22 gennaio 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) **(F)** Il prodotto di due matrici diagonali $n \times n$ è una matrice diagonale $n \times n$.

(X) **(F)** Ogni spazio vettoriale reale di dimensione n è isomorfo allo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

(V) **(X)** La somma di due isomorfismi da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è un isomorfismo da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$.

(V) **(X)** Un sistema lineare ammette soluzione se e solo se ammette soluzione il sistema lineare omogeneo ad esso associato.

(X) **(F)** Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi per uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita e sia E la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Se x e x' sono i vettori delle coordinate di $v \in V$ rispetto a $\mathcal{B}$ e a $\mathcal{B}'$, rispettivamente, allora $x' = Ex$.

(X) **(F)** Una matrice $A \in M_8(\mathbb{R})$ è singolare se e solo se A^3 è singolare.

(V) **(X)** Se un vettore di $\mathbb{R}^3$ è ortogonale a due vettori di $\mathbb{R}^3$ linearmente indipendenti allora è nullo.

(V) **(X)** La somma di due endomorfismi diagonalizzabili è diagonalizzabile.

(X) **(F)** Tutti gli endomorfismi di $\mathbb{R}$ ammettono una base spettrale.

(X) **(F)** Se u, v, w sono tre autovettori non nulli di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associati a tre autovalori distinti allora (u, v, w) è una base di $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*2 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha+k & 0 & \gamma \\ 0 & -\beta & 2k \\ 0 & 2k & -\beta \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*2 punti*).

AUTOVALORI: $\alpha+k$, $-\beta-2k$, $-\beta+2k$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq 0, \alpha+\beta, -\frac{(\alpha+\beta)}{3}$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq \alpha+\beta, -\frac{(\alpha+\beta)}{3}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(4 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione parametrica per la retta r passante per il punto $P(\beta, 0, 0)$, parallela al piano $\pi : \alpha x + y + z + \gamma = 0$ ed ortogonale alla retta s di rappresentazione cartesiana $\begin{cases} x = 0 \\ \alpha y + \gamma z = 0 \end{cases}$.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : x = \beta - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma})t,\ y = \frac{\alpha}{\gamma}t,\ z = t.$

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(4 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Determinare una base del sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ dato da $W = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : A \times M = M \times A \right\}$, dove $A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(3 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Si fornisca un esempio di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\dim(\ker T) = 2$ e $\mathrm{Im}T$ contenga i vettori $(\alpha, 0, \beta, 0)$ e $(0, \gamma, 0, -1)$.

RISPOSTA: una possibile soluzione è data dalla trasformazione $(y) = A(x)$ dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(4 punti)* Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, t,

$$\begin{cases} 2x & +(10-a)y & -2z & & = & -k \\ & (10-b)y & +kz & +t & = & 1+b \\ -2x & +(a-10)y & +(k-a)z & & = & 2+a \\ (b+k)x & +(a-b)y & +2kz & +t & = & 1-c \end{cases}$$

Determinare le matrici incompleta e completa associate al sistema *(1 punto)*. Al variare del parametro reale k, discutere il sistema lineare, dicendo per quali valori di k esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(3 punti)*.

RISPOSTA: Le matrici incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & (10-a) & -2 & 0 \\ 0 & (10-b) & k & 1 \\ -2 & (a-10) & (k-a) & 0 \\ (b+k) & (a-b) & 2k & 1 \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 2 & (10-a) & -2 & 0 & -k \\ 0 & (10-b) & k & 1 & 1+b \\ -2 & (a-10) & (k-a) & 0 & 2+a \\ (b+k) & (a-b) & 2k & 1 & 1-c \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 2+a, -(2+b)$ vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 4$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 0$. Se $k = 2+a$, vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 3$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 1$. Se $k = -(2+b)$, vale che $\rho(A_k) = 3 \neq 4 = \rho(C_k)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$.

---

22 gennaio 2010 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(**X**) (**F**) In $\mathbb{C}$ si ha che $\frac{i}{1+i} = \frac{1}{1-i}$.

