Adesso prendiamo due settori circolari come prima e ne incolliamo i lati dell'uno con i lati dell'altro. Il risultato è sempre un "cono" ma questa volta l'angolo nel vertice sarà maggiore di 2π. In questo caso abbiamo un esempio di curvatura $k < 0$ concentrata nel vertice.

Possiamo pensare ai coni come prototipi locali di superfici curve in cui $\alpha = 2\pi$ corrisponde a curvatura zero, roba Euclidea, $0 < \alpha < 2\pi$ è roba sferica $k > 0$ mentre $\alpha > 2\pi$ è il mondo iperbolico, quello a curvatura negativa.

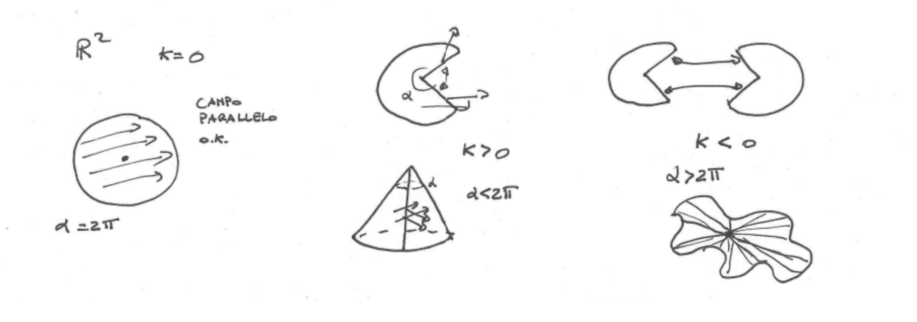

Figura 1. Coni con curvatura concentrata nel vertice

Possiamo pensare a una superficie curva come approssimata per robe localmente coniche (o poliedrali a pezzi) in cui i vertici sono i portatori di curvatura. In questo modo possiamo costruire modelli in cui la curvatura sia discretizzata.

1.3. **Geodetiche.** Oggetti così costruiti ereditano dai modelli locali di cartoncino delle lunghezze per i vettori tangenti (fuori dai punti conici). Dato un cammino rettificabile possiamo calcolarne quindi la lunghezza integrando il modulo della velocità di parametrizzazione. Ciò per mette di definire la distanza dei cammini

$$d(p,q) = \inf_{\gamma:\gamma(0)=p,\gamma(1)=q} L(\gamma).$$

Uno spazio metrico si dice **geodetico** se dati comunque due suoi punti p, q esiste un cammino γ che li unisce tale che $L(\gamma) = d(p,q)$. Per esempio, la distanza indotta da $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{S}^2$ non è geodetica. Una **geodetica** sarà per definizione un cammino che minimizza localmente la distanza percorsa. In una terminologia fisica, una geodetica è il percorso di un raggio di luce.

1.4. **Geodetiche sui coni.** Vediamo come sono fatte le geodetiche nei modelli locali dei coni. In $k = 0$ abbiamo le rette, niente di nuovo sul fronte occidentale. Andiamo nel settore di angolo $3\pi/2$ e consideriamone la bisettrice. Questa è una retta nel cartoncino e quindi rimane una roba che minimizza localmente la distanza anche dopo gli incollamenti. Ma cosa succede quando si arriva al vertice? La bisettrice finisce. E la geodetica nel cono pure. Infatti se uno volesse continuarla incontrerebbe la linea di sutura, che non sono altro che i lati del settore incollati e quindi nel cartoncino la presunta geodetica presenterebbe un angolo minore di π per cui si troverebbe facilmente una scorciatoia per unire i suoi punti finali.

Ancora, se partiamo da un punto fuori dal vertice e puntiamo verso il vertice, ma un po' a destra, vediamo che la geodetica tende a girare attorno al vertice e va ad incontrare la geodetica che puntava il vertice, ma un po' a sinistra. Questa cosa è evidente nel settore di cartoncino e dipende dal fatto che l'incollamento è realizzato da una roazione di angolo $2\pi - \alpha > 0$. Si veda la figura 2. Ripetiamolo: **In curvatura**

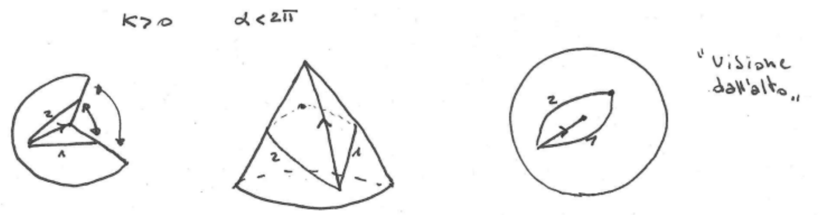

FIGURA 2. Geodetiche in $K > 0$

positiva le geodetiche tendono a incontrarsi. Questa cosa diventa un teorema con tanto di dimostrazione che si può enunciare cosí (Teorema di Bonnet-Myers) $k > c > 0$ *implica compattezza.* Il mondo sferico è un mondo compatto. Se uno prende il rivestimento universale di un toro, ottiene $\mathbb{R}^2$, se uno prende il rivestimento universale di una roba a curvatura positiva, ottiene una roba a curvatura positiva e quindi compatta. A livello di gruppi stiamo parlando di gruppi finiti.

