16 settembre 2009 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:

MATRICOLA: $\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) $\mathbb{Z}_3$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(X) (F) Se $A, B \in M_9(\mathbb{R})$ e $A^3 \cdot B = I$ (I matrice identica) allora $\left(A^{99}\right)^{-1}$ e B^{33} hanno la stessa trasposta.

(X) (F) Se $C, D \in M_8(\mathbb{R})$ allora $\det(C \cdot D) = \det C \cdot \det D$.

(V) (X) L'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ discontinue in 0 è uno spazio vettoriale (rispetto alle usuali operazioni).

(V) (X) Esistono spazi vettoriali di dimensione finita privi di base.

(V) (X) Un sistema lineare di 5 equazioni ammette soluzione se e solo se è in 5 incognite.

(V) (X) La somma delle dimensioni degli autospazi di un endomorfismo di $\mathbb{R}^7$ è sempre uguale a 7.

(X) (F) Se $\mathbf{u}$ è un vettore dello spazio vettoriale euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, allora $\Big(\big((\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u}\big) \wedge \mathbf{u}\Big) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(X) (F) I polinomi caratteristici delle matrici A e ${}^tA$ sono uguali ($A \in M_n(\mathbb{R})$).

(V) (X) L'equazione $x^3 - y^3 = 1$ rappresenta una iperbole del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(6 punti)*

Calcolare gli autovalori (*2 punti*) ed una base spettrale (*4 punti*) per la matrice $A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & 10-c \\ 0 & c-a & 0 \\ 10-c & 0 & 10-a \end{pmatrix}$.

AUTOVALORI: $c-a$, $20-a-c$.

BASE SPETTRALE: $B = \big((1,0,-1),(0,1,0),(1,0,1)\big)$.

`ESERCIZIO 2` *(2 punti)*

Nello spazio euclideo standard, calcolare la distanza fra il punto $(0, a+1, 10-b)$ ed il piano di equazione

$$x + (10-c)y + (a+1)z + 1 = 0.$$

DISTANZA: $\frac{(a+1)(10-c)+(a+1)(10-b)+1}{\sqrt{1+(10-c)^2+(a+1)^2}}$.

`ESERCIZIO 3` *(3 punti)*

Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare nelle incognite x, y, z dato da

$$S : \begin{cases} x + y - 2(a+1)z = 2(b+1) \\ -x + y - (a+1)z = 2(c+1) \\ -2x + (a+1)z = 2(c-b) \end{cases} .$$

DIMENSIONE: $\dim(Sol(S)) = 1$.

`ESERCIZIO 4` *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} a+1 & t-1 & c+1 \\ a+1 & 2t & c+1 \\ t & 1 & b+1 \end{pmatrix}$ è massimo.

RISPOSTA: Il rango di A è massimo per $t \neq -1, \frac{(a+1)(b+1)}{c+1}$.

`ESERCIZIO 5` *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il seguente insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 10-a & 10-b \\ t & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3(10-c) & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11-a & 10-b \\ -t-10+c & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

RISPOSTA: È una base se e solo se $t \neq -2(10-c)$.

`ESERCIZIO 6` *(3 punti)* Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 10-a & 10-b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

INVERSA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20-a-b} & -\frac{10-b}{20-a-b} \\ \frac{1}{20-a-b} & \frac{10-a}{20-a-b} \end{pmatrix}$.

---

16 settembre 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:			
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=**	**, b=**	**, c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (X) L'insieme dei numeri naturali positivi è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

(X) (F) L'inversa di una matrice reale $n \times n$ invertibile è una matrice invertibile.

(X) (F) Un qualunque sistema di 9 vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale $M_3(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni) è una base dello stesso spazio vettoriale.

(V) (X) Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ (dotato delle usuali operazioni) costituito dalle quintuple (x, y, z, t, u) tali che $x = y$ e $u = 0$ ha dimensione 2.

(V) (X) Se due matrici quadrate reali hanno la stessa diagonale principale hanno anche lo stesso determinante.

(V) (X) L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di 4 equazioni in 5 incognite è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ (rispetto alle usuali operazioni).

(X) (F) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ che non ammettono basi spettrali.

(X) (F) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ hanno lo stesso complemento ortogonale allora coincidono.

