

Osservazioni geometriche per l'intelligenza artificiale

Patrizio Frosini

Dipartimento di Matematica - Università di Bologna
`patrizio.frosini@unibo.it`

Dipartimento di Matematica e Informatica - Università di Perugia
29 maggio 2024

Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENEIO come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENEIO nelle applicazioni?
- 4 Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione
- 5 Alcune informazioni aggiuntive
- 6 Conclusioni

Finalità di questo seminario

Il gioco di parole: “*Osservazioni geometriche*” può essere inteso in due modi:

- Considerazioni di tipo **geometrico**
- La geometria delle **osservazioni**

Entrambi questi significati sono di nostro interesse nella ricerca sull'intelligenza artificiale.

*In questo seminario vorremmo mostrare come la geometria e la topologia rendano disponibili idee e strumenti che potrebbero essere utili per studiare lo **spazio degli osservatori** nella ricerca sull'intelligenza artificiale.*

L'esposizione sarà, per quanto possibile, informale.

Finalità di questo seminario

Le idee principali:

- Lo spazio degli osservatori è spesso più importante dello spazio dei dati;
- Per studiare lo spazio degli osservatori è utile sviluppare un nuovo modello geometrico;
- Lo sviluppo di un nuovo modello geometrico offre dei vantaggi teorici e applicativi.

In altre parole cercherò di illustrare come si possa munire lo spazio degli osservatori di una struttura geometrica, in modo da poterlo studiare e usare in modo più unitario, efficiente e significativo. Si tratta, dunque, di interpretare il concetto di **osservatore come una variabile** nel trattamento e nell'interpretazione dei dati.

Cos'è l'intelligenza?

L'intelligenza può essere descritta come la capacità di percepire o inferire informazioni e di conservarle come conoscenza da applicare a comportamenti adattativi all'interno di un ambiente o contesto.

WIKIPEDIA

(Si veda anche Sternberg, R. J. & Salter, W. (1982). *Conceptions of intelligence. In Sternberg, R. J. (Ed.), Handbook of human intelligence.*)

Ma non tutti i comportamenti adattativi sono intelligenti...



Il ruolo degli osservatori nello studio dell'intelligenza

Ci interessano in particolare queste domande:

- Come è possibile formalizzare il ruolo dell'osservatore in ambito topologico-geometrico?
- Quali sono le principali proprietà topologico-geometriche dello spazio degli osservatori?
- Cosa vuol dire deformare un osservatore e il suo comportamento in relazione ai dati?
- Come è possibile muoversi nello spazio degli osservatori?
- Quali conseguenze può avere lo studio del concetto di osservatore nell'ambito del machine learning?

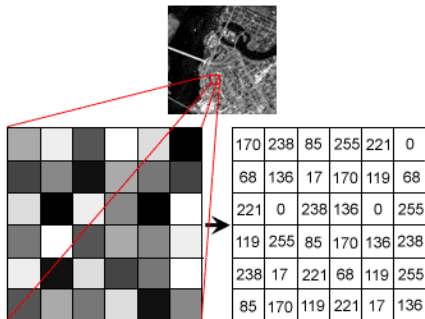
Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENE0 come rappresentazione geometrica degli osservatori**
- 3 Come possiamo usare i GENE0 nelle applicazioni?
- 4 Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione
- 5 Alcune informazioni aggiuntive
- 6 Conclusioni

I dati sono spesso rappresentabili come funzioni

I dati sono spesso descritti da funzioni a valori reali o vettoriali, cioè leggi che associano agli oggetti dei valori numerici o delle n -uple di valori numerici.

Facciamo alcuni esempi:



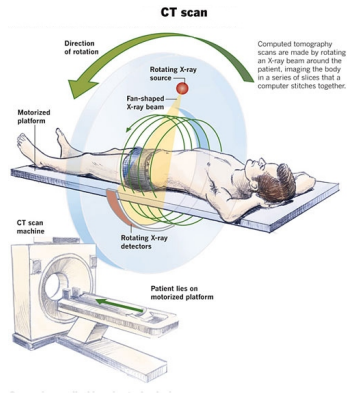
IMMAGINI

I dati sono spesso rappresentabili come funzioni



ELETTROCARDIOGRAMMI

I dati sono spesso rappresentabili come funzioni



TOMOGRAFIA ASSIALE COMPUTERIZZATA

I dati sono spesso rappresentabili come funzioni

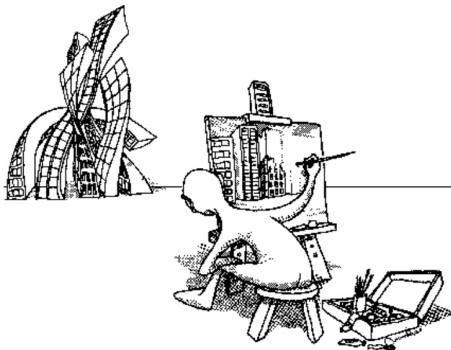
Nel nostro modello i dati sono descritti da funzioni a valori reali o vettoriali.

Indichiamo con Φ l'insieme dei **dati ammissibili**, cioè delle funzioni che possono essere interpretate come segnali da elaborare.

È importante osservare che solo alcune funzioni descrivono dati ammissibili: ad esempio, una funzione dal piano reale ai numeri reali che rappresenti un'immagine a livelli di grigio dovrà assumere valori compresi in un intervallo delimitato. Se questo non accade, la funzione non viene usualmente interpretata come la rappresentazione di un'immagine.