Che succede alle geodetiche del cono a curvatura negativa? Consideriamo un modello di cartoncino fatto incollando un settore conico di angolo 2π — per esempio $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ tagliato lungo $\{z \in \mathbb{R}, z > 0\}$ — con un settore di angolo $\alpha > 0$. Sia ora la geodetica che parte da $z = -1$ e va verso lo zero. Quando ci arriva succede un fenomeno opposto al caso di curvatura positiva: la geodetica può continuare indistintamente lungo ogni raggio del settore di angolo α! (si veda la figura 3.)

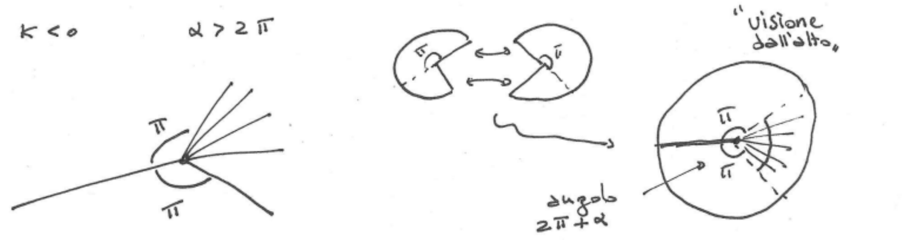

FIGURA 3. Geodetiche in $K < 0$

Se pensiamo a un fascio di luce è come se avesse incontrato una lente che "apre" il fascio. Se pensiamo tutto in un mondo discreto abbiamo una diramazione della geodetica, su cui uno si può divertire a mettere dei "pesi" o probabilità di diramazione...

Ma torniamo a noi: **In curvatura negativa le geodetiche tendono a separarsi**. A livello di teoremi possiamo dire che la distanza tra geodetiche è una funzione strettamente convessa in curvatura negativa, che (Teorema di Cartan-Hadamard) se una roba a curvatura negativa è semplicemente connessa allora è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$ e che dati due punti c'è una unica geodetica tra loro.

Una tricotomia che appare quindi distinguendo le curvature è, per usare un parolone, il comportamento rispetto al quinto postulato di Euclide.

Questa tricotomia rispecchia, a livello di superfici quella del teorema di uniformizzazione. Ogni superficie orientata ha una struttura complessa naturale data dalla rotazione in senso antiorario. L'uniformizzazione ci dice che il rivestimento universale di una superficie è di tre tipi: $\mathbb{C}$ (tori, piatta, caratteristica di Eulero zero), $\mathbb{CP}^1$ (roba sferica, $k > 0$, caratteristica di Eulero positiva) e $\mathbb{D}^2$ (superfici di genere maggiore di due, $k < 0$, caratteristica di Eulero negativa).

L'interesse della curvatura negativa quindi è interesse per robe infinite, con andamenti tipo ramificazioni successive etc... Prima di andare a definire cosa voglia poter dire curvatura negativa per uno spazio metrico a pera, facciamo un ripassino rapido rapido di come è fatto $\mathbb{H}^2$.

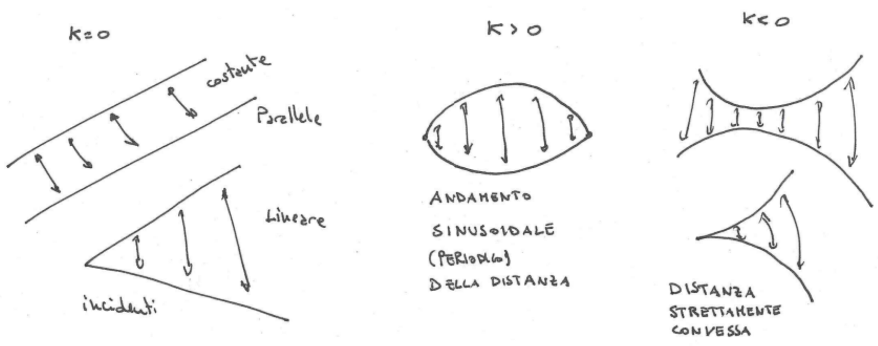

FIGURA 4. Rette parallele e incidenti, in $K = 0, > 0, < 0$

1.5. **Il piano iperbolico.** Formalmente, lo si può definire come l'iperboloide

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y, z) : \ -x^2 + y^2 + z^2 = -1, \ x > 0\}$$

ove la metrica iperbolica è data dalla restrizione al tangente di $\mathbb{H}^2$ della forma quadratica $-x^2+y^2+z^2$. Modelli di $\mathbb{H}^2$ sono quello dell'iperpiano $\{(x, y) : \ y > 0\}$ con la metrica $\frac{Euclidea}{y}$ o quello del disco $\{z \in \ |z| < 1\}$ con una metrica che va come $\frac{Euclidea}{1-|z|^2}$. Le geodetiche dell'iperboloide sono le interesezioni dello stesso con piani bidimensionali, mentre nei modelli del disco e del semipiano sono rette e cerchi perpendicolari al bordo.

Facendo gli opportuni disegnini si vede anche graficamente che "le geodetiche si separano". Altrettanto facilmente ci si convince che nel piano iperbolico esiste la proiezione sulle geodetiche (che esiste anche nel mondo euclideo, mentre ditemi voi chi è la proiezione del polo Sud sull'Equatore) e che tale proiezione **diminuisce strettamente** le distanze a patto di non trovarsi già sulla geodetica (perché le geodetiche si separano.) Questa proprietà è altamente non banale e parecchio utile in tanti campi: la convessità della funzione distanza implica esistenza di minimi per cui processi di minimizzazione interpretati in ambiente iperbolico trovano un framing di lavoro naturale.

