13 febbraio 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) Se A e B sono due matrici diagonali $n \times n$ allora $AB = BA$.

(X) (F) Due spazi vettoriali reali di dimensione finita hanno la stessa dimensione se e solo se sono fra loro isomorfi.

(X) (F) Ogni matrice associata ad un isomorfismo da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ rispetto ad una base B di $\mathbb{R}^n$ è invertibile.

(V) (X) Ogni sistema lineare di n equazioni in n incognite ammette una soluzione.

(V) (X) Una trasformazione lineare T fra due spazi vettoriali reali di dimensione finita è iniettiva se e solo se $\dim \operatorname{Ker} T = \dim \operatorname{Im} T$.

(X) (F) Nessuna matrice ortogonale è singolare.

(X) (F) Non esiste nessuna matrice $A \in M_5(\mathbb{R})$ tale che $A^2 = -I$ (I matrice identica $n \times n$).

(X) (F) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^3$ e sia (v_1, v_2, v_3) una base ordinata di $\mathbb{R}^3$. Se $S(v_1) = T(v_1)$, $S(v_2) = T(v_2)$ e $S(v_3) = T(v_3)$ allora gli endomorfismi S e T coincidono.

(V) (X) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^8$ ammette una ed una sola base spettrale.

(V) (X) Se u e v sono due autovettori non nulli di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associati a due autovalori distinti allora sono fra loro ortogonali.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(6 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Calcolare gli autovalori (*1 punto*) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ 2\beta & 2\beta & -2\gamma \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

Dopo aver verificato che A è diagonalizzabile, calcolarne una base spettrale (*4 punti*) e la relativa forma diagonale (*1 punto*).

AUTOVALORI: -2α, 2β.

BASE SPETTRALE: una possibile base spettrale è $\{(0,1,0),(\gamma,0,\beta),(0,\gamma,\alpha+\beta)\}$.

FORMA DIAGONALE DI A: rispetto alle base indicata, la forma diagonale di A è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Nello spazio euclideo standard, si consideri la retta r di rappresentazione parametrica $r : (x, y, z) = (1, 0, -\gamma) + t(2\alpha, 0, 0)$, e la retta s di rappresentazione cartesiana $s : x - y = 0,\ \sqrt{2}x + z - \gamma = 0$. Determinare una direzione per r ed una per s (*1 punto*). Determinare quanto misura l'angolo formato da r ed s (*2 punti*), e fornire una rappresentazione parametrica per la retta passante per $P(\alpha, \beta, \gamma)$ ed ortogonale ad r e ad s (*2 punti*).

DIREZIONI DELLE DUE RETTE: una possibile direzione per r è data dal vettore $(2\alpha, 0, 0)$. Una possibile direzione per s è data dal vettore $(1, 1, -\sqrt{2})$.

ANGOLO: Rispetto alle direzioni scelte, l'angolo compreso tra le due rette misura $\frac{\pi}{3}$ radianti.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : (x, y, z) = (\alpha, \beta, \gamma) + t(0, \sqrt{2}, 1)$.

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a + 2$, $\beta = b + 2$, $\gamma = c + 2$. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4[t]$ dato da $W = \{p(t) \in \mathbb{R}^4[t] : \gamma\frac{d^2p}{dt^2}(0) + \alpha\frac{dp}{dt}(0) - \beta p(0) = 0,\ \alpha\frac{d^3p}{dt^3}(0) - \beta p(0) = 0\}$. (Suggerimento: porre $p(t) = xt^4 + yt^3 + zt^2 + ut + w$ con x, y, z, u, w parametri reali incogniti.)

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{t^4, t^3 + 6t + \frac{6\alpha}{\beta}, t^2 - \frac{2\gamma}{\alpha}t\}$.

`ESERCIZIO 4` *(4 punti)* Si ponga $\alpha = a + 2$, $\beta = b + 2$, $\gamma = c + 2$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k & -\beta & -\beta \\ \alpha & k^2 - (\alpha + 1) & \alpha + 1 & \alpha + 1 \\ 0 & 0 & k - \gamma & k - \gamma \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim\ker T_k$ e $\dim \mathrm{Im} T_k$ al variare del parametro reale k.

RISPOSTA: Se $k \neq -(\alpha+1), 1, \gamma$ vale $\mathrm{rank} A_k = 3 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 1$. Se $k = -(\alpha+1), 1, \gamma$ allora $\mathrm{rank} A_k = 2 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 2$.

---

13 febbraio 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) **($\cancel{\mathbf{F}}$)** Se $z \in \mathbb{C}$ e $z^5 = 1$ allora $z = 1$.