I dati vengono elaborati dagli osservatori

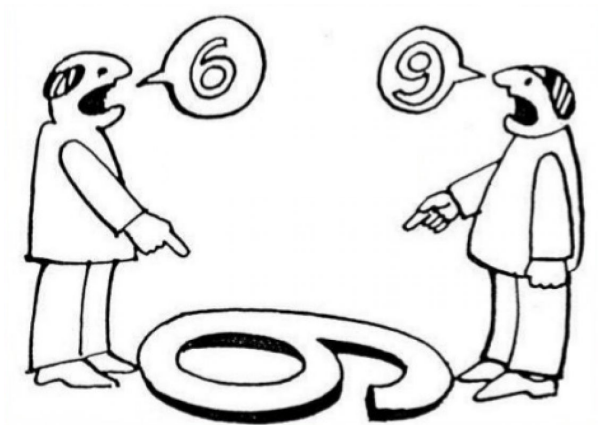
I dati hanno significato solo se c'è un osservatore che li elabora.



Un osservatore è un agente che trasforma dati in altri dati rispettandone le equivalenze e (usualmente) semplificandone la struttura.

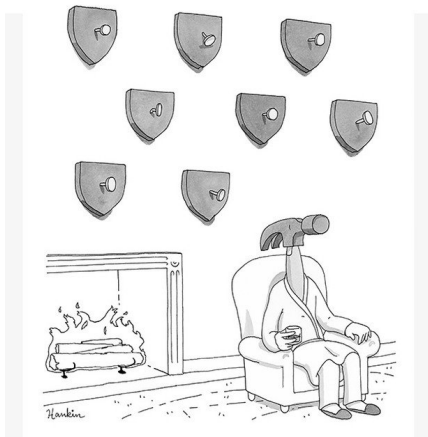
L'osservatore è una variabile del problema

L'interpretazione dei dati dipende fortemente dall'osservatore scelto.



Non c'è alcuna struttura nei dati

In generale, non c'è alcuna struttura nei dati. La struttura dei dati è una proiezione della struttura dell'osservatore.



La coppia (dato, osservatore)

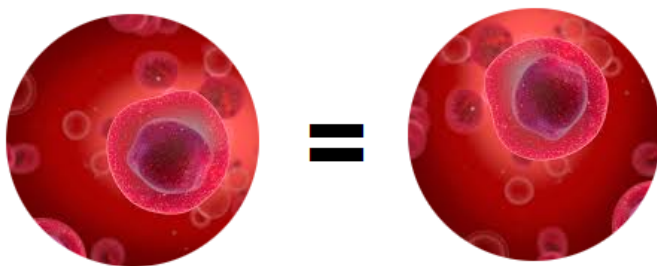
In realtà il nostro interesse non è quasi mai rivolto direttamente ai dati, ma alla relazione fra i dati e l'osservatore. Quel che ci importa è soprattutto il modo in cui l'osservatore reagisce alla presenza di informazioni.



I casi in cui l'interesse per i dati sembra centrale sono quelli in cui la modalità di reazione degli osservatori è tacitamente condivisa. Tutto ciò induce a privilegiare lo studio della “forma degli osservatori” allo studio della “forma dei dati”.

Certe trasformazioni non sono rilevanti

Alcune trasformazioni sono irrilevanti per l'osservatore.



L'analisi di un globulo rosso non cambia se applichiamo una rotazione.

Un modello matematico per gli osservatori

Gli osservatori possono essere visti come operatori che prendono in ingresso dati e li trasformano. In questo seminario parlerò di approssimazione di osservatori tramite operatori equivarianti non espansivi (in inglese **Group Equivariant Non-Expansive Operators: GENE**O).

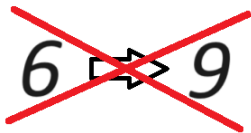


Ci interessa particolarmente studiare la geometria degli spazi di osservatori rappresentati da GENE.

Coppie di percezione

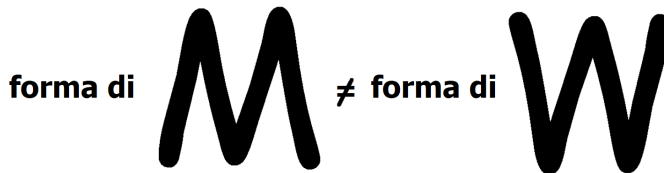
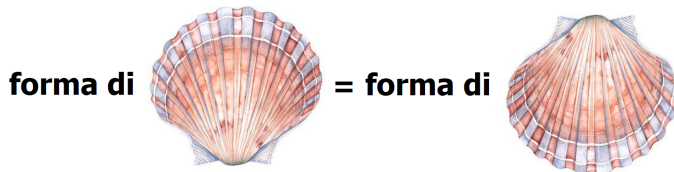
Chiameremo *coppia di percezione* ogni coppia (Φ, G) dove Φ sia uno spazio arbitrario di funzioni che rappresentano i dati ammissibili e G sia un gruppo di trasformazioni che preservano Φ .

In parole povere, vogliamo che ogni dato ammissibile venga trasformato da ogni trasformazione in G in un altro dato ammissibile. Per esempio, la traslazione temporale di un elettrocardiogramma è ancora un elettrocardiogramma e la rotazione nel piano della foto di una conchiglia è ancora l'immagine di una conchiglia. Invece la rotazione di 180 gradi dell'immagine di un 6 non è più l'immagine di un 6.



Il gruppo di equivarianza come variabile del modello

Il gruppo di equivarianza varia con l'osservatore:



Operatori equivarianti fra coppie di percezione

Un **operatore equivariante** dalla coppia di percezione (Φ, G) alla coppia di percezione (Ψ, K) rispetto all'omomorfismo $T : G \rightarrow K$ è una legge che trasforma le funzioni appartenenti all'insieme di segnali ammissibili Φ in funzioni appartenenti all'insieme di segnali ammissibili Ψ , *in modo tale da commutare con le trasformazioni appartenenti al gruppo*. Ciò significa che applicare prima la trasformazione g e poi l'operatore F dà lo stesso risultato che applicare prima l'operatore F e poi la trasformazione $T(g)$.

