14 febbraio 2009 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) $\mathbb{Z}_{11}$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(V) (X) Se $A, B, C \in M_8(\mathbb{R})$ allora $A \cdot B \cdot C = \mathbf{0}$ implica che $A = \mathbf{0}$ oppure $B = \mathbf{0}$ oppure $C = \mathbf{0}$.

(V) (X) Se $A \in M_5(\mathbb{R})$ allora $\det A^{-1} = -\det A$.

(V) (X) L'insieme delle matrici $n \times n$ con almeno un elemento nullo sulla diagonale principale è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$.

(V) (X) Se due basi di uno spazio vettoriale hanno almeno un elemento in comune allora coincidono.

(X) (F) Un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.

(X) (F) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ ha nucleo diverso da $\{\mathbf{0}\}$ se e solo se ammette 0 come autovalore.

(X) (F) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori non nulli e fra loro ortogonali dello spazio vettoriale euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, allora $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

(X) (F) La composizione di due isometrie dello stesso spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

(V) (X) L'equazione $x^3 - y^3 = 1$ rappresenta una iperbole del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)*

Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z, u) = \Big(ax,\ ax+by-z+u,\ x-y+(c+2)z-u\Big)$. Si calcoli una base per $\ker T$.

RISPOSTA: Una base è data, per $a \neq 0$, da $\Big((0,\ -(c+1),\ b-1,\ b(c+2)-1)\Big)$, mentre per $a = 0$ è data da $\Big((0,\ -(c+1),\ b-1,\ b(c+2)-1),\ (-(c+1), 0, 1, 1)\Big)$.

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)*

Determinare per quali valori del parametro reale t l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1-t & b+1 \\ 0 & 1 & 10-c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine.

RISPOSTA: A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine se e solo se lo è A, e dunque se e solo se $t = a+1$.

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)*

Calcolare il volume del tetraedro di vertici $A = (a+1, 0, 0)$, $B = (0, b+1, 0)$, $C = (0, 0, c+1)$, $D = (2a+2, 0, 0)$ e l'area della sua faccia di vertici A, B, C.

RISPOSTA: Il volume del tetraedro è $\frac{1}{6}(a+1)(b+1)(c+1)$.
L'area della sua faccia di vertici A, B, C è $\frac{1}{2}\sqrt{(b+1)^2(c+1)^2 + (a+1)^2(c+1)^2 + (a+1)^2(b+1)^2}$

`ESERCIZIO 4` *(5 punti)*

Dire, MOTIVANDO LA RISPOSTA, se l'endomorfismo $D : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2[t]$ che porta ogni polinomio nella sua derivata ammette oppure no una base spettrale.

RISPOSTA: No, perché la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, associata a D rispetto alla base canonica, non è diagonalizzabile per similitudine.

---

14 febbraio 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (~~F~~) L'insieme $\mathbb{Q}$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

(V) (~~F~~) Il prodotto di due matrici reali simmetriche $n \times n$ è una matrice simmetrica.

(V) (~~F~~) Tutti i sistemi di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^5$ (dotato delle usuali operazioni) sono formati da 5 vettori.

(V) (~~F~~) Lo spazio vettoriale delle successioni reali (a_n) tali che $a_i = 0$ per ogni $i \leq 3$ ha dimensione 3.

(~~V~~) (F) Se due matrici sono una l'inversa dell'altra hanno lo stesso rango.

(~~V~~) (F) Non esistono sistemi lineari omogenei che ammettono esattamente due soluzioni.

(~~V~~) (F) Se A è una matrice reale quadrata diagonalizzabile per similitudine allora lo è anche A^2.

(V) (~~F~~) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ha la stessa dimensione del suo complemento ortogonale.

(V) (~~F~~) Dato l'usuale prodotto vettoriale $\wedge$ in $\mathbb{R}^3$, si ha che se $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ allora $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

(V) (~~F~~) L'equazione $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ rappresenta una ellisse del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)*

Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da $T(x, y, z) = \big(x+ay+az,\ -x+by,\ (c+2)x-y,\ -x+y\big)$. Si calcoli una equazione cartesiana per $\mathrm{Im}T$.

RISPOSTA: Una equazione è data, per $a \neq 0$, da $(c+1)y + (1-b)z + \big(1-b(c+2)\big)u = 0$, mentre per $a = 0$ è data da $(c+1)y + (1-b)z + \big(1-b(c+2)\big)u = 0$, $(c+1)x - z - u = 0$.

