
7 gennaio 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:

MATRICOLA: $\Rightarrow \mathbf{a} = \quad , \mathbf{b} = \quad , \mathbf{c} = \quad$

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2, b = 5, c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

- (**X**) (F) La somma di due matrici triangolari superiori $n \times n$ è una matrice triangolare superiore $n \times n$.
- (**X**) (F) Ogni spazio vettoriale reale finitamente generato ammette almeno una base.
- (**X**) (F) La composizione di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è ancora un endomorfismo di V .
- (**X**) (F) Ogni sottospazio affine di \mathbb{R}^n si può rappresentare come insieme delle soluzioni di un sistema lineare.
- (V) (**K**) La matrice di un cambiamento di base può essere non invertibile.
- (**X**) (F) Se $A, B \in M_8(\mathbb{R})$ e $A = -B^T$ allora $\det(A) = \det(B)$.
- (V) (**K**) Se due vettori sono uno multiplo dell'altro il loro prodotto scalare è nullo.
- (**X**) (F) Se v è un autovettore di un endomorfismo $T : V \rightarrow V$ invertibile allora è anche un autovettore di T^{-1} .
- (V) (**K**) Tutti gli endomorfismi di \mathbb{R}^5 ammettono una base spettrale.
- (V) (**K**) Ogni polinomio reale nelle variabili x, y rappresenta una conica del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 (5 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Al variare del parametro reale k , calcolare gli autovalori (2 punti) e stabilire la diagonalizzabilità (3 punti) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & k + \alpha + \beta \\ 0 & \beta + \gamma & 0 \\ k + \alpha - \beta & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

AUTOVALORI: $\beta + \gamma, \pm(k + \alpha)$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq -\alpha$.

ESERCIZIO 2 (4 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per i punti $P(\alpha, -\beta, -\gamma)$ e $Q(0, 0, 1)$, e parallelo alla retta r di equazioni parametriche $x = \alpha t + \alpha$, $y = \beta$, $z = -t - \gamma$.

EQUAZIONE DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : \beta x - \alpha \gamma y + \alpha \beta z - \alpha \beta = 0$.

ESERCIZIO 3 (4 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Determinare una base del sottospazio di \mathbb{R}^4 di equazione cartesiana $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + u = 0 \\ \alpha x - \beta y + \gamma z - u = 0 \end{cases}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{(-\gamma, 0, \alpha, 0), (0, 1, 0, -\beta)\}$.

ESERCIZIO 4 (4 punti) Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\beta & -\gamma \\ 0 & -(1 + 2\alpha) & k + \beta & -2\gamma \\ 0 & k - \alpha & 2\beta & -2\gamma \\ 0 & 0 & k - \beta & 0 \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \ker T_k$ e $\dim \text{Im} T_k$ al variare del parametro reale k .

RISPOSTA: Se $k \neq -(\alpha + 1), \beta$ vale $\text{rank} A_k = 4 = \dim \text{Im} T_k$ e dunque $\dim \ker T_k = 0$. Se $k = -(\alpha + 1), \beta$ allora $\text{rank} A_k = 3 = \dim \text{Im} T_k$ e dunque $\dim \ker T_k = 1$.

ESERCIZIO 5 (3 punti) Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Dire per quali valori del parametro reale k la seguente è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[t]$ dei polinomi nella indeterminata t , a coefficienti in \mathbb{R} e di grado non superiore a 3:

$$\{-1 + \alpha t - t^2 + \beta t^3, kt + 2t^2, 3 + kt^3, 2\gamma t + t^2\}.$$

RISPOSTA: È una base se e solo se $t \neq -3\beta, 4\gamma$.

NOME:

MATRICOLA: $\Rightarrow a=$, $b=$, $c=$

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2, b = 5, c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(**X**) (F) In \mathbb{C} si ha che $\frac{i+1}{i-1} = -i$.

(**X**) (F) Ogni matrice quadrata reale con determinante nullo è non invertibile.

(**X**) (F) Un endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione dispari non può avere nucleo e immagine della stessa dimensione.

(V) (**K**) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

(**X**) (F) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare (definito positivo) sullo spazio vettoriale V e $\| \cdot \|$ è la rispettiva norma allora si ha che $|\langle u, v + w \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ per ogni $u, v, w \in V$ con $u \perp w$.

(V) (**K**) L'unione di due sottoinsiemi linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V è ancora un sottoinsieme linearmente indipendente di V .

(V) (**K**) Due matrici reali $n \times n$ coincidono se e solo se hanno lo stesso polinomio caratteristico.

(**X**) (F) Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile ed ha traccia e determinante positivi, allora tutti i suoi autovalori sono positivi.