($\cancel{\mathbf{V}}$) **(F)** Per ogni numero reale θ la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ è ortogonale.

(V) **($\cancel{\mathbf{F}}$)** Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale V. Allora, dato un qualunque vettore $v \in V$, l'insieme $T^{-1}(v)$ è un sottospazio vettoriale di V.

(V) **($\cancel{\mathbf{F}}$)** Se $A \in M_8(\mathbb{R})$ è invertibile allora cancellando una riga qualunque ed una colonna qualunque di A si ottiene una matrice 7×7 invertibile.

($\cancel{\mathbf{V}}$) **(F)** Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare (definito positivo) sullo spazio vettoriale V allora si ha che $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ per ogni $u, v \in V$.

(V) **($\cancel{\mathbf{F}}$)** Due sistemi di generatori di uno stesso spazio vettoriale V hanno sempre la stessa cardinalità.

($\cancel{\mathbf{V}}$) **(F)** Se una matrice reale $n \times n$ ha determinante nullo allora ammette almeno un autovalore reale.

(V) **($\cancel{\mathbf{F}}$)** Ogni matrice triangolare è diagonalizzabile per similitudine.

($\cancel{\mathbf{V}}$) **(F)** Consideriamo lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare canonico. Se A è la matrice associata ad un endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ e A è ortogonale allora T è una isometria.

(V) **($\cancel{\mathbf{F}}$)** L'equazione $x^2 - y^2 = 0$ rappresenta una ellisse del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(6 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Calcolare gli autovalori (*1 punto*) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2\gamma & -2\alpha & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta & 2\gamma \end{pmatrix}.$$

Dopo aver verificato che A è diagonalizzabile, calcolarne una base spettrale (*4 punti*) e la relativa forma diagonale (*1 punto*).

AUTOVALORI: -2α, 2γ.

BASE SPETTRALE: una possibile base spettrale è $\{(1,0,0), (\alpha, \alpha+\gamma, -\beta), (0,0,1)\}$.

FORMA DIAGONALE DI A: rispetto alle base indicata, la forma diagonale di A è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma \end{pmatrix}.$$

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Nello spazio euclideo standard, si consideri la retta r di rappresentazione parametrica $r : (x, y, z) = (-\alpha, 0, 1) + t(2\beta, 0, 0)$, e la retta s di rappresentazione cartesiana $s : x - 2y = 0,\ \sqrt{3}y - z - \beta = 0$. Determinare una direzione per r ed una per s (*1 punto*). Determinare quanto misura l'angolo formato da r ed s (*2 punti*), e fornire una rappresentazione parametrica per la retta passante per $P(\alpha, \beta, -\gamma)$ ed ortogonale ad r e ad s (*2 punti*).

DIREZIONI DELLE DUE RETTE: una possibile direzione per r è data dal vettore $(2\beta, 0, 0)$. Una possibile direzione per s è data dal vettore $(2, 1, \sqrt{3})$.

ANGOLO: Rispetto alle direzioni scelte, l'angolo compreso tra le due rette misura $\frac{\pi}{4}$ radianti.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : (x, y, z) = (\alpha, \beta, -\gamma) + t(0, -\sqrt{3}, 1)$.

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a + 2$, $\beta = b + 2$, $\gamma = c + 2$. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4[t]$ dato da $W = \{p(t) \in \mathbb{R}^4[t] : \alpha\frac{d^2p}{dt^2}(0) + \beta\frac{dp}{dt}(0) - \gamma p(0) = 0,\ \beta\frac{d^3p}{dt^3}(0) - \gamma p(0) = 0\}$. (Suggerimento: porre $p(t) = xt^4 + yt^3 + zt^2 + ut + w$ con x, y, z, u, w parametri reali incogniti.)

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{t^4, t^3 + 6t + \frac{6\beta}{\gamma}, t^2 - \frac{2\alpha}{\beta}t\}$.

`ESERCIZIO 4` *(4 punti)* Si ponga $\alpha = a + 2$, $\beta = b + 2$, $\gamma = c + 2$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ -k & k^2 - (\beta+1) & 0 \\ -\gamma & \beta+1 & k-\alpha \\ -\gamma & \beta+1 & k-\alpha \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim\ker T_k$ e $\dim \mathrm{Im} T_k$ al variare del parametro reale k.

RISPOSTA: Se $k \neq -(\beta+1), 1, \alpha$ vale $\mathrm{rank} A_k = 3 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 0$. Se $k = -(\beta+1), 1, \alpha$ allora $\mathrm{rank} A_k = 2 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 1$.