Sempre guardando i disegnini, nel disco e nel semipiano ci si può convincere che i cerchi iperbolici sono cerchi usuali ma col centro spostato. A questo punto si vede subito che data una retta e un punto P su di essa, esiste la palla aperta più grossa il cui centro si proietta su P. Ovviamente ció non dipende dal punto P scelto e da questo si deduce un fatto, chiamato **proiezione limitata**: data una geodetica, la proiezione sulla geodetica stessa di una qualsiasi palla fuori da essa è limitata. Con un limite che non dipende né dalla palla né dalla geodetica.

I disegnini ci ricordano in oltre l'unicità della geodetica per due punti, ma facendo un po' di conti si può dire di piú: sia γ un segmento geodetico in $\mathbb{H}^2$ e sia c una curva che unisce gli estremi di γ. Detta D la distanza massima tra c e γ si ha che la lunghezza di c soddisfa una disuguaglianza esponenziale del tipo:

$$L(c) > Ae^{BD} \tag{1}$$

ove A e B sono costanti opportune. Questo dice che le curve corte sono vicine alle geodetiche. Ossia, in processi di approssimazione i cammini corti sono degli ottimi approssimanti delle geodetiche.

Sempre in tema di andamenti esponenziali, tutti sanno che la circonferenza di raggio R ha lunghezza $2\pi R$ e che l'area da essa racchiusa nel piano è $R^2\pi$. Nel mondo iperboliche sia la circonferenza che l'area vanno come e^R. Ne deduciamo due cose: la quantità di roba racchiusa in una palla di raggio R in un mondo iperbolico è **esponenziale**, esattamente come la roba racchiusa sulla superficie della palla stessa. Facendo delle medie, ciò fornisce informazioni di tipo asintotico (di processi che avvengono in un mondo iperbolico) e questo conferisce un'importanza gigantesca al **bordo all'infinito** di $\mathbb{H}^2$. Il bordo, che lo vediamo bene nel modello del disco come il cerchio esterno e nel modello del semipiano come la retta orizzontale ad altezza zero (ma esiste sempre, anche nell'iperboloide dove non si vede!) si definisce come classe di equivalenza di geodetiche. Le geodetiche, come ormai sappiamo, si separano. Quindi, ribaltando il pundo di vista, si avvicinano, infatti: due geodetiche che rimangono a distanza limitata l'una dall'altra si avvicinano esponenzialmente. Quindi due geodetiche possono essere incidenti, disgiunte e non asintotiche oppure asintotiche da un lato. Nel disegno del disco si vede proprio bene che essere asintotiche significa andare a sbattere nello stesso punto del cerchio esterno, da cui la definizione: due geodetiche orientate si dicono equivalenti se sono asintotiche a $+\infty$ e l'insieme delle classi di equivalenza è il bordo all'infinito. Si vede abbastanza agevolmente che il bordo può essere dotato di una topologia che rende $\mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$ omeomorfo al disco chiuso, come nel disegnino, ma la metrica esplode all'infinito e quindi quella non la si può estendere.

1.6. **Tricotomia dei triangoli.** Tutti sappiamo che la somma degli angoli interni di un triangolo è π e che se due triangoli han gli angoli uguali sono simili. Nel mondo Euclideo. La tricotomia della curvatura nulla, positiva o negativa, si manifesta in modo prepotente nelle tipologie di triangoli (convenzionalmente, quando si parla di triangoli si sottintende che i lati siano geodetici). In curvatura negativa la somma degli angoli interni è **strettamente minore** di π mentre in curvatura positiva è **strettamente maggiore**. Quindi i triangoli iperbolici appaiono più fini di quelli euclidei mentre quelli sferici appaiono più gonfi (si veda la figura qua sotto 5).

Questa roba, formalizzata, diventa il teorema di Gauss-Bonnet: *in un triangolo l'integrale della curvatura è lo scarto tra la somma degli*

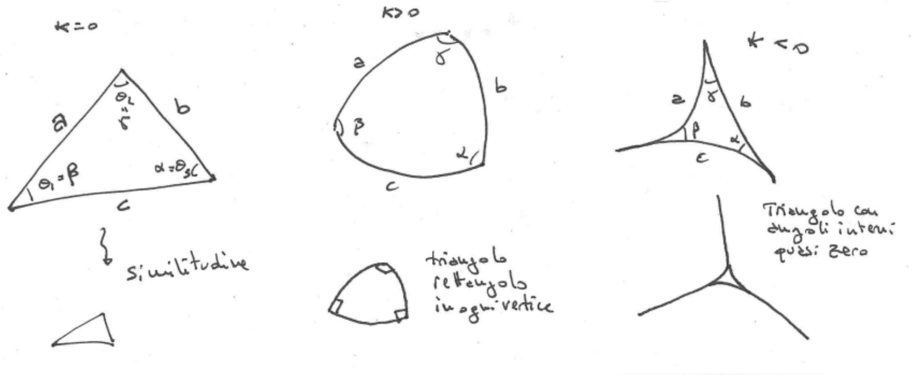

FIGURA 5. Triangoli in curvatura nulla, positiva e negativa

angoli interni e π. Quindi

$$k = -1 \qquad \text{Area}(T) = \pi - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$$

$$k = 1 \qquad \text{Area}(T) = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi$$

Entrambe queste formule danno limiti sull'area dei triangoli! Le similitudini esistono solo nel mondo piatto, altrove (in curvatura costante) angoli uguali implica triangoli uguali.

