

NOME:

MATRICOLA:	$\Rightarrow a=$	$, b=$	$, c=$
------------	------------------	--------	--------

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

- (**X**) (F) L'insieme delle matrici reali 2×2 è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- (**X**) (F) Se $A \in M_{2009}(\mathbb{R})$ è invertibile allora ${}^t\left((A^{2009})^{-1}\right) = \left({}^tA\right)^{-1})^{2009}$.
- (V) (**K**) Ogni matrice simmetrica è invertibile.
- (**X**) (F) Se $A \in M_{2009}(\mathbb{R})$ è invertibile e $\det A = \det(A^{-1})$ allora $\det A = \pm 1$.
- (**X**) (F) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile y che ammettono 3 come radice è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- (**X**) (F) L'insieme dei vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^4$ che sono ortogonali ad un vettore fissato è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
- (V) (**K**) Ogni sottoinsieme non vuoto di una base di uno spazio vettoriale è ancora una base dello spazio vettoriale.
- (**X**) (F) Una trasformazione lineare da $\mathbb{R}^4$ a $M_2(\mathbb{R})$ è iniettiva se e solo se è suriettiva.
- (**X**) (F) La somma di due soluzioni di un sistema lineare omogeneo è ancora una soluzione del sistema.
- (**X**) (F) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ ammette al più n autovalori distinti.
- (**X**) (F) Un insieme di vettori non nulli e a due a due ortogonali dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$ è sempre linearmente indipendente.
- (V) (**K**) Esistono spazi vettoriali euclidei di dimensione finita che non sono orientabili.
- (**X**) (F) Le trasformazioni ortogonali dello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$ conservano le distanze fra punti.
- (**X**) (F) La relazione di parallelismo fra rette è una relazione di equivalenza.
- (V) (**K**) L'equazione $x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 (4 punti)

Calcolare, al variare del parametro reale t , la dimensione del nucleo della trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $T_t(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 0)$, $T_t(1, 1, 0, 0) = (1, a + 2, b + 1)$, $T_t(0, 1, 1, 0) = (t - c - 1, a - c, 2(b + 1))$, $T_t(0, 0, 1, 1) = (t - c + 1, t - c + 1, 0)$.

RISPOSTA: Se $t \neq -(a + 1)$ $\dim \ker T_t = 1$; se $t = -(a + 1)$ $\dim \ker T_t = 2$.

ESERCIZIO 2 (4 punti)

Determinare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dato da

$$T_t(x, y, z, u) = (x + (10 - a)z, (10 - b)y, (10 - a)x + z, (10 - c)u).$$

RISPOSTA: Una base spettrale è data da $((0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

ESERCIZIO 3 (4 punti)

Determinare nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$ una equazione PARAMETRICA di una retta passante per il punto $(0, 0, 0)$, che formi un angolo di $\frac{\pi}{3}$ radianti con l'asse delle x e che sia parallela al piano di equazione $(b + 1)y + (c + 1)z - (a + 1) = 0$.

RISPOSTA: Una equazione è data da $x = kt, y = -(c + 1)t, z = (b + 1)t$ con $k = \pm \sqrt{\frac{(b+1)^2 + (c+1)^2}{3}}$.

ESERCIZIO 4 (3 punti)

Provare che se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è simmetrica e $A^3 = I$ (I matrice identica), allora $A = I$.

RISPOSTA: Dato che A è simmetrica si può scrivere ${}^tE \cdot A \cdot E = D$, con E ortogonale e D matrice diagonale. Dunque $A = E \cdot D \cdot {}^tE$. Quindi $I = A^3 = (E \cdot D \cdot {}^tE) \cdot (E \cdot D \cdot {}^tE) \cdot (E \cdot D \cdot {}^tE) = E \cdot D^3 \cdot {}^tE$. Perciò $I = E \cdot D^3 \cdot {}^tE$ e dunque $I = D^3$. Quindi $I = D$. Da $A = E \cdot D \cdot {}^tE$ segue che $A = I$.