(**X**) (**F**) Ogni matrice quadrata reale ortogonale con determinante positivo ha determinante uguale a 1.

(**X**) (**F**) L'intersezione del nucleo e dell'immagine di un endomorfismo di uno spazio vettoriale V è un sottospazio vettoriale di V.

(**X**) (**F**) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile allora $\left(A + A^{-1}\right)^2 = A^2 + \left(A^2\right)^{-1} + 2I$ ($I =$ matrice identica di $M_n(\mathbb{R})$).

(**X**) (**F**) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare (definito positivo) sullo spazio vettoriale V e $\| \cdot \|$ è la rispettiva norma allora si ha che $|\langle u, -u \rangle| = \|u\|^2$ per ogni $u \in V$.

(**X**) (**F**) Un qualunque sottoinsieme non vuoto di un sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale V è ancora un sottoinsieme linearmente indipendente di V.

(**X**) (**F**) Se due matrici reali $n \times n$ hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.

(**X**) (**F**) Se $A \in M_9(\mathbb{R})$ e $A = {}^tA$ allora A è diagonalizzabile per similitudine.

(**X**) (**F**) Se (u, v, w) è una base ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$ allora $w = u \wedge v$ oppure $w = v \wedge u$.

(**X**) (**F**) L'equazione $4x^2 - y^2 = 2$ rappresenta una iperbole del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*2 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha - k & 0 & \gamma \\ 0 & -\beta & 2k \\ 0 & 2k & -\beta \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*2 punti*).

AUTOVALORI: $\alpha - k$, $-\beta - 2k$, $-\beta + 2k$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq 0, -(\alpha+\beta), \frac{(\alpha+\beta)}{3}$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq -(\alpha+\beta), \frac{(\alpha+\beta)}{3}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(4 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione parametrica per la retta r passante per il punto $P(0,0,\beta)$, parallela al piano $\pi : x + y + \alpha z + \gamma = 0$ ed ortogonale alla retta s di rappresentazione cartesiana $\begin{cases} z = 0 \\ \gamma x + \alpha y = 0 \end{cases}$.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : x = t,\ y = \frac{\alpha}{\gamma}t,\ z = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)t + \beta$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(4 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Determinare una base del sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ dato da $W = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : A \times M = M \times A \right\}$, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha+\beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\left\{ \begin{pmatrix} -\gamma & \alpha+\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(3 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Si fornisca un esempio di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Im}T = \mathrm{Span}\left((\gamma,0,\alpha,0),(0,-1,0,\beta),(-1,1,1,1)\right)$.

RISPOSTA: una possibile soluzione è data dalla trasformazione $(y) = A(x)$ dove $A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(4 punti)* Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, t,

$$\begin{cases} & (10-b)y & +kz & +t & = & 1+b \\ -2x & +(c-10)y & +(k-c)z & & = & 2+c \\ 2x & +(10-c)y & -2z & & = & -k \\ (b+k)x & +(c-b)y & +2kz & +t & = & 1-a \end{cases}$$

Determinare le matrici incompleta e completa associate al sistema *(1 punto)*. Al variare del parametro reale k, discutere il sistema lineare, dicendo per quali valori di k esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(3 punti)*.

RISPOSTA: Le matrici incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & (10-b) & k & 1 \\ -2 & (c-10) & (k-c) & 0 \\ 2 & (10-c) & -2 & 0 \\ (b+k) & (c-b) & 2k & 1 \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 0 & (10-b) & k & 1 & 1+b \\ -2 & (c-10) & (k-c) & 0 & 2+c \\ 2 & (10-c) & -2 & 0 & -k \\ (b+k) & (c-b) & 2k & 1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 2+c, -(2+b)$ vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 4$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 0$. Se $k = 2+c$, vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 3$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 1$. Se $k = -(2+b)$, vale che $\rho(A_k) = 3 \neq 4 = \rho(C_k)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$.

---

22 gennaio 2010 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) **(F)** Lo spazio vettoriale reale $M_5(\mathbb{R})$ non ammette nessun sistema di generatori costituito da 10 matrici reali 5×5.