Uno si può divertire a fare trigonometria Euclidea, sferica ed iperbolica. A titolo di esempio si veda la triplice faccia della legge dei seni. In un triangolo di lati a, b, c e angoli opposti α, β, γ si ha:

$$k = 0 \qquad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$k = 1 \qquad \frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$$

$$k = -1 \qquad \frac{\sinh a}{\sin\alpha} = \frac{\sinh b}{\sin\beta} = \frac{\sinh c}{\sin\gamma}$$

In curvatura 1 l'equatore, divisa in tre segmenti, è un triangolo con tre angoli retti, mentre nel mondo iperbolico, un triangolo di area massima, cioè π ha tutti gli angoli... zero. E i vertici nel bordo all'infinito. Tale triangolo si chiama triangolo ideale, tutti i triangoli ideali sono isometrici ed ogni triangolo è contenuto in un triangolo ideale. Quindi oltre ad avere area massima, i triangoli ideali sono i triangoli più grossi possibile.

Nel mondo iperbolico succede questa cosetta piuttosto interessante: c'è un limite superiore al raggio di una palla che sta dentro un triangolo, indipendente dal triangolo. In $\mathbb{H}^2$ lo si vede subito coi disegnini per un triangolo ideale "simmetrico", poi: se una palla sta dentro a un triangolo, sta dentro a un triangolo indeale, tutti i triangoli ideali sono isometrici, basta fare il conto per il triangolo che avevamo scelto. Da cui si deduce che in $\mathbb{H}^2$, esiste una costante δ tale che, se l_1, l_2, l_3 sono i lati di un triangolo qualsiasi (geodetico), allora l_1 sta nell'intorno di raggio δ dell'unione $l_2 \cup l_3$. Ossia ogni punto di l_1 sta comunque a distanza minore di δ o da un punto di l_2 o da un punto di l_3.

1.7. **Confronto tra triangoli.** La differenza delle "forme" dei triangoli diventa rigorosa e quantitativa in termini di curvatura. Siano X_1 e X_2 due superfici semplicemente connesse di curvatura costante $K_1 < K_2$. Allora valgono le seguenti disugualianze:

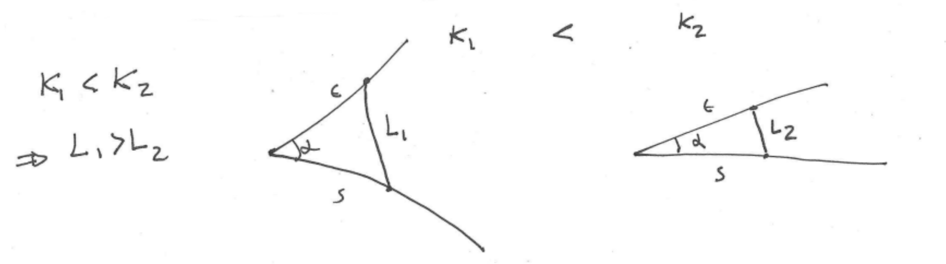

FIGURA 6. Teorema di confronto 1: $K_1 < K_2 \Rightarrow L_1 > L_2$

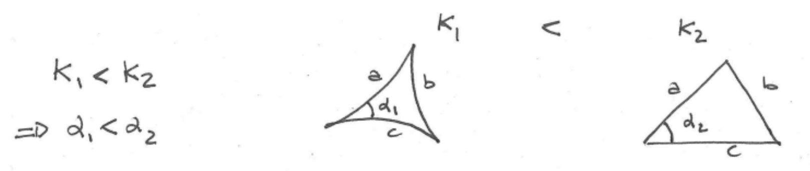

FIGURA 7. Teorema di confronto 2: $K_1 < K_2 \Rightarrow \alpha_1 < \alpha_2$

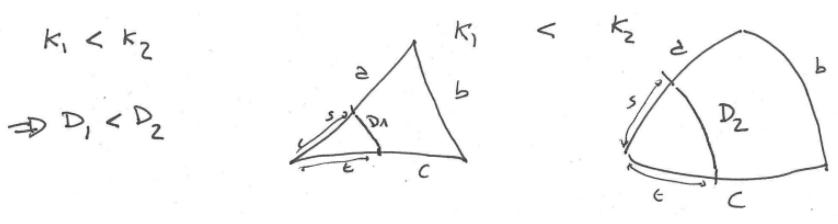

FIGURA 8. Teorema di confronto 3: $K_1 < K_2 \Rightarrow D_1 < D_2$

1.8. **Curvatura su spazi metrici: Spazi CAT(k).** I teoremi di comparazione sui triangoli suggeriscono che si possa definire la curvatura di uno spazio metrico guardando ai suoi triangoli. Ricordiamo che un triangolo per noi è formato da tre punti (i vertici) uniti da geodetiche; il "dentro" non c'è.