(V) (**K**) Ogni spazio vettoriale reale dotato di prodotto scalare ammette una ed una sola base ortonormale.

(V) (**K**) L'equazione $-2x^2 - 3y^2 = -1$ rappresenta una iperbole del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 (5 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Al variare del parametro reale k , calcolare gli autovalori (2 punti) e stabilire la diagonalizzabilità (3 punti) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & k - \alpha - \beta \\ 0 & -(\beta + \gamma) & 0 \\ k - \alpha + \beta & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

AUTOVALORI: $-(\beta + \gamma)$, $\pm(k - \alpha)$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq \alpha$.

ESERCIZIO 2 (4 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per i punti $P(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ e $Q(1, 0, 0)$, e parallelo alla retta r di equazioni parametriche $x = t + \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma t + \gamma$.

EQUAZIONE DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : \beta\gamma x - \alpha\gamma y - \beta z - \beta\gamma = 0$.

ESERCIZIO 3 (4 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Determinare una base del sottospazio di \mathbb{R}^4 di equazione cartesiana $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + u = 0 \\ \alpha x - \beta y - \gamma z + u = 0 \end{cases}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{(1, 0, 0, -\alpha), (0, -\gamma, \beta, 0)\}$.

ESERCIZIO 4 (4 punti) Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -(1 + 2\beta) & k - \beta & 0 \\ -\alpha & k + \alpha & 2\alpha & k - \alpha \\ -\gamma & -2\gamma & -2\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \ker T_k$ e $\dim \text{Im} T_k$ al variare del parametro reale k .

RISPOSTA: Se $k \neq -(\beta + 1)$, α vale $\text{rank} A_k = 4 = \dim \text{Im} T_k$ e dunque $\dim \ker T_k = 0$. Se $k = -(\beta + 1)$, α allora $\text{rank} A_k = 3 = \dim \text{Im} T_k$ e dunque $\dim \ker T_k = 1$.

ESERCIZIO 5 (3 punti) Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Dire per quali valori del parametro reale k la seguente è una base per lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti in \mathbb{R} :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ -1 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2\gamma \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

RISPOSTA: È una base se e solo se $t \neq -2\beta, 3\gamma$.

NOME:

MATRICOLA: $\Rightarrow a=$, $b=$, $c=$

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2, b = 5, c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

- (**X**) (F) Un sottoinsieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ di uno spazio vettoriale reale V di dimensione n , costituito da n vettori distinti, è linearmente indipendente se e solo se è un sistema di generatori per V .
- (V) (**K**) In \mathbb{C} si ha che $(2i + 3)(i - 1) = 2i - 3$.
- (V) (**K**) La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale.
- (**X**) (F) La somma di due endomorfismi di uno spazio vettoriale V è un endomorfismo di V .
- (**X**) (F) Se la somma di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V è uguale a V e la somma delle loro dimensioni è uguale a $\dim V$, allora i due sottospazi hanno in comune il solo vettore nullo.
- (V) (**K**) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare (definito positivo) sullo spazio vettoriale V e $\| \cdot \|$ è la rispettiva norma allora si ha che $\|u - v\| \leq \|u\| - \|v\|$ per ogni $u, v \in V$.
- (**X**) (F) L'insieme delle matrici reali antisimmetriche $n \times n$ (cioè le matrici reali $n \times n$ che coincidono con l'opposta della loro trasposta) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- (**X**) (F) Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$ due vettori uno multiplo dell'altro. Allora $(u + v) \wedge (u - v)$ è il vettore nullo.
- (**X**) (F) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico, allora hanno gli stessi autovalori.
- (**X**) (F) I piani di equazioni cartesiane $x + y = 1$ e $x - y + z = 0$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard \mathbb{R}^3 .

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 (5 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Al variare del parametro reale k , calcolare gli autovalori (2 punti) e stabilire la diagonalizzabilità (3 punti) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & k + \alpha + \beta \\ 0 & \beta + \gamma & 0 \\ k + \alpha - \beta & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

AUTOVALORI: $\beta + \gamma, \pm(k + \alpha)$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq -\alpha$.

ESERCIZIO 2 (4 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per i punti $P(\alpha, -\beta, -\gamma)$ e $Q(0, 0, 1)$, e parallelo alla retta r di equazioni parametriche $x = \alpha t + \alpha$, $y = \beta$, $z = -t - \gamma$.

EQUAZIONE DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : \beta x - \alpha \gamma y + \alpha \beta z - \alpha \beta = 0$.

ESERCIZIO 3 (4 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Determinare una base del sottospazio di \mathbb{R}^4 di equazione cartesiana $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + u = 0 \\ \alpha x - \beta y + \gamma z - u = 0 \end{cases}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{(-\gamma, 0, \alpha, 0), (0, 1, 0, -\beta)\}$.