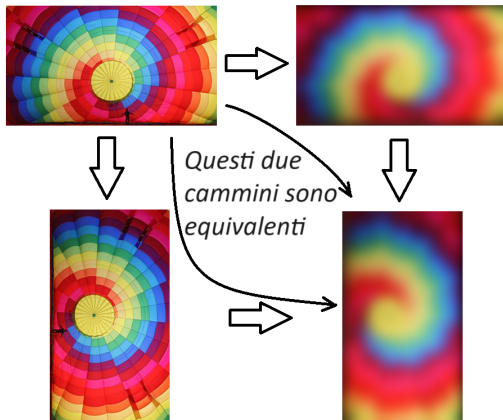
$$F(\varphi \circ g) = F(\varphi) \circ T(g)$$

Nel nostro contesto ogni osservatore è un operatore che agisce sui dati trasformandoli in modo equivariante.

Useremo l'acronimo **GEO** per indicare ogni operatore equivariante (**G**roup **E**quivariant **O**perator).

Operatori equivarianti fra coppie di percezione

ESEMPIO: L'operatore che sfuoca le immagini (usando un nucleo di convoluzione rotazionalmente simmetrico) è un operatore equivariante rispetto al gruppo delle rotazioni del piano intorno a un punto.



Operatori non espansivi

In molti casi siamo interessati a **operatori non espansivi**, cioè operatori che conservano o fanno diminuire la distanza fra i dati. Il motivo è che gli operatori più utili sono quelli che, in un certo senso, semplificano le relazioni fra i dati “dimenticando” parte dell’informazione inizialmente disponibile.

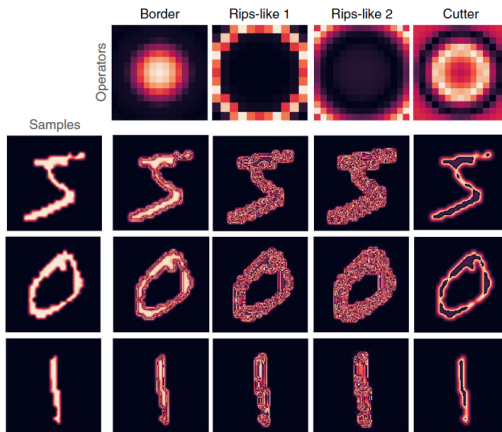
Vogliamo quindi che la distanza fra i dati in uscita sia minore o uguale a quella dei dati in entrata.

Useremo l’acronimo **GENEO** per indicare ogni operatore equivariante non espansivo (**G**roup **E**quivariant **N**on-**E**xpansive **O**perator).



Altri esempi di GENE0

**Alcuni operatori equivarianti non espansivi su MNIST
(modified National Institute of Standards and Technology database):**



In sintesi

- I dati si possono spesso interpretare come **funzioni** (p.e., un'immagine a livelli di grigio può essere vista come una funzione dal piano reale nei numeri reali, dove ogni valore definisce il livello di grigio dell'immagine in un punto).
- Un osservatore può essere visto come un **operatore** che trasforma dati in altri dati.
- Gli osservatori interessanti hanno spesso proprietà di **equivarianza**, cioè commutano rispetto all'azione di un gruppo.
- Gli osservatori hanno spesso la proprietà di semplificare le relazioni fra i dati: questo fatto può essere parafrasato dicendo che non incrementano le distanze fra i dati. In questo caso si dicono **non espansivi**.

Che metriche mettere su Φ , X e G ?

Su Φ poniamo la metrica del sup:

$$D_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{x \in X} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|.$$

NB: Quale altra metrica potremmo metterci, visto che X non è dotato di alcuna misura o struttura?

Su X poniamo la pseudo-metrica

$$D_X(x_1, x_2) = \sup_{\varphi \in \Phi} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|.$$

Ricordiamo che una pseudo-metrica è una metrica d senza la proprietà $d(x_1, x_2) = 0 \implies x_1 = x_2$.

Su G poniamo la pseudo-metrica

$$D_G(g_1, g_2) := \sup_{\varphi \in \Phi} D_{\Phi}(\varphi \circ g_1, \varphi \circ g_2).$$

Alcune proposizioni utili

Proposizione

Ogni funzione in Φ è non espansiva e quindi continua.

Proposizione

Se Φ è compatto e X è completo, allora X è compatto.

Proposizione

G è un gruppo topologico rispetto a D_G e l'azione di G su Φ per composizione a destra è continua.

Proposizione

Se Φ è compatto e G è completo, allora G è compatto.

Ora ogni biiezione è una isometria

La scelta della pseudo-metrica D_X implica una conseguenza interessante riguardo ai seguenti gruppi:

- $\text{Bij}_\Phi(X) = \{\text{biiezioni } g: X \rightarrow X \text{ tali che } \Phi \circ g, \Phi \circ g^{-1} \subseteq \Phi\};$
- $\text{Homeo}_\Phi(X) = \{\text{omeomorfismi } g: X \rightarrow X \text{ tali che } \Phi \circ g, \Phi \circ g^{-1} \subseteq \Phi\};$
- $\text{Iso}_\Phi(X) = \{\text{isometrie } g: X \rightarrow X \text{ tali che } \Phi \circ g, \Phi \circ g^{-1} \subseteq \Phi\}.$

Proposizione

$$\text{Bij}_\Phi(X) = \text{Homeo}_\Phi(X) = \text{Iso}_\Phi(X).$$

Tutte le nostre metriche sono basate solo sulle misurazioni disponibili.