---

13 febbraio 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(**X**) (**F**) Lo spazio vettoriale reale delle matrici diagonali reali $n \times n$ ha dimensione n.

(**X**) (**F**) Ogni polinomio a coefficienti reali in una variabile ammette almeno una radice in $\mathbb{C}$.

(**V**) (**X**) Se A e B sono due matrici reali simmetriche $n \times n$ allora $AB = BA$.

(**X**) (**F**) Ogni matrice reale simmetrica 2×2 con traccia e determinante nulli è la matrice nulla.

(**V**) (**X**) L'insieme delle successioni reali convergenti a 1 è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale di tutte le successioni reali (dotato delle usuali operazioni).

(**X**) (**F**) Se il polinomio caratteristico di una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ ha n radici reali distinte allora A è diagonalizzabile per similitudine.

(**V**) (**X**) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e A è la matrice inversa di B allora A e B hanno lo stesso determinante.

(**X**) (**F**) Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare naturale su $\mathbb{R}^3$. Se $\langle u, v \rangle = 0$, $\langle u, w \rangle = 0$, $\langle v, w \rangle = 0$, $\langle u, u \rangle = 1$, $\langle v, v \rangle = 1$ e $\langle w, w \rangle = 1$ allora (u, v, w) è una base di $\mathbb{R}^3$.

(**X**) (**F**) Se $A \in M_4(\mathbb{R})$ e B è la matrice che si ottiene da A disponendo in ordine inverso le sue righe allora $\det A = \det B$.

(**V**) (**X**) I piani di equazioni cartesiane $x = 1$ e $x + z = 0$ sono paralleli nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(6 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Calcolare gli autovalori (*1 punto*) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ 2\beta & 2\beta & -2\gamma \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

Dopo aver verificato che A è diagonalizzabile, calcolarne una base spettrale (*4 punti*) e la relativa forma diagonale (*1 punto*).

AUTOVALORI: -2α, 2β.

BASE SPETTRALE: una possibile base spettrale è $\{(0,1,0), (\gamma, 0, \beta), (0, \gamma, \alpha+\beta)\}$.

FORMA DIAGONALE DI A: rispetto alle base indicata, la forma diagonale di A è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2\beta & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}.$$

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Nello spazio euclideo standard, si consideri la retta r di rappresentazione parametrica $r : (x,y,z) = (1,0,-\gamma) + t(2\alpha, 0, 0)$, e la retta s di rappresentazione cartesiana $s : x - y = 0,\ \sqrt{2}x + z - \gamma = 0$. Determinare una direzione per r ed una per s (*1 punto*). Determinare quanto misura l'angolo formato da r ed s (*2 punti*), e fornire una rappresentazione parametrica per la retta passante per $P(\alpha, \beta, \gamma)$ ed ortogonale ad r e ad s (*2 punti*).

DIREZIONI DELLE DUE RETTE: una possibile direzione per r è data dal vettore $(2\alpha, 0, 0)$. Una possibile direzione per s è data dal vettore $(1, 1, -\sqrt{2})$.

ANGOLO: Rispetto alle direzioni scelte, l'angolo compreso tra le due rette misura $\frac{\pi}{3}$ radianti.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : (x,y,z) = (\alpha, \beta, \gamma) + t(0, \sqrt{2}, 1)$.

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+2$, $\beta = b+2$, $\gamma = c+2$. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4[t]$ dato da $W = \{p(t) \in \mathbb{R}^4[t] : \gamma\frac{d^2p}{dt^2}(0) + \alpha\frac{dp}{dt}(0) - \beta p(0) = 0,\ \alpha\frac{d^3p}{dt^3}(0) - \beta p(0) = 0\}$. (Suggerimento: porre $p(t) = xt^4 + yt^3 + zt^2 + ut + w$ con x, y, z, u, w parametri reali incogniti.)

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{t^4, t^3 + 6t + \frac{6\alpha}{\beta}, t^2 - \frac{2\gamma}{\alpha}t\}$.

`ESERCIZIO 4` *(4 punti)* Si ponga $\alpha = a+2$, $\beta = b+2$, $\gamma = c+2$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -k & -\beta & -\beta \\ \alpha & k^2 - (\alpha+1) & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 0 & 0 & k-\gamma & k-\gamma \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim\ker T_k$ e $\dim \mathrm{Im} T_k$ al variare del parametro reale k.

RISPOSTA: Se $k \neq -(\alpha+1), 1, \gamma$ vale $\mathrm{rank} A_k = 3 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 1$. Se $k = -(\alpha+1), 1, \gamma$ allora $\mathrm{rank} A_k = 2 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 2$.