Sia M_k la superfice di curvatura costante k: per $k = 0$ M_k è il piano Euclideo, per $k > 0$ è una sfera in $\mathbb{R}^3$ di raggio... (si lascia al lettore l'esercizio di calcolare il raggio); per $k < M_k$ è il riscalamento del piano iperbolico per un fattore... (il lettore faccia il calcolo). Sia dato k. Per ogni scelta a, b, c di numeri reali positivi che soddisfano le disugualianze triangolari e tali che siano tutti minori del diametro di M_k esite un (unico a meno di isometrie) triangolo $\Delta_k(a, b, c)$ in M_k di lati esattamente a, b, c.

Sia X uno spazio metrico geotetico e completo. Allora X si dice **CAT**(k) (di curvatura minore di k) se i triangoli di X sono più fini di quelli di M_k. Formalizzando, se per ogni triangolo Δ in X di lati a, b, c e per ogni coppia di punti x, y in Δ, detti $\bar{x}$ e $\bar{y}$ i punti in $\Delta_k(a, b, c)$ che distano dai vertici come x e y, si ha che

$$dist(x, y) \leq dist(\bar{x}, \bar{y})$$

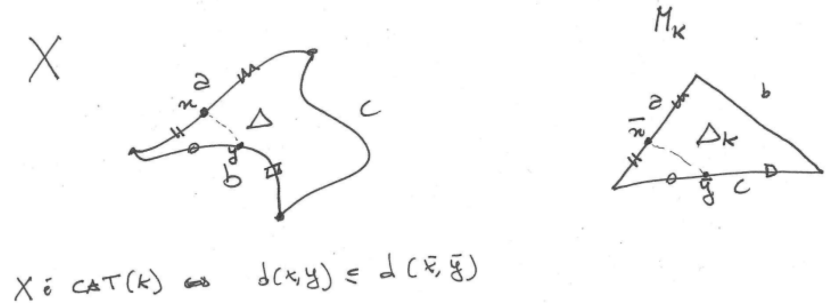

Figura 9. Disugalianza Cat(k)

Segue immediatamente dalla definizione e dai teoremi di comparazione che se una roba ha curvatura $\leq k$ nel senso usuale allora è CAT(k).

Allo stesso modo si definiscono gli spazi a curvatura *maggiore di k* e c'e' tutta una teoria al riguardo, ma qui siamo interessati alla curvatura negativa, quindi abbiamo bisongo di una minorazione.

Avendo usato uno dei teoremi di comparazione per triangoli, si dimostrano gli altri due teoremi di comparazione tra uno spazio CAT(k) e M_k. L'unica cosa che uno deve fare è dotarsi di una nozione di angolo. La filosofia è che la curvatura è un fenomeno del secondo ordine: al prim'ordine tutto è Euclideo (tutti i prodotti scalari hanno una base ortonormale).

Date due geodetiche γ, η emananti da $p \in X$, entrambe parametrizzate per lunghezza d'arco, si definisce l'angolo $\alpha(s, t)$ come l'angolo di $\Delta_0(t, s, dist(\gamma(t), \eta(s)))$ nel punto corrispondente a p e poi si fa il limsup per $t, s \to 0$.

A livello di spazi metrici si può quindi dire che gli spazi a curvatura negativa sono gli spazi CAT(0). Che roba è uno spazio CAT(0)? Roba simpliciale a pezzi seplicemente connessa è tipicamente CAT(0). I *Buliding* Euclidei sono robe CAT(0), i complessi che si usano per studiare i gruppi sono soventi CAT(0). I prodotti, o roba che gli somiglia, di fattori CAT(0) è CAT(0).

Siccome essere CAT(k) è definito con una disugualianza debole, *i limiti di robe CAT(k) sono CAT(k), anche se sono dei grandi troiaii.* Questo è uno strumento molto comodo in vari casi in cui uno deve mettere le mani in situazioni che degenerano (vedi Perelmann in alcuni passi della dimostrazione della congettura di Poincarè, anche se lui aveva a che fare con robe a curvatura positiva).

Ma torniamo a bomba. Che proprietà ha uno spazio CAT(0)? Ne ha un sacco buone degli spazi a curvatura negativa. Per esempio c'è l'unicità delle geodetiche, esiste la proiezione sulle geodetiche e questa proiezione è 1-Lipschits. Se siamo in CAT(-1) c'habbiamo pure la proiezione limitata. C'e' un teorema alla Hadamard: localmente CAT(0) implica globalmente CAT(0). C'e' una nozione di bordo.

Poniamo l'attenzione adesso su due proprietà dei CAT(0). La prima è quella del prodotto: prodotto di CAT(0) è CAT(0). Il prodotto del piano iperbolico con sé stesso non è a curvatura negativa. Infatti dentro ci sono un sacco di piani Euclidei: i prodotti di die geodetiche. Uno spazio CAT(0) lo si può pensare come uno spazio in cui la curvatura sia non-positiva. In spazi del genere ci saranno regioni a curvatura negativa e regioni *piatte*. Queste regioni piatte spesso ricoprono ruoli molto importanti quando si parla di gruppi. I fattori piatti permangono anche quando si riscala, mentre la roba a curvatura negativa, se riscalata, diventa "a curvatura $-\infty$", quindi i pezzi piatti hanno uno ruolo "dinamico" e viceversa li si possono identificare in modo "asintotico". Su questo aspetto ci torniamo tra poco, quando avremo la nozione di spazio metrico iperbolico.