Torniamo ai GENEIO, ricordando la definizione

Il confronto di dati non è quasi mai un processo diretto: è quasi sempre mediato dal confronto fra dati prodotti da agenti/operatori tramite opportune trasformazioni dei dati originali.

- L'importanza degli operatori equivarianti nel machine learning è stata evidenziata da vari autori (Mallat, Poggio, Rosasco...)

Un elemento innovativo nella ricerca su questi operatori è costituito dallo sviluppo di tecniche topologiche e geometriche che tengano conto delle peculiarità informative espresse dall'**equivarianza** e dalla **non espansività**.

Non si tratta di studiare tali operatori come entità singole, ma di indagare le proprietà geometriche e topologiche degli spazi di tali operatori.

Torniamo ai GENEIO, ricordando la definizione

Ogni coppia (Φ, G) con $G \subseteq \text{Homeo}_\Phi(X)$ è detta una *coppia di percezione*. Supponiamo che siano date due coppie di percezione (Φ, G) , (Ψ, H) e un omomorfismo di gruppi $T : G \rightarrow H$.

Ogni funzione $F : \Phi \rightarrow \Psi$ tale che

$$F(\varphi \circ g) = F(\varphi) \circ T(g)$$

per ogni $\varphi \in \Phi, g \in G$ è chiamata *Group Equivariant Operator (GEO)* associato all'omomorfismo T .

Se la mappa F è anche non espansiva (cioè

$$D_\Psi(F(\varphi_1), F(\varphi_2)) \leq D_\Phi(\varphi_1, \varphi_2)$$

per ogni $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$), allora si dice che F è un *Group Equivariant Non-Expansive Operator (GENEO)* associato all'omomorfismo T .

Due buone notizie per le applicazioni

Supponiamo che siano date due coppie di percezione (Φ, G) , (Ψ, H) e un omomorfismo di gruppi $T : G \rightarrow H$. Definiamo una metrica D_{GENEO} sullo spazio $\text{GENEO}((\Phi, G), (\Psi, H))$ di tutti i GENEIO da (Φ, G) a (Ψ, H) rispetto all'omomorfismo T ponendo

$$D_{\text{GENEO}}(F_1, F_2) := \sup_{\varphi \in \Phi} D_{\Psi}(F_1(\varphi), F_2(\varphi)).$$

Teorema

Se Φ e Ψ sono **compatti**, allora $\text{GENEO}((\Phi, G), (\Psi, H))$ è **compatto** rispetto a D_{GENEO} .

Teorema

Se Ψ è **convesso**, allora $\text{GENEO}((\Phi, G), (\Psi, H))$ è **convesso**.

Approssimazione di osservatori

IL NOSTRO OBIETTIVO PRINCIPALE: APPROSSIMARE OSSERVATORI IDEALI

Nel nostro modello “approssimare un osservatore” significa cercare un GENEIO F che minimizzi un’opportuna “funzione costo” $c(F)$.

La funzione costo quantifica l’errore che si commette prendendo il GENEIO F al posto dell’osservatore ideale.

Dato che lo spazio dei GENEIO è compatto e convesso (sotto l’ipotesi che gli spazi dei dati siano compatti e convessi), se la funzione costo $c(F)$ è strettamente convessa abbiamo che esiste uno e un solo GENEIO che approssima al meglio l’osservatore ideale.

Un'osservazione importante

Mentre molto spesso non ha senso considerare le medie dei dati originali (perché l'insieme dei dati ammissibili è frequentemente non convesso), l'assunzione che il codominio dei GENE0 sia convesso permette di considerare la **media degli osservatori**.



Costruzione di GENEIO con metodi elementari

Il nostro modello richiede metodi costruttivi per produrre GENEIO in presenza di dati e gruppi di equivalenza prestabiliti.

Senza entrare nei dettagli tecnici, qui osserviamo soltanto che, sotto ipotesi ragionevoli,

- la composizione di GENEIO è ancora un GENEIO;
- il massimo e il minimo di GENEIO è ancora un GENEIO;
- la traslazione di un GENEIO è ancora un GENEIO;
- la combinazione convessa di GENEIO è ancora un GENEIO;

(Ma c'è molto più di questo...)

Costruzione di GENEIO usando misure permutanti

Consideriamo l'insieme $\Phi = \mathbb{R}^X \cong \mathbb{R}^n$ di tutte le funzioni da un insieme finito $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ a $\mathbb{R}$, e un sottogruppo G del gruppo $\text{Bij}(X)$ di tutte le permutazioni di X .

Definizione

*Una misura finita (con segno) μ su $\text{Bij}(X)$ è detta una **misura permutante** rispetto a G se ogni sottoinsieme H di $\text{Bij}(X)$ è misurabile e μ è invariante sotto l'azione di coniugio di G (cioè, $\mu(H) = \mu(gHg^{-1})$ per ogni $g \in G$).*

Teorema di rappresentazione per i GENEО lineari

Le misure permutanti ci interessano a causa di questo teorema:

Teorema

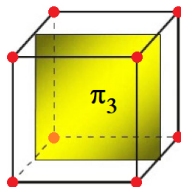
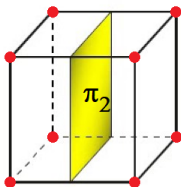
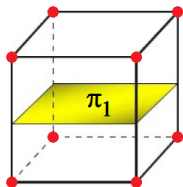
Assumiamo che $G \subseteq \text{Bij}(X)$ agisca transitivamente sull'insieme finito X e che F sia una mappa da $\mathbb{R}^X$ a $\mathbb{R}^X$. La mappa F è un GENEО lineare da $\mathbb{R}^X$ a $\mathbb{R}^X$ rispetto all'omomorfismo identico Id_G se e solo se esiste una misura permutante μ rispetto a G , tale che
$$F(\varphi) = \sum_{h \in \text{Bij}(X)} \varphi h^{-1} \mu(h) \text{ per ogni } \varphi \in \mathbb{R}^X, \text{ e } \sum_{h \in \text{Bij}(X)} |\mu(h)| \leq 1.$$

NB: L'insieme $\text{PM}(G)$ delle misure permutanti rispetto a G è un reticolo e uno spazio vettoriale reale.