---

13 febbraio 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) Sia $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ dato da n vettori distinti. Se X è linearmente indipendente allora è una base di $\mathbb{R}^n$.

(X) (F) Se T è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ allora gli endomorfismi T e $2T$ hanno gli stessi autovettori.

(V) (X) Se $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ sono matrici invertibili, allora ${}^t\left(A \cdot B^{-1}\right) = \left({}^tA \cdot \left({}^tB\right)^{-1}\right)$.

(V) (X) L'insieme delle matrici quadrate reali 9×9 che hanno determinante nullo è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

(V) (X) Se $T : M_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare suriettiva allora $\dim \operatorname{Ker} T = 10$.

(V) (X) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare (definito positivo) sullo spazio vettoriale V e $\| \cdot \|$ è la rispettiva norma allora si ha che $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - \|v\|^2$ per ogni $u, v \in V$ con u ortogonale a v.

(X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora le matrici A e $3A$ hanno lo stesso rango.

(V) (X) Se due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ hanno la stessa base spettrale allora coincidono.

(X) (F) Se u è un vettore ortogonale a tutti i vettori di una base dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ allora è il vettore nullo.

(V) (X) Le rette di equazioni parametriche $x = 0, y = t, z = 2$ e $x = 4t, y = 0, z = 4$ sono parallele nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(6 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Calcolare gli autovalori (*1 punto*) della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2\gamma & -2\alpha & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 2\beta & 2\gamma \end{pmatrix}.$$

Dopo aver verificato che A è diagonalizzabile, calcolarne una base spettrale (*4 punti*) e la relativa forma diagonale (*1 punto*).

AUTOVALORI: -2α, 2γ.

BASE SPETTRALE: una possibile base spettrale è $\{(1,0,0), (\alpha, \alpha+\gamma, -\beta), (0,0,1)\}$.

FORMA DIAGONALE DI A: rispetto alle base indicata, la forma diagonale di A è data dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2\gamma & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma \end{pmatrix}.$$

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Nello spazio euclideo standard, si consideri la retta r di rappresentazione parametrica $r : (x, y, z) = (-\alpha, 0, 1) + t(2\beta, 0, 0)$, e la retta s di rappresentazione cartesiana $s : x - 2y = 0,\ \sqrt{3}y - z - \beta = 0$. Determinare una direzione per r ed una per s (*1 punto*). Determinare quanto misura l'angolo formato da r ed s (*2 punti*), e fornire una rappresentazione parametrica per la retta passante per $P(\alpha, \beta, -\gamma)$ ed ortogonale ad r e ad s (*2 punti*).

DIREZIONI DELLE DUE RETTE: una possibile direzione per r è data dal vettore $(2\beta, 0, 0)$. Una possibile direzione per s è data dal vettore $(2, 1, \sqrt{3})$.

ANGOLO: Rispetto alle direzioni scelte, l'angolo compreso tra le due rette misura $\frac{\pi}{4}$ radianti.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : (x, y, z) = (\alpha, \beta, -\gamma) + t(0, -\sqrt{3}, 1)$.

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a + 2$, $\beta = b + 2$, $\gamma = c + 2$. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4[t]$ dato da $W = \{p(t) \in \mathbb{R}^4[t] : \alpha \frac{d^2p}{dt^2}(0) + \beta \frac{dp}{dt}(0) - \gamma p(0) = 0,\ \beta \frac{d^3p}{dt^3}(0) - \gamma p(0) = 0\}$. (Suggerimento: porre $p(t) = xt^4 + yt^3 + zt^2 + ut + w$ con x, y, z, u, w parametri reali incogniti.)

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{t^4, t^3 + 6t + \frac{6\beta}{\gamma}, t^2 - \frac{2\alpha}{\beta}t\}$.

`ESERCIZIO 4` *(4 punti)* Si ponga $\alpha = a + 2$, $\beta = b + 2$, $\gamma = c + 2$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 \\ -k & k^2 - (\beta + 1) & 0 \\ -\gamma & \beta + 1 & k - \alpha \\ -\gamma & \beta + 1 & k - \alpha \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \ker T_k$ e $\dim \mathrm{Im} T_k$ al variare del parametro reale k.

RISPOSTA: Se $k \neq -(\beta + 1), 1, \alpha$ vale $\mathrm{rank} A_k = 3 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim \ker T_k = 0$. Se $k = -(\beta + 1), 1, \alpha$ allora $\mathrm{rank} A_k = 2 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim \ker T_k = 1$.