(V) (X) Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ sono vettori dello spazio vettoriale euclideo orientato $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti, allora si ha che $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$.

(X) (F) L'equazione $-x^2 - 2y^2 = -1$ rappresenta una ellisse del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t la matrice $A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & t \\ 0 & 11+c & 0 \\ t & t & 10-a \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine (*4 punti*) e se esistono valori di t per i quali il vettore $(0, b-10, 0)$ è autovettore di A (*1 punto*).

DIAGONALIZZABILITÀ: È diagonalizzabile per similitudine se e solo se $t \neq \pm(1+a+c)$.

AUTOVETTORE: $(0, b-10, 0)$ è autovettore di A se e solo se $t = 0$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(3 punti)*

Calcolare, nel piano euclideo standard, l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(a-10, b+1)$, $(1, c+1)$.

AREA TRIANGOLO: $\frac{1}{2}|(a-10)(c+1)-(b+1)|$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(3 punti)*

Calcolare la dimensione del nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $T(1,0,0) = (b+1, 1, b+1)$, $T(0,1,0) = (0,0,c+1)$, $T(0,0,1) = (2(b+1), 2, 2(b-c))$.

DIMENSIONE DEL NUCLEO: La dimensione di $\ker T$ è pari a 1.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(3 punti)*

Stabilire per quali valori del parametro reale t il vettore $(t, 1, 10-b)$ appartiene al sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dall'insieme $\{(0, 10-c, 0), (10-a, 0, 2t)\}$.

RISPOSTA: $t = \pm\sqrt{\frac{(10-a)(10-b)}{2}}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(3 punti)*

Nello spazio euclideo standard, dire per quali valori del parametro reale k la retta $r : \begin{cases} (a+1)x - ky = (a+1)(b+1) \\ z = (b+1) \end{cases}$ ed il piano $\pi : kx + ky + (c+1)z + (a+1) = 0$ sono paralleli.

RISPOSTA: Sono paralleli per $k = 0, -(a+1)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 6}}$ *(3 punti)* Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 10-c & -(10-b) \\ 0 & 10-a \end{pmatrix}$.

INVERSA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10-c} & \frac{10-b}{(10-a)(10-c)} \\ 0 & \frac{1}{10-a} \end{pmatrix}$.

---

16 settembre 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) **(F)** L'insieme dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(X) **(F)** Se $A, B \in M_3(\mathbb{R})$ e $\det B = 0$ allora la matrice $A \cdot B$ non è invertibile.

(X) **(F)** La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è ortogonale.

(X) **(F)** Se p è una permutazione dispari allora p^3 è una permutazione dispari.

(V) **(X)** La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 5×5 che hanno le ultime 3 righe nulle è 15 (si considerino le usuali operazioni).

(X) **(F)** Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ ha una riga nulla, allora $\det A = 0$.

(V) **(X)** L'insieme delle matrici reali $n \times n$ a valori tutti interi è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

(V) **(X)** Ogni endomorfismo diagonalizzabile dello spazio vettoriale stardard $\mathbb{R}^3$ ammette 3 autovalori distinti.

(V) **(X)** Se $\|\cdot\|$ è la norma euclidea standard su $\mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|$ per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

(X) **(F)** I piani di equazioni cartesiane $-x = 1$ e $2y = 3$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(6 punti)*

Calcolare gli autovalori (*2 punti*) ed una base spettrale (*4 punti*) per la matrice $A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & 10-c \\ 0 & c-a & 0 \\ 10-c & 0 & 10-a \end{pmatrix}$.

AUTOVALORI: $c-a$, $20-a-c$.

BASE SPETTRALE: $B = \big((1,0,-1),(0,1,0),(1,0,1)\big)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(2 punti)*
Nello spazio euclideo standard, calcolare la distanza fra il punto $(0, a+1, 10-b)$ ed il piano di equazione

$$x + (10-c)y + (a+1)z + 1 = 0.$$

DISTANZA: $\frac{(a+1)(10-c)+(a+1)(10-b)+1}{\sqrt{1+(10-c)^2+(a+1)^2}}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(3 punti)*
Determinare la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema lineare nelle incognite x, y, z dato da

$$S : \begin{cases} x + y - 2(a+1)z = 2(b+1) \\ -x + y - (a+1)z = 2(c+1) \\ -2x + (a+1)z = 2(c-b) \end{cases}.$$

DIMENSIONE: $\dim(Sol(S)) = 1$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} a+1 & t-1 & c+1 \\ a+1 & 2t & c+1 \\ t & 1 & b+1 \end{pmatrix}$ è massimo.