Un esempio di misura permutante

Consideriamo l'insieme X dei vertici di un cubo in $\mathbb{R}^3$, e il gruppo G delle isometrie di $\mathbb{R}^3$ che portano X in X e conservano l'orientazione. Siano π_1, π_2, π_3 i tre piani che contengono il baricentro di X e sono paralleli a una faccia del cubo. Sia $h_i : X \rightarrow X$ la simmetria ortogonale rispetto a π_i , per $i \in \{1, 2, 3\}$.

Possiamo ora definire una misura permutante μ sul gruppo $\text{Bij}(X)$ ponendo $\mu(h_1) = \mu(h_2) = \mu(h_3) = c$, dove c è un numero reale positivo, e $\mu(h) = 0$ per ogni $h \in \text{Bij}(X)$ con $h \notin \{h_1, h_2, h_3\}$.



Perché costruire GENEО tramite misure permutanti?

Osserviamo che più il supporto di una misura permutante μ è piccolo, più la sommatoria $F_\mu(\varphi) := \sum_{h \in \text{Bij}(X)} \varphi h^{-1} \mu(h)$ che definisce il GENEО associato è semplice da calcolare. Nell'esempio appena visto il gruppo $\text{Bij}(X)$ ha cardinalità 40.320, il gruppo di equivarianza G contiene 24 elementi, mentre il supporto della misura permutante contiene soltanto 3 permutazioni di X .

L'utilità del metodo costruttivo basato sulle misure permutanti sta nel fatto che spesso possiamo usare permutanti piuttosto piccoli.

Per chi vuole maggiori dettagli

Maggiori dettagli sul metodo delle misure permutanti possono essere trovati in questo articolo:

Annals of Mathematics and Artificial Intelligence
<https://doi.org/10.1007/s10472-022-09830-1>

On the finite representation of linear group equivariant operators via permutant measures

Giovanni Bocchi¹ · Stefano Botteghi² · Martina Brasini² · Patrizio Frosini²  · Nicola Quercioli³

Accepted: 26 December 2022
© The Author(s) 2023

<https://rdcu.be/c5Obw>

Costruzione di GENEО non lineari

Il metodo per costruire GENEО basati su misure permutanti può essere generalizzato sostituendo la media aritmetica con un'altra funzione simmetrica. Per farlo, ricordiamo il concetto di *permutante*, che equivale a quello di *misura permutante uniformemente distribuita sul suo supporto*.

Definizione

Un insieme $H \subseteq \text{Bij}(X)$ è un **permutante** per G se $H = \emptyset$ o $gHg^{-1} = H$ per ogni $g \in G$.

Nel prossimo lucido vedremo che quando abbiamo una funzione simmetrica e un **permutante** per il gruppo di equivarianza G , possiamo facilmente costruire un GENEО (generalmente non lineare) da (Φ, G) a $(\mathbb{R}^X, G)$ rispetto all'omomorfismo identico $\text{id}_G : G \rightarrow G$.

Costruzione di GENEIO non lineari

Sia $\mathcal{S} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione simmetrica. Se $H = \{h_i\}_{i=1}^n$ è un permutante non vuoto per $G \subseteq \text{Bij}_\Phi(X)$, allora possiamo definire un operatore $\mathcal{S}_H : \Phi \rightarrow \mathbb{R}^X$ ponendo, per ogni $\varphi \in \Phi$,

$$\mathcal{S}_H(\varphi) := \mathcal{S}(\varphi \circ h_1, \dots, \varphi \circ h_n),$$

dove $\mathcal{S}(\varphi \circ h_1, \dots, \varphi \circ h_n)(x) := \mathcal{S}((\varphi \circ h_1)(x), \dots, (\varphi \circ h_n)(x))$ per ogni $x \in X$.

Proposizione

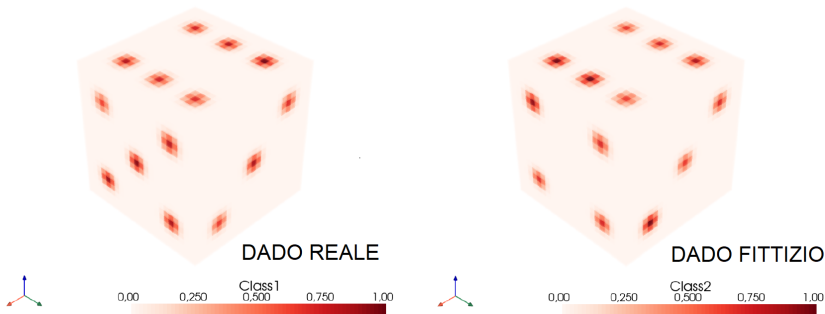
$\mathcal{S}_H$ è un GEO da (Φ, G) a $(\mathbb{R}^X, G)$ rispetto all'omomorfismo identico $\text{id}_G : G \rightarrow G$. Se la restrizione di $\mathcal{S}$ a $\text{Im}(\Phi)^n$ è non espansiva, allora $\mathcal{S}_H$ è un **GENEIO** da (Φ, G) a $(\mathbb{R}^X, G)$ rispetto a id_G .

Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENEIO come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENEIO nelle applicazioni?
- 4 Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione
- 5 Alcune informazioni aggiuntive
- 6 Conclusioni

Cosa succede quando applichiamo GENE0 ai dati?

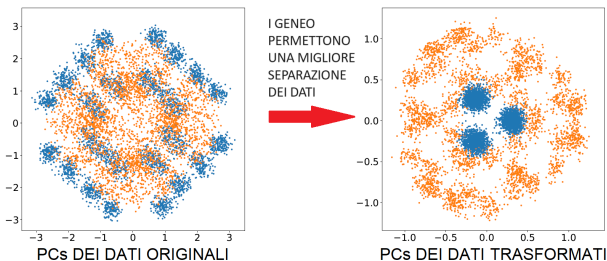
Un esempio di utilizzo: confronto tra dadi veri e dadi falsi.



(Esperimento e calcoli di Giovanni Bocchi)

Cosa succede quando applichiamo GENE0 ai dati?

Abbiamo prodotto 10000 dadi (un training set di cardinalità 7000 e un test set di cardinalità 3000), abbiamo poi applicato la PCA al test set e al test set trasformato da un GENE0 ottimizzato sul training set:



Per ogni matrice vengono riportate le prime due componenti principali. I punti blu sono associati ai **dadi reali**, mentre quelli arancioni a **dadi falsi**. Il GENE0 che utilizziamo è una **combinazione convessa di 3 GENE0 definiti da misure permutanti**.

Un'applicazione reale: ricerca di tasche nelle proteine

GENEOnet: A new machine learning paradigm based on Group Equivariant Non-Expansive Operators. An application to protein pocket detection.

Giovanni Bocchi ¹, Patrizio Frosini ², Alessandra Micheletti ¹, Alessandro Pedretti ³
Carmen Gratteri ⁴, Filippo Lunghini ⁵, Andrea Rosario Beccari ⁵ and Carmine Talarico ⁵

¹ Department of Environmental Science and Policy, Università degli Studi di Milano

² Department of Mathematics, Università degli Studi di Bologna

³ Department of Pharmaceutical Sciences, Università degli Studi di Milano

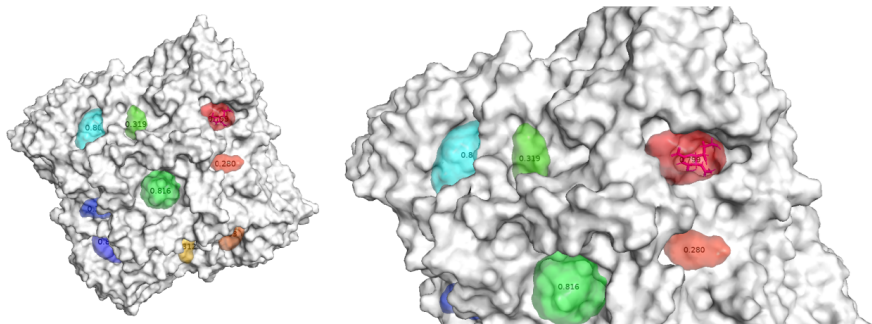
⁴ Dipartimento di Scienze della Salute, Università degli Studi "Magna Græcia di Catanzaro"

⁵ Dompé Farmaceutici SpA

<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/2202/2202.00451.pdf>

I risultati di questa ricerca verranno presentati a xAI-2024 (The 2nd World Conference on eXplainable Artificial Intelligence).

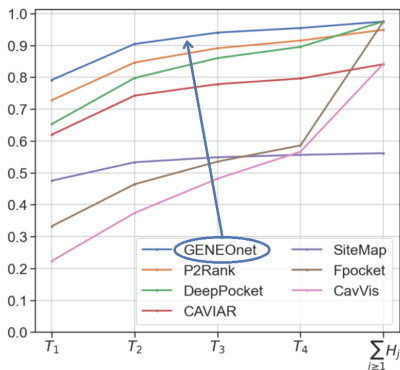
Un'applicazione reale: ricerca di tasche nelle proteine



La ricerca delle tasche nelle proteine può essere effettuata identificando un GNEO ottimale nell'involuppo convesso di 8 GNEO (ciascuno focalizzato su una particolare proprietà delle tasche).

Un'applicazione reale: ricerca di tasche nelle proteine

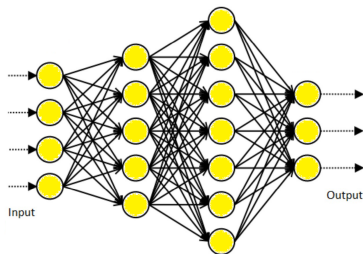
Ecco i risultati dei nostri esperimenti:



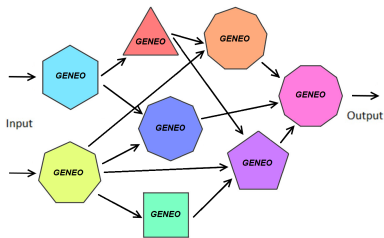
Occorre tenere presente che GENEOnet utilizza 17 parametri, mentre una CNN come DeepPocket richiede 665122 parametri.

Uso dei GENEIO nel Machine Learning

In prospettiva, stiamo cercando di sviluppare una buona teoria compositiva per costruire reti efficienti di GENEIO. Alcuni esperimenti preliminari suggeriscono che la sostituzione dei neuroni con GENEIO potrebbero rendere il deep learning più trasparente e interpretabile e velocizzare il processo di apprendimento.