ESERCIZIO 4 (4 punti) Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -\beta & -\gamma \\ 0 & -(1 + 2\alpha) & k + \beta & -2\gamma \\ 0 & k - \alpha & 2\beta & -2\gamma \\ 0 & 0 & k - \beta & 0 \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \ker T_k$ e $\dim \text{Im} T_k$ al variare del parametro reale k .

RISPOSTA: Se $k \neq -(\alpha + 1)$, β vale $\text{rank} A_k = 4 = \dim \text{Im} T_k$ e dunque $\dim \ker T_k = 0$. Se $k = -(\alpha + 1)$, β allora $\text{rank} A_k = 3 = \dim \text{Im} T_k$ e dunque $\dim \ker T_k = 1$.

ESERCIZIO 5 (3 punti) Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Dire per quali valori del parametro reale k la seguente è una base per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[t]$ dei polinomi nella indeterminata t , a coefficienti in \mathbb{R} e di grado non superiore a 3:

$$\{-1 + \alpha t - t^2 + \beta t^3, kt + 2t^2, 3 + kt^3, 2\gamma t + t^2\}.$$

RISPOSTA: È una base se e solo se $t \neq -3\beta, 4\gamma$.

NOME:

MATRICOLA: $\Rightarrow a=$, $b=$, $c=$

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2, b = 5, c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

- (V) (K) Ogni spazio vettoriale finitamente generato contiene un numero finito di sottospazi vettoriali.
- (V) (K) Ogni polinomio reale di grado n ammette esattamente n radici reali.
- (V) (K) Se $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ sono matrici invertibili, allora $A + B$ è invertibile e $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
- (V) (K) Ogni matrice quadrata che abbia una riga i cui termini siano tutti uguali fra loro ha determinante nullo.
- (V) (K) Ogni trasformazione lineare è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- (V) (K) Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n^2 .
- (V) (K) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e p_A, p_B, p_{A+B} sono i polinomi caratteristici di $A, B, A + B$, allora $p_{A+B} = p_A + p_B$.
- (V) (K) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre maggiore o uguale di quella algebrica.
- (V) (K) Un qualunque insieme di vettori a due a due ortogonali di uno spazio vettoriale V dotato di prodotto scalare è una base di V .
- (V) (K) Le rette di equazioni parametriche $x = 0, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = 1, z = t$ sono parallele nello spazio euclideo standard \mathbb{R}^3 .

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 (5 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Al variare del parametro reale k , calcolare gli autovalori (2 punti) e stabilire la diagonalizzabilità (3 punti) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -\beta & 0 & k - \alpha - \beta \\ 0 & -(\beta + \gamma) & 0 \\ k - \alpha + \beta & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

AUTOVALORI: $-(\beta + \gamma)$, $\pm(k - \alpha)$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq \alpha$.

ESERCIZIO 2 (4 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per i punti $P(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ e $Q(1, 0, 0)$, e parallelo alla retta r di equazioni parametriche $x = t + \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma t + \gamma$.

EQUAZIONE DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : \beta\gamma x - \alpha\gamma y - \beta z - \beta\gamma = 0$.

ESERCIZIO 3 (4 punti) Si ponga $\alpha = a + 1$, $\beta = b + 1$, $\gamma = c + 1$. Determinare una base del sottospazio di \mathbb{R}^4 di equazione cartesiana $\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + u = 0 \\ \alpha x - \beta y - \gamma z + u = 0 \end{cases}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{(1, 0, 0, -\alpha), (0, -\gamma, \beta, 0)\}$.

ESERCIZIO 4 (4 punti) Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & -(1 + 2\beta) & k - \beta & 0 \\ -\alpha & k + \alpha & 2\alpha & k - \alpha \\ -\gamma & -2\gamma & -2\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \ker T_k$ e $\dim \text{Im} T_k$ al variare del parametro reale k .

RISPOSTA: Se $k \neq -(\beta + 1)$, α vale $\text{rank} A_k = 4 = \dim \text{Im} T_k$ e dunque $\dim \ker T_k = 0$. Se $k = -(\beta + 1)$, α allora $\text{rank} A_k = 3 = \dim \text{Im} T_k$ e dunque $\dim \ker T_k = 1$.

ESERCIZIO 5 (3 punti) Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Dire per quali valori del parametro reale k la seguente è una base per lo spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine 2 a coefficienti in \mathbb{R} :

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 & -\alpha \\ -1 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & k \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2\gamma \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

RISPOSTA: È una base se e solo se $t \neq -2\beta, 3\gamma$.