La seconda proprietà dei CAT(0) è che la condizione sui triangoli vale in piccolo, per triangoli minuscoli e in grande, per triangoli giganti. A volte può far comodo guardare alle robe grandi senza preoccuparsi di perturbazioni limitate. In questo caso la nozione di CAT(0) non va bene. Per esempio, se uno prende $\mathbb{R}^2$ e ci aggiunge del rumore localizzato, tipo ci appiccica un foruncolino in ogni punto di $\mathbb{Z}^2$. Questa roba smette di essere CAT(0) perchè la gemoetria locale di un foruncolo è a curvatura positiva, ma visto da lontano, cioè per triangoli grandi, il tutto si comporta praticamente come nel piano.

L'essere CAT(0) presenta quindi fenomeni di rigidità, tipici degli spazi iperbolici, ma che non fanno tanto comodo per lo studio di problemi asintotici.

1.9. **Spazi Gromov-iperbolici.** Questa nozione di curvatura negativa per spazi metrici è quella che si è rilevata vincente quando uno ha a che fare con problemi ti dipo “andamento all’infinito” fregandosene di perturbazioni locali limitate.

La proprietà dei triangoli iperbolici che si usa stavolta è quella di avere un bound per i raggi delle palle iscritte.

Uno spazio geodetico X **si dice δ-iperbolico** se per ogni triangolo ogni lato è contenuto nel δ-intorno degli altri due. Ossia, posto $I_\delta(A) = \{x \in X \exists a \in A : d(x,a) \leq \delta\}$, per ogni triangolo in X, detti L_1, L_2, L_3 i suoi lati, si ha

$$L_1 \subset I_\delta(L_2) \cup I_\delta(L_3).$$

X si dice (Gromov) **iperbolico** se esiste un $\delta \geq 0$ tale che X sia δ-iperbolico.

Ogni spazio compatto è iperbolico secondo questa definizione, basta prendere come δ il suo diametro. Questo rispecchia il fatto che i rumori limitati non ci interessano.

Chi sono gli spazi piú iperbolici di tutti? Quelli coi triangoli piú fini: quelli 0-iperbolici. Uno spazio 0-iperbolico è uno spazio in cui i triangoli sono tripodi (tripode = cono su tre punti). Tali spazi si chiamano **alberi reali**, in inglese $\mathbb{R}$-tree, ed hanno una loro importanza intrinseca (e $\mathbb{R}$ può essere sostituito da un gruppo Λ...)

Se pensate a un albero classico, un albero simpliciale, lí si vede subito che i triangoli son tripodi. Ecco un albero reale è come un albero simpliciale solo che molto più incasinato: da un vertice ci possono partire infiniti rami e i vertici possono non essere un insieme discreto dell’albero (addirittura ci sono alberi reali in cui ogni punto è di ramificazione!!!)

Se avete per le mani un albero, probabilmente troverete utile sapere cosa si puó dire su di lui usandone l’iperbolicità.

Essere Gromov iperbolico è avere curvatura strettamente negativa su scala grande.

Abbiamo che CAT(0) $\not\Rightarrow$ δ-iperbolico (ma CAT(-1) si) e δ-iperbolico $\not\Rightarrow$ CAT(0) (un piano iperbolico con foruncoli è iperbolico ma smette di essere CAT(0)).

Uno spazio Gromov-iperbolico ha un sacco di prprietà tipiche dello spazio iperbolico usuale: unicità delle geodetiche, proiezione 1-Lipschitz sulle geodetiche, proiezione limitata su geodetiche, bordo all’infinito, andamento esponenziale delle palle, disugualianza isoperimetrica lineare, vicinanza delle curve corte alle geodetiche (disequazione (1).)

Il fatto di avere questo δ di margine nei conti permette una grande libertà. Praticamente, gli andamenti asintotici sono codificati dal bordo all’infinito, mentre al finito le cose possono essere molto approssimative.

Al posto delle isometrie, mappe natuali per studiare gli spazi metrici, si usano le **quasi-isometrie**. Dato $c > 0$ una c quasi-isometria tra due spazi metrici è una mappa f tale che

$$\frac{1}{c} dist(x,y) - c < dist(f(x), f(y)) < c \cdot dist(x,y) + c$$

è come se fosse una roba bilipschitz ma con un margine di errore al finito: Una quasi-isometria non ha neppure bisogno di essere continua!

Essere Gromov-iperbolico è una proprietà invariante per quasi-isometrie e le quasi-isometrie tra spazi iperbolici si estendono ad applicazioni bi-lipschitz dei loro bordi all'infinito.

Questa situazione è quella che permette di fare i conti nella pratica.

1.10. **Un po' di caratterizzazioni di spazi iperbolici.** Adesso mettiamo l'accento ancora una volta su come l'essenza della Gromov iperbolicità (e un po' anche della CAT(0)-icità) sia legata ad andamenti asintotici.

La funzione **divergenza** di uno spazio metrico si definisce cosí. $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è funzione divergenza per X se per ogni $R, r \in \mathbb{N}$, date comunque due geodetiche η, γ emananananti da un punto p, tali che $D(\gamma(R), \eta(R)) > F(0)$, ogni curva che unisce $\eta(R+r)$ con $\gamma(R+r)$ fuori dalla palla di centro p e raggio R ha lunghezza almeno $F(r)$.