RETE NEURALE



RETE DI GENEIO

Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENEIO come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENEIO nelle applicazioni?
- 4 Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione**
- 5 Alcune informazioni aggiuntive
- 6 Conclusioni

Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione

La rappresentazione operatoriale
del concetto di osservatore
ha un'altra importante conseguenza:
una sorta di «**principio di contraddizione**».



Available online at www.sciencedirect.com



ScienceDirect

Cognitive Systems Research 10 (2009) 297–315

**Cognitive Systems
RESEARCH**

www.elsevier.com/locate/cogsys

Does intelligence imply contradiction?

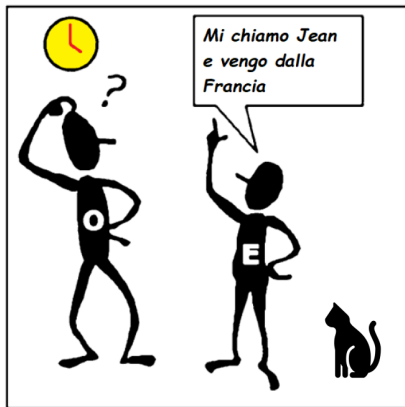
Action editor: Vasant Honavar

P. Frosini*

Department of Mathematics and ARCES, University of Bologna, I-40126 Bologna, Italy

Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione

Cosa intendiamo per contraddizione?



Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione

Teorema: Ogni entità sufficientemente intelligente è contraddittoria.



*Ludwig Josef Johann Wittgenstein
(Vienna, 26 aprile 1889 –
Cambridge, 29 aprile 1951)*

Le sette asserzioni principali

1. Il mondo è tutto ciò che accade.
2. Ciò che accade, il fatto, è il sussistere di stati di cose.
3. L'immagine logica dei fatti è il pensiero.
4. Il pensiero è la proposizione munita di senso.
5. La proposizione è una funzione di verità delle proposizioni elementari.
6. La forma generale della funzione di verità è: $[p, \xi, N(\xi)]$. Questa è la forma generale della proposizione.
7. Su ciò di cui non si può parlare, si deve tacere.

Tractatus Logico-Philosophicus

By
LUDWIG WITGENSTEIN

With an Introduction by
BERTRAND RUSSELL, F.R.S.



NEW YORK
HARCOURT, BRACE & COMPANY, INC.
LONDON: KEGAN PAUL, TRENCH, TRUBNER & CO., LTD.
1922

Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione

In modo equivalente possiamo dire che

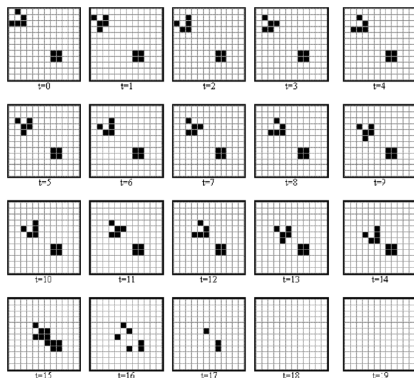
Il comportamento di ogni entità
sufficientemente intelligente è imprevedibile.



Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione

Come dimostrarlo?

È possibile un approccio basato sugli automi cellulari.



Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione

Linea dimostrativa:

- Si individua un osservatore (inteso come un operatore che trasforma le funzioni che rappresentano gli stati dell'automa cellulare in funzioni che descrivono l'entità percepita e l'ambiente che la circonda).
- Si definisce l'intelligenza di una entità come la sua capacità di sopravvivere nell'ambiente secondo il giudizio dell'osservatore.
- Si prova che esiste una soglia per l'intelligenza (dipendente dal numero di stati che l'osservatore può associare all'entità e all'ambiente), oltre la quale l'entità osservata appare **necessariamente contraddittoria** all'osservatore prescelto.

In questo modello, quindi, la contraddittorietà e la non predicibilità non appaiono come limitazioni delle strutture intelligenti ma come condizioni necessarie per lo sviluppo di comportamenti intellettivi complessi.

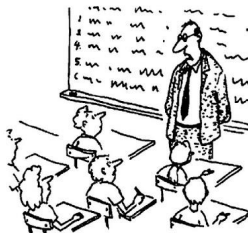
Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione

Teorema. Sia E un'entità avente lunghezza finita di vita e si supponga che il suo ambiente sia deterministico. Se l'intelligenza di E è maggiore del prodotto delle cardinalità degli insiemi P_{ent} e P_{ENV} l'entità E deve essere necessariamente contraddittoria.

ATTENZIONE!: Il teorema non asserisce che le entità intelligenti devono cambiare il loro comportamento (fatto ovvio) ma che devono farlo senza che l'osservatore ne comprenda il motivo.

P_{ent} = insieme degli stati di E
riconosciuti dall'osservatore.

P_{ENV} = insieme degli stati dell'ambiente
riconosciuti dall'osservatore.



Mi aspetto che voi siate autonomi, creativi, critici e che facciate tutto quello che dico io.

Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione

La formalizzazione matematica di questo approccio può essere trovata nell'articolo

P. Frosini, Does intelligence imply contradiction?, Cognitive Systems Research, vol. 10 (2009), n. 4, 297-315.

(Chi lo desidera può trovare una presentazione dell'articolo realizzata da Mattia G. Bergomi al link

<https://mgbergomi.github.io/Contradiction/> e un'introduzione informale all'argomento al link

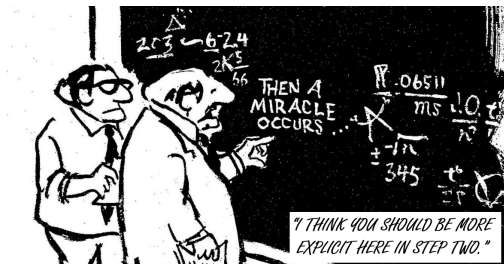
[http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/langolo-arguto/lintelligenza-della-contraddizione/.](http://maddmaths.simai.eu/divulgazione/langolo-arguto/lintelligenza-della-contraddizione/))

Il preprint dell'articolo è disponibile a questo link:

<https://arxiv.org/pdf/0801.0232.pdf>.

Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione

Abbiamo visto che ogni agente A appare imprevedibile agli occhi di un osservatore prefissato se l' "intelligenza" di A supera una soglia espressa dal prodotto del numero di stati che l'osservatore può percepire nell'agente e nel contesto ambientale. Ciò implica che per avere prevedibilità di comportamento occorre scegliere modelli in cui la predetta soglia sia più grande del valore di intelligenza desiderato.



Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENEIO come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENEIO nelle applicazioni?
- 4 Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione
- 5 Alcune informazioni aggiuntive**
- 6 Conclusioni

Un riferimento bibliografico sul modello matematico

nature
machine intelligence

ARTICLES

<https://doi.org/10.1038/s42256-019-0087-3>

Towards a topological-geometrical theory of group equivariant non-expansive operators for data analysis and machine learning

Mattia G. Bergomi¹, Patrizio Frosini^{2,3*}, Daniela Giorgi⁴ and Nicola Quercioli^{2,3}

We provide a general mathematical framework for group and set equivariance in machine learning. We define group equivariant non-expansive operators (GENEOs) as maps between function spaces associated with groups of transformations. We study the topological and metric properties of the space of GENEOs to evaluate their approximating power and set the basis for general strategies to initialize and compose operators. We define suitable pseudo-metrics for the function spaces, the equivariance groups and the set of non-expansive operators. We prove that, under suitable assumptions, the space of GENEOs is compact and convex. These results provide fundamental guarantees in a machine learning perspective. By considering isometry-equivariant non-expansive operators, we describe a simple strategy to select and sample operators. Thereafter, we show how selected and sampled operators can be used both to perform classical metric learning and to inject knowledge in artificial neural networks.

<https://rdcu.be/bP6HV>

Un articolo sull'uso dei GENEIO nel Machine Learning

Per maggiori dettagli sull'uso di GENEIO nel Machine Learning:



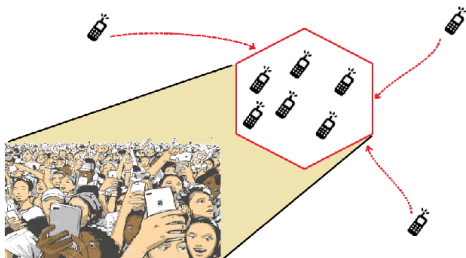
The screenshot shows the EMS (European Mathematical Society) Magazine website. The header includes the EMS logo and navigation links: News, Magazine, Membership, Services, Activities, and Society Overview. A 'Login' button is in the top right. The main content area features an article titled 'A new paradigm for artificial intelligence based on group equivariant non-expansive operators' by Alessandra Micheletti, from the University of Studi di Milano, Italy. The article is dated 24 April 2023. On the left, there is a thumbnail image of the EMS Magazine cover, which includes the title 'EMS Magazine' and a graphic of a blue sphere with a white line.

- A. Micheletti, *A new paradigm for artificial intelligence based on group equivariant non-expansive operators*, In: *EMS Magazine*, 128 (2023), pp. 4–12.
- <https://ems.press/content/serial-article-files/27673>

Alcuni progetti ricerca

CNIT / WiLab - Huawei Joint Innovation Center (JIC)

Project on GENEOS for 6G



WILAB



HUAWEI

Alcuni progetti ricerca



Horizon Europe (HORIZON)

Call: HORIZON-CL4-2023-HUMAN-01-CNECT

Project: 101135775 — PANDORA

Funding: approximately 9 million euros.

Task 3.3 - Leveraging domain knowledge for explainable learning:

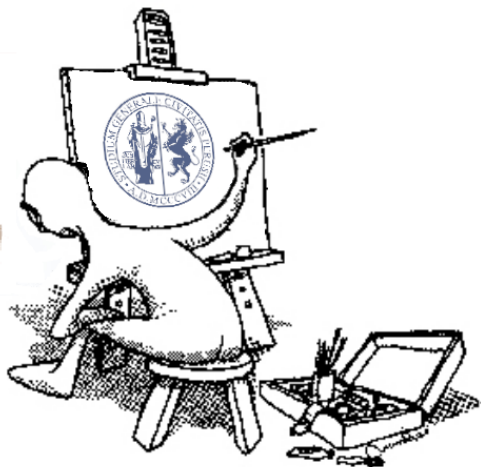
This task aims to investigate the use of domain knowledge in the development of explainable AI models. Tools like GENEOS for applications in TDA and ML and new theoretical methods of GENEOS for explainable AI will be used.

Sommario

- 1 Perché questo seminario?
- 2 I GENEIO come rappresentazione geometrica degli osservatori
- 3 Come possiamo usare i GENEIO nelle applicazioni?
- 4 Operatori funzionali, intelligenza e contraddizione
- 5 Alcune informazioni aggiuntive
- 6 Conclusioni**

Conclusioni

- Nella ricerca sull'apprendimento automatico potrebbe essere interessante spostare l'attenzione dallo spazio dei dati allo spazio degli osservatori.
- Questo cambiamento di prospettiva richiede lo sviluppo di nuovi modelli topologici e geometrici adatti a studiare la “forma” degli spazi di osservatori.
- L'approccio che abbiamo descritto ci offre vari risultati potenzialmente utili nella ricerca sull'intelligenza artificiale.



***GRAZIE PER
L'ATTENZIONE***