(X) **(F)** In $\mathbb{C}$ si ha che $1 + i + i^2 + i^3 = 0$.

(X) **(F)** Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale allora anche A^2 lo è.

(X) **(F)** Se T è un endomorfismo suriettivo dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$ allora non esistono due vettori distinti $u, v \in \mathbb{R}^n$ tali che $T(u) = T(v)$.

(X) **(F)** Se la somma di due sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^n$ che abbiano in comune il solo vettore nullo è uguale a $\mathbb{R}^n$ allora la somma delle loro dimensioni è uguale a n.

(V) **(X)** Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se è simmetrica.

(V) **(X)** L'insieme delle matrici $n \times n$ con traccia uguale a 1 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

(X) **(F)** Siano $u, v \in \mathbb{R}^3$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare naturale su $\mathbb{R}^3$. Allora $\langle u \wedge v, u + v \rangle = 0$.

(V) **(X)** Esiste almeno una matrice reale 3×3 tale che $\lambda^2 - \lambda + 1$ sia il suo polinomio caratteristico.

(X) **(F)** I piani di equazioni cartesiane $x + y - 2z = 1$ e $x + y + z = 0$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*2 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha+k & 0 & \gamma \\ 0 & -\beta & 2k \\ 0 & 2k & -\beta \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*2 punti*).

AUTOVALORI: $\alpha+k,\ -\beta-2k,\ -\beta+2k$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq 0, \alpha+\beta, -\frac{(\alpha+\beta)}{3}$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq \alpha+\beta, -\frac{(\alpha+\beta)}{3}$.

`ESERCIZIO 2` *(4 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione parametrica per la retta r passante per il punto $P(\beta,0,0)$, parallela al piano $\pi : \alpha x + y + z + \gamma = 0$ ed ortogonale alla retta s di rappresentazione cartesiana $\begin{cases} x = 0 \\ \alpha y + \gamma z = 0 \end{cases}$.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : x = \beta - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma})t,\ y = \frac{\alpha}{\gamma}t,\ z = t.$

`ESERCIZIO 3` *(4 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Determinare una base del sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ dato da $W = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : A \times M = M \times A \right\}$, dove $A = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

`ESERCIZIO 4` *(3 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Si fornisca un esempio di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\dim(\ker T) = 2$ e $\mathrm{Im}T$ contenga i vettori $(\alpha,0,\beta,0)$ e $(0,\gamma,0,-1)$.

RISPOSTA: una possibile soluzione è data dalla trasformazione $(y) = A(x)$ dove $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 1 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

`ESERCIZIO 5` *(4 punti)* Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, t,

$$\begin{cases} 2x & +(10-a)y & -2z & & = & -k \\ & (10-b)y & +kz & +t & = & 1+b \\ -2x & +(a-10)y & +(k-a)z & & = & 2+a \\ (b+k)x & +(a-b)y & +2kz & +t & = & 1-c \end{cases}$$

Determinare le matrici incompleta e completa associate al sistema *(1 punto)*. Al variare del parametro reale k, discutere il sistema lineare, dicendo per quali valori di k esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(3 punti)*.

RISPOSTA: Le matrici incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 2 & (10-a) & -2 & 0 \\ 0 & (10-b) & k & 1 \\ -2 & (a-10) & (k-a) & 0 \\ (b+k) & (a-b) & 2k & 1 \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 2 & (10-a) & -2 & 0 & -k \\ 0 & (10-b) & k & 1 & 1+b \\ -2 & (a-10) & (k-a) & 0 & 2+a \\ (b+k) & (a-b) & 2k & 1 & 1-c \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 2+a, -(2+b)$ vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 4$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 0$. Se $k = 2+a$, vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 3$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 1$. Se $k = -(2+b)$, vale che $\rho(A_k) = 3 \neq 4 = \rho(C_k)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$.