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)*

Determinare una base spettrale per la matrice A^2, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 10-a & 10-b \\ 10-a & 0 & 0 \\ 10-b & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: Dato che A è simmetrica (e perciò diagonalizzabile) ammette una base spettrale, e questa sarà anche una base spettrale di A^2. Una base spettrale per A è la seguente:

$$\Big((0, b-10, 10-a),\ (\sqrt{(10-a)^2+(10-b)^2}, 10-a, 10-b),\ (-\sqrt{(10-a)^2+(10-b)^2}, 10-a, 10-b)\Big).$$

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)*

Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ siano U il sottospazio vettoriale generato dal vettore $(a+1, 10-b, 0)$ e W il sottospazio vettoriale generato dal vettore $(0, 10-b, c+1)$. Calcolare una base per il sottospazio vettoriale ${}^{\perp}U \cap {}^{\perp}W$.

RISPOSTA: Una base per ${}^{\perp}U \cap {}^{\perp}W$ è data da $\Big(\big((10-b)(c+1),\ -(a+1)(c+1),\ (a+1)(10-b)\big)\Big)$.

`ESERCIZIO 4` *(5 punti)*

Dimostrare che l'unica matrice ortogonale simmetrica 100×100 con traccia uguale a 100 è la matrice identica.

RISPOSTA: Sia A la nostra matrice. Allora $A^2 = A \cdot {}^tA = I$. Dato che A è simmetrica è anche diagonalizzabile per similitudine: $D = E^{-1} \cdot A \cdot E$, con D diagonale. Dunque $D^2 = E^{-1} \cdot A \cdot E \cdot E^{-1} \cdot A \cdot E = E^{-1} \cdot A^2 \cdot E = E^{-1} \cdot I \cdot E = I$. Quindi gli elementi sulla diagonale di D sono tutti 1 o -1. Poiché $100 = Tr(A) = Tr(D)$ si ha che gli elementi sulla diagonale di D sono tutti 1 e quindi $D = I$. Perciò $A = E \cdot I \cdot E^{-1} = I$.

---

14 febbraio 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) **(X)** Ogni insieme dotato di una operazione è un gruppo.

(V) **(X)** La somma di due matrici reali invertibili $n \times n$ è una matrice invertibile.

(X) **(F)** La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è ortogonale.

(X) **(F)** Se $n \geq 2$ il numero di permutazioni su n oggetti è un numero pari.

(X) **(F)** La somma di due matrici reali simmetriche $n \times n$ è una matrice simmetrica.

(V) **(X)** Se $A = (a^i_j) \in M_n(\mathbb{R})$ e A^i_j indica il complemento algebrico di a^i_j, allora $\det A = \sum_{j=1}^n a^j_j A^j_j$.

(V) **(X)** L'insieme delle matrici reali $n \times n$ di rango uguale a 3 è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

(X) **(F)** Non esistono endomorfismi T dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^3$ tali che $\dim \mathrm{Im}T = \dim \mathrm{Ker}T$.

(V) **(X)** Se $p(\lambda)$ è il polinomio caratteristico di un endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ allora $2p(\lambda)$ è il polinomio caratteristico dell'endomorfismo $2F$.

(X) **(F)** I piani di equazioni cartesiane $y = 1$ e $2x + z = 5$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)*

Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(x, y, z, u) = \Big(ax,\ ax+by-z+u,\ x-y+(c+2)z-u\Big)$. Si calcoli una base per $\ker T$.

RISPOSTA: Una base è data, per $a \neq 0$, da $\Big((0,\ -(c+1),\ b-1,\ b(c+2)-1)\Big)$, mentre per $a = 0$ è data da $\Big((0,\ -(c+1),\ b-1,\ b(c+2)-1),\ (-(c+1), 0, 1, 1)\Big)$.

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)*

Determinare per quali valori del parametro reale t l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1-t & b+1 \\ 0 & 1 & 10-c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine.

RISPOSTA: A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine se e solo se lo è A, e dunque se e solo se $t = a + 1$.

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)*

Calcolare il volume del tetraedro di vertici $A = (a + 1, 0, 0)$, $B = (0, b + 1, 0)$, $C = (0, 0, c + 1)$, $D = (2a + 2, 0, 0)$ e l'area della sua faccia di vertici A, B, C.