RISPOSTA: Il rango di A è massimo per $t \neq -1, \frac{(a+1)(b+1)}{c+1}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(3 punti)*
Dire per quali valori del parametro reale t il seguente insieme è una base per lo spazio vettoriale reale $M_2(\mathbb{R})$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 10-a & 10-b \\ t & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3(10-c) & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11-a & 10-b \\ -t-10+c & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

RISPOSTA: È una base se e solo se $t \neq -2(10-c)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 6}}$ *(3 punti)* Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 10-a & 10-b \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

INVERSA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20-a-b} & -\frac{10-b}{20-a-b} \\ \frac{1}{20-a-b} & \frac{10-a}{20-a-b} \end{pmatrix}$.

16 settembre 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (X) L'insieme $M_3(\mathbb{R})$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(V) (X) La somma di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è una matrice non invertibile.

(X) (F) Se $A, B \in M_8(\mathbb{R})$ e $A = -B$, allora A e B hanno lo stesso rango e lo stesso determinante.

(X) (F) Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale V di dimensione finita è contenuto in almeno una base di V.

(X) (F) Se $T : V \to V$ è una trasformazione lineare allora si ha che T è iniettiva se e solo se $T(V) = V$.

(V) (X) Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se il suo polinomio caratteristico ammette almeno una radice reale.

(X) (F) Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ allora la matrice $A + {}^tA$ è diagonalizzabile per similitudine.

(V) (X) Esistono sottospazi vettoriali euclidei di $\mathbb{R}^3$ che non ammettono basi ortonormali.

(V) (X) Tutti gli spazi vettoriali reali sono finitamente generati.

(X) (F) Le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = 3t - 1, z = 0$ e $x = 0, y = 2t, z = 1$ sono parallele nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t la matrice $A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & t \\ 0 & 11+c & 0 \\ t & t & 10-a \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine (*4 punti*) e se esistono valori di t per i quali il vettore $(0, b-10, 0)$ è autovettore di A (*1 punto*).

DIAGONALIZZABILITÀ: È diagonalizzabile per similitudine se e solo se $t \neq \pm(1+a+c)$.

AUTOVETTORE: $(0, b-10, 0)$ è autovettore di A se e solo se $t = 0$.

`ESERCIZIO 2` *(3 punti)*

Calcolare, nel piano euclideo standard, l'area del triangolo di vertici $(0,0)$, $(a-10, b+1)$, $(1, c+1)$.

AREA TRIANGOLO: $\frac{1}{2}|(a-10)(c+1)-(b+1)|$.

`ESERCIZIO 3` *(3 punti)*

Calcolare la dimensione del nucleo della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $T(1,0,0) = (b+1, 1, b+1)$, $T(0,1,0) = (0,0,c+1)$, $T(0,0,1) = (2(b+1), 2, 2(b-c))$.

DIMENSIONE DEL NUCLEO: La dimensione di $\ker T$ è pari a 1.

`ESERCIZIO 4` *(3 punti)*

Stabilire per quali valori del parametro reale t il vettore $(t, 1, 10-b)$ appartiene al sottospazio di $\mathbb{R}^3$ generato dall'insieme $\{(0, 10-c, 0), (10-a, 0, 2t)\}$.

RISPOSTA: $t = \pm\sqrt{\frac{(10-a)(10-b)}{2}}$.

`ESERCIZIO 5` *(3 punti)*

Nello spazio euclideo standard, dire per quali valori del parametro reale k la retta $r : \begin{cases} (a+1)x - ky = (a+1)(b+1) \\ z = (b+1) \end{cases}$ ed il piano $\pi : kx + ky + (c+1)z + (a+1) = 0$ sono paralleli.

RISPOSTA: Sono paralleli per $k = 0, -(a+1)$.

`ESERCIZIO 6` *(3 punti)* Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 10-c & -(10-b) \\ 0 & 10-a \end{pmatrix}$.

INVERSA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10-c} & \frac{10-b}{(10-a)(10-c)} \\ 0 & \frac{1}{10-a} \end{pmatrix}$.