---

22 gennaio 2010 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) Se $X = \{v_1, \ldots, v_k\}$ è un sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale reale V allora esiste uno e un solo sottospazio vettoriale di V che abbia dimensione k e contenga X.

(X) (F) Ogni polinomio caratteristico di una matrice quadrata reale simmetrica ammette esattamente n radici reali (contate con la loro molteplicità).

(X) (F) Se $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ sono matrici invertibili, allora $A \cdot {}^tB$ è invertibile e $\left(A \cdot {}^tB\right)^{-1} = {}^t\left(B^{-1}\right) \cdot A^{-1}$.

(V) (X) Ogni matrice quadrata reale che abbia traccia nulla ha determinante nullo.

(V) (X) Ogni trasformazione lineare ha la proprietà di mandare basi in basi.

(X) (F) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare (definito positivo) sullo spazio vettoriale V e $\| \cdot \|$ è la rispettiva norma allora si ha che $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ per ogni $u, v \in V$ con u ortogonale a v.

(X) (F) In $M_n(\mathbb{R})$ esiste almeno una matrice il cui polinomio caratteristico sia λ^n.

(V) (X) La molteplicità geometrica di un autovalore può essere nulla.

(X) (F) Un qualunque insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di uno spazio vettoriale V dotato di prodotto scalare è linearmente indipendente.

(X) (F) Le rette di equazioni parametriche $x = 0, y = t, z = 2$ e $x = 2t, y = -3, z = t$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*2 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} \alpha - k & 0 & \gamma \\ 0 & -\beta & 2k \\ 0 & 2k & -\beta \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*2 punti*).

AUTOVALORI: $\alpha - k$, $-\beta - 2k$, $-\beta + 2k$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq 0, -(\alpha+\beta), \frac{(\alpha+\beta)}{3}$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq -(\alpha+\beta), \frac{(\alpha+\beta)}{3}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(4 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione parametrica per la retta r passante per il punto $P(0,0,\beta)$, parallela al piano $\pi : x + y + \alpha z + \gamma = 0$ ed ortogonale alla retta s di rappresentazione cartesiana $\begin{cases} z = 0 \\ \gamma x + \alpha y = 0 \end{cases}$.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : x = t,\ y = \frac{\alpha}{\gamma} t,\ z = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right) t + \beta$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(4 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Determinare una base del sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ dato da $W = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : A \times M = M \times A \right\}$, dove $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha+\beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\left\{ \begin{pmatrix} -\gamma & \alpha+\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(3 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Si fornisca un esempio di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tale che $\mathrm{Im}T = \mathrm{Span}\left((\gamma, 0, \alpha, 0), (0, -1, 0, \beta), (-1, 1, 1, 1)\right)$.

RISPOSTA: una possibile soluzione è data dalla trasformazione $(y) = A(x)$ dove $A = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & \gamma & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(4 punti)* Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, t,

$$\begin{cases} & (10-b)y & +kz & +t & = & 1+b \\ -2x & +(c-10)y & +(k-c)z & & = & 2+c \\ 2x & +(10-c)y & -2z & & = & -k \\ (b+k)x & +(c-b)y & +2kz & +t & = & 1-a \end{cases}$$

Determinare le matrici incompleta e completa associate al sistema *(1 punto)*. Al variare del parametro reale k, discutere il sistema lineare, dicendo per quali valori di k esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(3 punti)*.

RISPOSTA: Le matrici incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & (10-b) & k & 1 \\ -2 & (c-10) & (k-c) & 0 \\ 2 & (10-c) & -2 & 0 \\ (b+k) & (c-b) & 2k & 1 \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 0 & (10-b) & k & 1 & 1+b \\ -2 & (c-10) & (k-c) & 0 & 2+c \\ 2 & (10-c) & -2 & 0 & -k \\ (b+k) & (c-b) & 2k & 1 & 1-a \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq 2+c, -(2+b)$ vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 4$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 0$. Se $k = 2+c$, vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 3$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 1$. Se $k = -(2+b)$, vale che $\rho(A_k) = 3 \neq 4 = \rho(C_k)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$.