RISPOSTA: Il volume del tetraedro è $\frac{1}{6}(a + 1)(b + 1)(c + 1)$.
L'area della sua faccia di vertici A, B, C è $\frac{1}{2}\sqrt{(b+1)^2(c+1)^2 + (a+1)^2(c+1)^2 + (a+1)^2(b+1)^2}$

`ESERCIZIO 4` *(5 punti)*

Dire, MOTIVANDO LA RISPOSTA, se l'endomorfismo $D : \mathbb{R}^2[t] \to \mathbb{R}^2[t]$ che porta ogni polinomio nella sua derivata ammette oppure no una base spettrale.

RISPOSTA: No, perché la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, associata a D rispetto alla base canonica, non è diagonalizzabile per similitudine.

---

14 febbraio 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(X) (F) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ triangolari superiori è una matrice triangolare superiore.

(X) (F) Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ non ha rango 3, allora anche A^2 non ha rango 3.

(X) (F) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale V si può completare a una base di V.

(V) (X) Il nucleo di una trasformazione lineare non può contenere il solo vettore nullo.

(X) (F) Se la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile per similitudine allora anche $3 \cdot A$ è diagonalizzabile per similitudine.

(V) (X) Due matrici quadrate reali $n \times n$ sono simili se e solo se hanno lo stesso determinante.

(V) (X) La funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $F(x, y, z) = (x, -y, 0)$ è una trasformazione ortogonale.

(X) (F) Se due spazi vettoriali reali finitamente generati hanno la stessa dimensione sono isomorfi.

(V) (X) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t - 1, z = -t + 1$ e $x = -t, y = 0, z = -2t + 1$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)*

Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da $T(x, y, z) = \big(x+ay+az,\ -x+by,\ (c+2)x-y,\ -x+y\big)$. Si calcoli una equazione cartesiana per $\mathrm{Im}T$.

RISPOSTA: Una equazione è data, per $a \neq 0$, da $(c+1)y + (1-b)z + \big(1 - b(c+2)\big)u = 0$, mentre per $a = 0$ è data da $(c+1)y + (1-b)z + \big(1 - b(c+2)\big)u = 0$, $(c+1)x - z - u = 0$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(5 punti)*

Determinare una base spettrale per la matrice A^2, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 10-a & 10-b \\ 10-a & 0 & 0 \\ 10-b & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: Dato che A è simmetrica (e perciò diagonalizzabile) ammette una base spettrale, e questa sarà anche una base spettrale di A^2. Una base spettrale per A è la seguente:

$$\Big((0, b-10, 10-a),\ (\sqrt{(10-a)^2 + (10-b)^2}, 10-a, 10-b),\ (-\sqrt{(10-a)^2 + (10-b)^2}, 10-a, 10-b)\Big).$$

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(5 punti)*

Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ siano U il sottospazio vettoriale generato dal vettore $(a+1, 10-b, 0)$ e W il sottospazio vettoriale generato dal vettore $(0, 10-b, c+1)$. Calcolare una base per il sottospazio vettoriale ${}^{\perp}U \cap {}^{\perp}W$.

RISPOSTA: Una base per ${}^{\perp}U \cap {}^{\perp}W$ è data da $\Big(\big((10-b)(c+1),\ -(a+1)(c+1),\ (a+1)(10-b)\big)\Big)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(5 punti)*

Dimostrare che l'unica matrice ortogonale simmetrica 100×100 con traccia uguale a 100 è la matrice identica.

RISPOSTA: Sia A la nostra matrice. Allora $A^2 = A \cdot {}^tA = I$. Dato che A è simmetrica è anche diagonalizzabile per similitudine: $D = E^{-1} \cdot A \cdot E$, con D diagonale. Dunque $D^2 = E^{-1} \cdot A \cdot E \cdot E^{-1} \cdot A \cdot E = E^{-1} \cdot A^2 \cdot E = E^{-1} \cdot I \cdot E = I$. Quindi gli elementi sulla diagonale di D sono tutti 1 o -1. Poiché $100 = Tr(A) = Tr(D)$ si ha che gli elementi sulla diagonale di D sono tutti 1 e quindi $D = I$. Perciò $A = E \cdot I \cdot E^{-1} = I$.