13 Settembre 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	⇒ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^4 = I$ (I matrice identica) allora $A^{40} = I$.

(X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + A) = 2^n \cdot \det A$.

(X) (F) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale (rispetto alle usuali operazioni) di dimensione infinita.

(V) (X) Esistono spazi vettoriali di dimensione finita privi di sistemi di generatori.

(V) (X) Un sistema lineare di 9 equazioni ammette soluzione se e solo se è in 9 incognite.

(X) (F) Se s è la somma delle dimensioni degli autospazi di un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$, allora $s \leq n$.

(X) (F) Se $\mathbf{u}$ è un vettore dello spazio vettoriale euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{u} + \mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

(V) (X) Una matrice quadrata reale con tutti i coefficienti non negativi è sempre diagonalizzabile.

(V) (X) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$, allora il polinomio caratteristico di A^2 è il quadrato del polinomio caratteristico di A.

(X) (F) L'equazione $4x^2 - y^2 = 1$ rappresenta una iperbole del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Al variare del parametro reale k, calcolare gli autovalori (*2 punti*) e stabilire la diagonalizzabilità (*3 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma-k & -(k+2\beta) & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 \\ 2k-\alpha-\gamma & -(k+2\beta) & k \end{pmatrix}.$$

AUTOVALORI: $\alpha+\gamma-k$, $\alpha+\beta+\gamma$, k.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq -\beta, \alpha+\beta+\gamma$.

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per il punto $P(0,0,\alpha)$, parallelo alla retta $r : \begin{cases} x = \gamma \\ \alpha y + \beta z = 0 \end{cases}$ ed ortogonale al piano $\pi' : x + \beta y + z - \gamma = 0$.

EQUAZIONE DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : (\alpha+1)\beta x - \alpha y - \beta z + \alpha\beta = 0$.

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente tutti e soli i vettori ortogonali a $(\alpha,0,\beta,0)$ e $(0,\gamma,0,\gamma^2)$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{(-\beta,0,\alpha,0),(0,-\gamma,0,1)\}$.

`ESERCIZIO 4` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -\beta & 2 & \alpha & \gamma \\ -4 & k-\alpha & -(2k+2\beta) & 0 \\ k-\alpha+\beta & -2 & -\alpha & -\gamma \\ 2 & 0 & k+\beta & 0 \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim\ker T_k$ e $\dim \mathrm{Im} T_k$ al variare del parametro reale k.

RISPOSTA: Se $k \neq \alpha, -\beta$ vale $\mathrm{rank} A_k = 4 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 0$. Se $k = \alpha$ allora $\mathrm{rank} A_k = 2 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 2$. Se $k = -\beta$ allora $\mathrm{rank} A_k = 3 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 1$.

---

13 Settembre 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (~~F~~) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e $A^4 = I$ (I matrice identica) allora $A^2 = I$.

(~~V~~) (F) L'inversa dell'inversa di una matrice reale $A \in M_n(\mathbb{R})$ invertibile è A.

(~~V~~) (F) Un qualunque sistema di 4 generatori dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni) è una base dello stesso spazio vettoriale.

(~~V~~) (F) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ (dotato delle usuali operazioni) costituito dalle quintuple (x, y, z, t, u) tali che $x = y = z = t = u$ ha dimensione 1.

(~~V~~) (F) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno anche lo stesso determinante.

(V) (~~F~~) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo di 5 equazioni in 7 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^7$.

(V) (~~F~~) Ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^2$ che sia anche un isomorfismo ammette una base spettrale.

(~~V~~) (F) Se U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$, allora la dimensione del complemento ortogonale di U è diversa dalla dimensione di U.

(~~V~~) (F) Se $\mathbf{u}$ è un vettore dello spazio vettoriale euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, allora si ha che $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(V) (~~F~~) L'equazione $x^4 + y^4 = 1$ rappresenta una ellisse del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Al variare del parametro reale k, calcolare gli autovalori (*2 punti*) e stabilire la diagonalizzabilità (*3 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma-k & 0 & 0 \\ -(k+2\beta) & \alpha+\beta+\gamma & -(k+2\beta) \\ 2k-\alpha-\gamma & 0 & k \end{pmatrix}.$$

AUTOVALORI: $\alpha+\gamma-k$, $\alpha+\beta+\gamma$, k.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq \alpha+\beta+\gamma$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per il punto $P(\gamma,0,0)$, parallelo alla retta $r : \begin{cases} z = \alpha \\ \beta x + \gamma y = 0 \end{cases}$ ed ortogonale al piano $\pi' : x + \beta y + z - \alpha = 0$.

EQUAZIONE DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : \beta x + \gamma y - \beta(\gamma+1)z - \gamma\beta = 0$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente tutti e soli i vettori ortogonali a $(0,\gamma,\beta,0)$ e $(\alpha,0,0,\alpha^2)$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{(0,-\beta,\gamma,0),(-\alpha,0,0,1)\}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k-\alpha+\gamma & -\alpha & -\beta & -2 \\ 2 & k+\gamma & 0 & 0 \\ -\gamma & \alpha & \beta & 2 \\ -4 & -(2k+2\gamma) & 0 & k-\alpha \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim\ker T_k$ e $\dim \mathrm{Im} T_k$ al variare del parametro reale k.

RISPOSTA: Se $k \neq \alpha, -\gamma$ vale $\mathrm{rank} A_k = 4 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 0$. Se $k = \alpha$ allora $\mathrm{rank} A_k = 2 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 2$. Se $k = -\gamma$ allora $\mathrm{rank} A_k = 3 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 1$.

---

13 Settembre 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ e $AB = I$ (I matrice identica) allora A e B sono matrici invertibili.