Uno spazio Gromov iperbolico ha divergenza esponenziale. Ma vale il se e solo se con GAP: se uno spazio metrico ha divergenza superlineare ($\lim F(n)/n = \infty$) allora è iperbolico (e quindi la divergenza è esponenziale, il gap sta nel fatto che la divergenza o è lineare o è esponenziale). Quindi **gli spazi iperbolici sono caratterizzati come quelli a divergenza esponenziale**.

Un'altra caratterizzazione viene dalla **disugualianza isoperimetrica**. Qual'è la figura di maggior area a perimetro fissato? Il cerchio. E tutti sanno che la circonferenza è lunga $2\pi r$ e che l'area è πr^2. Cioè l'area massima racchiusa da una curva è quadratica nella lunghezza di una curva. Cio' nel piano Euclideo. Abbiamo già visto che nel piano iperbolico la circonferenza e l'area sono entrambe esponenziali e lineari l'una con l'altra. Ma cos'è l'area per uno spazio metrico?

Sia $c : \mathbb{S}^1 \to X$ un cammino rettificabile. Prendiamo il disco nel piano e triangoliamolo. Se esiste una funzione $f : D^2 \to X$, non necessariamente continua, tale che $F|_{S^1} = c$ e tale che l'immagine di ogni triangolo abbia diametro minore di ε allora diciamo che F è un ε-riempimento di c e denotiamo con $|F|$ il numero di triangoli della triangolazione del disco. Si definisce

$$Area_\varepsilon(c) = \min\{|F| : F \text{ è un } \varepsilon\text{-riempimento di } c\}.$$

Una funzione $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ si dice **funzione isoperimetrica** per X se esite $\varepsilon > 0$ tale che per ogni c si ha

$$Area_\varepsilon(c) \leq \varphi(\text{lunghezza di } c)$$

Se uno spazio metrico geodetico. X **è Gromov iperbolico se e solo se ha una funzione isoperimetrica lineare**. Anche qui c'è un GAP: le funzioni isoperimetriche di spazi metrici se son subquadratiche son lineari!

Un'altra caratterizzazione è quella attraverso i **coni asintotici**. Una successione a valori in un compatto ammette sempre limite a meno di sottosuccessioni. Pensate di poter dare una definizione di limite per cui valga il teorema *ongi successione in un compatto ammette limite*. Ecco, si può fare sul serio. Serve un ultrafiltro massimale su $\mathbb{N}$ e poi siamo a posto. Noi adesso non ci occupiamo di questioni sottili di ω-limiti, ma ci accontentiamo di prendere limiti di qualsiasi successione senza scrupoli.

Sia X uno spazio metrico e sia X_n lo spazio ottenuto dividendo per n la distanza su X. Il cono asintotico di X è definito come il limite (nel senso di cui sopra) degli spazi X_n per $n \to \infty$. Questo non è altro che lo zoom-out: si prende uno spazio e lo si guarda da sempre più lontano. Se lo spazio è compatto il limite è un punto. Il limite di $\mathbb{Z}^2$ è $\mathbb{R}^2$, il limite di $\mathbb{H}^2$ è... un albero reale completo! (la curvatura tende a $-\infty$ per cui il limite è 0-iperbolico e l'omogeneità fa si che ogni punto sia di ramificazione).

Uno spazio metrico geodetico X **è iperbolico se e solo se il suo cono asintotico è un albero reale**.

Questo non deve sorprendere perché se un triangolo ha la proprietà che il centro vive a distanza limitata dai lati (anche se è un triangolo ideale come nel caso di $\mathbb{H}^2$), quando si fa lo zoom out ogni triangolo appare come un tripode.

1.11. **Applicazioni: Gruppi.** La prima applicazione di questa teoria (nata per l'appunto per risolvere problemi algebrici sui gruppi usando metodi geometrici, e questa è una delle grandi idee forti di Gromov) è nell'ambito dell'algebra.

Dato un gruppo finitamente presentato $G = \langle a_1, \dots, a_n | R_1 \dots R_k \rangle$ si costruisce il grafo di Cayley della presentazione come segue. I vertici sono gli elementi del gruppo e x, y sono uniti da un lato se $x = a_i y$ per qualche i oppure $y = a_i x$ per qualche i. Ad ogni lato si assegna lunghezza 1. Sta roba è un albero se il gruppo è libero. Quindi uno ha voglia di dire che un gruppo libero è iperbolico. In effetti è il più iperbolico di tutti.

Un gruppo G si dice iperbolico se un suo grafo di Cayley lo è. Se si cambia presentazione si ottengono due grafi di Cayley diversi, ma quasi-isometrici, per cui la definizione è ben posta.

Il gruppo $\mathbb{Z}^2$ è il prototipo di roba non iperbolica, (insieme ai gruppi finiti) perché è abeliano e quindi il grafo di Cayley è una quadrettatura di $\mathbb{R}^2$ (e il suo cono asintotico è $\mathbb{R}^2$). In algebra quindi uno si trova per le mani l'iperbolicità che è *somiglianza coi gruppi liberi* e non-iperbolicità che è legata alla commutatività. Vediamo una carrellata di risultati sui gruppi.