(V) (X) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A^2 è la matrice nulla, allora anche A è la matrice nulla.

(V) (X) La matrice reale nulla 3×3 è ortogonale.

(V) (X) Le permutazioni sui primi n numeri naturali sono n.

(V) (X) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 7×7 che hanno le ultime 5 righe nulle è 35 (si considerino le usuali operazioni).

(V) (X) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ ha una riga con coefficienti tutti uguali fra loro, allora $\det A = 0$.

(V) (X) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a coefficienti tutti positivi è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

(X) (F) Ogni endomorfismo dello spazio vettoriale stardard $\mathbb{R}^3$ ammette almeno un autovalore.

(X) (F) Se $\|\cdot\|$ è la norma euclidea standard su $\mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(X) (F) I piani di equazioni cartesiane $x = \frac{1}{2}$ e $z = \frac{2}{3}$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Al variare del parametro reale k, calcolare gli autovalori (*2 punti*) e stabilire la diagonalizzabilità (*3 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma-k & -(k+2\beta) & 0 \\ 0 & \alpha+\beta+\gamma & 0 \\ 2k-\alpha-\gamma & -(k+2\beta) & k \end{pmatrix}.$$

AUTOVALORI: $\alpha+\gamma-k$, $\alpha+\beta+\gamma$, k.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq -\beta, \alpha+\beta+\gamma$.

ESERCIZIO 2 *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per il punto $P(0,0,\alpha)$, parallelo alla retta $r : \begin{cases} x = \gamma \\ \alpha y + \beta z = 0 \end{cases}$ ed ortogonale al piano $\pi' : x + \beta y + z - \gamma = 0$.

EQUAZIONE DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : (\alpha+1)\beta x - \alpha y - \beta z + \alpha\beta = 0$.

ESERCIZIO 3 *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente tutti e soli i vettori ortogonali a $(\alpha,0,\beta,0)$ e $(0,\gamma,0,\gamma^2)$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{(-\beta,0,\alpha,0),(0,-\gamma,0,1)\}$.

ESERCIZIO 4 *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -\beta & 2 & \alpha & \gamma \\ -4 & k-\alpha & -(2k+2\beta) & 0 \\ k-\alpha+\beta & -2 & -\alpha & -\gamma \\ 2 & 0 & k+\beta & 0 \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim\ker T_k$ e $\dim \mathrm{Im} T_k$ al variare del parametro reale k.

RISPOSTA: Se $k \neq \alpha, -\beta$ vale $\mathrm{rank} A_k = 4 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 0$. Se $k = \alpha$ allora $\mathrm{rank} A_k = 2 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 2$. Se $k = -\beta$ allora $\mathrm{rank} A_k = 3 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 1$.

---

13 Settembre 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora $(A + A) \cdot A = A \cdot (A + A)$.

(X) (F) La somma di due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è una matrice a traccia nulla.

(V) (X) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora A e A^2 hanno lo stesso rango.

(X) (F) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di $\mathbb{R}^n$ è contenuto in almeno una base di $\mathbb{R}^n$.

(V) (X) Se $T : V \to W$ è una trasformazione lineare allora si ha che T è suriettiva se e solo se il suo nucleo contiene unicamente il vettore nullo.

(V) (X) Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se il suo polinomio caratteristico non ammette radici reali.

(X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora la matrice $A \cdot {}^tA$ è diagonalizzabile per similitudine.

(X) (F) Tutti i sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ diversi dal sottospazio vettoriale nullo ammettono più di una base ortonormale.

(X) (F) Lo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^9$ è finitamente generato.

(V) (X) Le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = 0, z = 3t - 1$ e $x = 0, y = 2t, z = 1$ sono parallele nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Al variare del parametro reale k, calcolare gli autovalori (*2 punti*) e stabilire la diagonalizzabilità (*3 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma-k & 0 & 0 \\ -(k+2\beta) & \alpha+\beta+\gamma & -(k+2\beta) \\ 2k-\alpha-\gamma & 0 & k \end{pmatrix}.$$

AUTOVALORI: $\alpha+\gamma-k$, $\alpha+\beta+\gamma$, k.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq \alpha+\beta+\gamma$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π passante per il punto $P(\gamma, 0, 0)$, parallelo alla retta $r : \begin{cases} z = \alpha \\ \beta x + \gamma y = 0 \end{cases}$ ed ortogonale al piano $\pi' : x + \beta y + z - \alpha = 0$.

EQUAZIONE DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : \beta x + \gamma y - \beta(\gamma+1)z - \gamma\beta = 0$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Determinare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente tutti e soli i vettori ortogonali a $(0, \gamma, \beta, 0)$ e $(\alpha, 0, 0, \alpha^2)$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\{(0, -\beta, \gamma, 0), (-\alpha, 0, 0, 1)\}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Data la matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k-\alpha+\gamma & -\alpha & -\beta & -2 \\ 2 & k+\gamma & 0 & 0 \\ -\gamma & \alpha & \beta & 2 \\ -4 & -(2k+2\gamma) & 0 & k-\alpha \end{pmatrix},$$

e considerata la trasformazione lineare $T_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim\ker T_k$ e $\dim \mathrm{Im} T_k$ al variare del parametro reale k.

RISPOSTA: Se $k \neq \alpha, -\gamma$ vale $\mathrm{rank} A_k = 4 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 0$. Se $k = \alpha$ allora $\mathrm{rank} A_k = 2 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 2$. Se $k = -\gamma$ allora $\mathrm{rank} A_k = 3 = \dim \mathrm{Im} T_k$ e dunque $\dim\ker T_k = 1$.