Il primo è il teorema bomba di Gromov, anni 80, con cui la teoria geometrica dei gruppi guadagna di prepotenza l'aggettivo "hot" tra i settori di ricerca della matematica moderna: **Un gruppo è virtualmente nilpotente se e solo se ha crescenza polinomiale** (la crescenza non c'entra nulla con la culinaria bolognese: è il numero degli elementi a distanza n dall'origine nel grafo di cayley).

Poi ci sono tutti i **risultati di decidibilità**. Data una proprietà P e una roba X descrivibile in termini finiti, c'è un modo algoritmo per decidere se X ha la proprietà P? Il tipico esempio è il **problema della parola**: dato un sistema di generatori e di relazioni per un gruppo G, esiste un algoritmo che, data una parola (stringa di generatori) ci dice se la parola rappresenta l'elemento neutro di G oppure no? A questa domanda è ben noto che non c'è risposta, è un problema indecidibile. Però se uno restringe la classe di gruppi con cui ha a che fare, può diventare decidibile. Altri due problemi classici di decisione sono **il problema del coniugio**: dire se due parole rappresentano elementi uno coniugato dell'altro; e **il problema dell'isomorfismo**: dire se due gruppi finitamente presentati sono isomorfi o no. La curvatura negativa qua si manifesta cosí:

- Se un gruppo G agisce per isometrie in modo propriamente discontinuo e con quoziente compatto su uno spazio CAT(0) allora il problema della parola e del coniugio sono decidibili (esiste l'algoritmo.)
- Ogni gruppo iperbolico ha i problemi della parola e del coniugio decidibili.
- Il problema dell'isomorfismo è decidibile nella classe dei gruppi iperbolici e senza torsione (niente elementi di ordine finito).

Il nocciolo di questi teoremi sta nello studio delle geodetiche e delle loro proprietà.

1.12. **Applicazioni: La classificazione delle varietà tridimensionali.** Questo è un esempio di un altro teoremazzo (30 anni per dimostrarlo) nella cui dimostrazione a un certo punto serve di brutto che un certo aggeggio sia iperbolico. Se ci sono voluti 30 anni per la dimostrazione, in tre righe non si può che essere imprecisi (e volutamente bari). Tutto quello che segue, preso cosí come è scritto è semplicemente brutalmente falso, ma dà l'idea di come funzionano le cose sul serio. Se uno vuol mettere i puntini sulle ı si consiglia di digitare "Ending Lamination Conjecture" su wikipedia.

Sia S una superficie compatta senza bordo. Supponiamo di voler classificare le metriche su varietà del tipo $S \times \mathbb{R}$. Questo serve perchè se uno ha una varietà tridimensionale e la taglia a pezzetti, i bordi dei pezzetti sarano del tipo $S \times \mathbb{R}$ per cui se uno vuole studiare le varietà tridimensionali per induzione spezzettandole, deve sapere cosa succede vicino al bordo.

Immaginiamo $M = S \times \mathbb{R}$ col fattore $\mathbb{R}$ verticale. Le fette orizzontali S_t sono superfici, tutte diffeomorfe a S ma con metriche distinte. La varietà M si può quindi vedere come un cammino nello spazio delle metriche su S. Questo spazio non è iperbolico. Se lo fosse uno potrebbe prendere questo cammino, dimostrare che è geodetico e quindi sapere che l'intero cammino è determinato dai due estremi sul bordo all'infinito. Ma lo spazio delle metriche su S non è iperbolico e questo non si può fare.

Una cosa di buono però c'è: lo spazio delle metriche (iperboliche) su S ha un bordo all'infinito buono e ben compreso. Si tratta dello spazio delle laminazioni geodetiche misurate.

A questo punto ci viene in aiuto il **Complesso delle curve**. Il complesso delle curve è un grafo i cui vertici sono le classi di omotopia libera di curve semplici chiuse su S. Due vertici sono uniti da un lato se ammettono rappresentati disgiunti su S. Semplice no? Provate a disegnarlo per un pantalone a 4 gambe (ossia una sfera con 5 buchi) che è la superficie più semplice per cui questa teoria abbia senso. Si vede subito che questo grafo ha valenza infinita, ossia da ogni punto partono infiniti segmenti. Quindi non è manco localmente compatto, è un vero e proprio troiaio. Però, magia magia... è iperbolico! Sta roba è iperbolica e ha lo stesso bordo all'infinito dello spazio delle metriche!!!

C'è di più. Se prendo il mio cammino di metriche S_t e considero la curva c_t più corta in S_t ho una proiezione di S_t nel complesso delle curve. Infatti localmente la curva più corta rimane sempre lei a meno di omotopia libera. A un certo punto ci saranno due curve corte. Per motivi geometrici, una volta che si mettono tutti i puntini sulle ı, tali curve sono disgiunte e quindi rappresentano un lato del complesso delle curve.

La proiezione di S_t nel complesso delle curve è praticamente una geodetica. Con due punti all'infinito, le due cosiddette laminazioni terminali. Queste classificano. Cioè se M e M', con questo procedimento, danno luogo alla stessa coppia di laminazioni terminali allora sono isometriche. Ovviamente la dimostrazione di questo teorema usa molto di più che l'iperbolicità del complesso di curve; qui ne abbiamo stra-evidenziato il ruolo volutamente semplicemente perché stavamo cercando di vendere un po' di curvatura negativa. Qualcuno vuol comprarne?