NOME:

MATRICOLA:	$\Rightarrow a=$	$, b=$	$, c=$
------------	------------------	--------	--------

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2, b = 5, c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

- (V) (K) L'insieme dei polinomi reali $p(t)$ di grado 7 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma fra polinomi.
- (V) (K) L'insieme dei polinomi reali $p(t)$ di grado minore o uguale a 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.
- (X) (F) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, A è invertibile e $C = A^{-1} \cdot B \cdot A$ allora $C^3 = A^{-1} \cdot B^3 \cdot A$.
- (V) (K) Due sistemi di generatori per uno stesso spazio vettoriale reale hanno sempre la stessa cardinalità.
- (V) (K) Il sottospazio vettoriale di $M_8(\mathbb{R})$ dato dalle matrici di $M_8(\mathbb{R})$ che hanno la prima colonna nulla ha dimensione uguale a 8.
- (X) (F) Se due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ hanno dimensioni rispettivamente uguali a 5 ed a 4, e la loro intersezione ha dimensione 2 allora $n \geq 7$.
- (X) (F) Se A e B sono le matrici associate a due endomorfismi S e T di uno stesso spazio vettoriale V rispetto ad una medesima base ordinata di V , allora $S = T$ se e solo se $A = B$.
- (V) (K) Se la matrice quadrata A ha rango 4 allora tutti i suoi minori 3×3 hanno determinante nullo.
- (V) (K) La somma di due soluzioni di un sistema lineare è ancora una soluzione del sistema.
- (X) (F) Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 4 dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^7$ può essere rappresentato da un sistema lineare di 3 equazioni in 7 incognite.
- (X) (F) Ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ con ${}^t A = A$ può essere diagonalizzata per similitudine.
- (X) (F) Il polinomio reale $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ è il polinomio caratteristico di almeno una matrice quadrata reale.
- (V) (K) Se due sottospazi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ hanno in comune il solo vettore nullo, sono fra loro ortogonali.
- (X) (F) Dato l'usuale prodotto vettoriale $\wedge$ in $\mathbb{R}^3$ e la base canonica $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ di $\mathbb{R}^3$, si ha che $(\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) \wedge \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_1$.
- (V) (K) L'equazione $4x^2 + y^2 = 1$ rappresenta una iperbole del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 (4 punti)

Calcolare, al variare del parametro reale t , la dimensione del nucleo della trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $T_t(1, 0, 0, 0) = (1, 1, 0)$, $T_t(1, 1, 0, 0) = (1, a + 2, b + 1)$, $T_t(0, 1, 1, 0) = (t - c - 1, a - c, 2(b + 1))$, $T_t(0, 0, 1, 1) = (t - c + 1, t - c + 1, 0)$.

RISPOSTA: Se $t \neq -(a + 1)$ $\dim \ker T_t = 1$; se $t = -(a + 1)$ $\dim \ker T_t = 2$.

ESERCIZIO 2 (4 punti)

Determinare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dato da

$$T_t(x, y, z, u) = (x + (10 - a)z, (10 - b)y, (10 - a)x + z, (10 - c)u).$$

RISPOSTA: Una base spettrale è data da $((0, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, -1, 0), (0, 0, 0, 1))$.

ESERCIZIO 3 (4 punti)

Determinare nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$ una equazione PARAMETRICA di una retta passante per il punto $(0, 0, 0)$, che formi un angolo di $\frac{\pi}{3}$ radianti con l'asse delle x e che sia parallela al piano di equazione $(b + 1)y + (c + 1)z - (a + 1) = 0$.

RISPOSTA: Una equazione è data da $x = kt, y = -(c + 1)t, z = (b + 1)t$ con $k = \pm \sqrt{\frac{(b+1)^2 + (c+1)^2}{3}}$.

ESERCIZIO 4 (3 punti)

Provare che se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è simmetrica e $A^3 = I$ (I matrice identica), allora $A = I$.

RISPOSTA: Dato che A è simmetrica si può scrivere ${}^tE \cdot A \cdot E = D$, con E ortogonale e D matrice diagonale. Dunque $A = E \cdot D \cdot {}^tE$. Quindi $I = A^3 = (E \cdot D \cdot {}^tE) \cdot (E \cdot D \cdot {}^tE) \cdot (E \cdot D \cdot {}^tE) = E \cdot D^3 \cdot {}^tE$. Perciò $I = E \cdot D^3 \cdot {}^tE$ e dunque $I = D^3$. Quindi $I = D$. Da $A = E \cdot D \cdot {}^tE$ segue che $A = I$.

NOME:

MATRICOLA:	$\Rightarrow a=$	$, b=$	$, c=$
------------	------------------	--------	--------

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2, b = 5, c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

- (V) (K) Esistono gruppi con più di un'unità.
- (V) (K) Tutti gli anelli sono campi.
- (V) (K) Se $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ e $A + B$ è invertibile allora lo è anche $A - B$.
- (X) (F) Se A è una matrice ortogonale anche A^{2009} è ortogonale.
- (V) (K) Componendo fra loro due permutazioni dispari su un insieme di n oggetti si ottiene una permutazione dispari.
- (X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e tA non è invertibile allora anche A non è invertibile.
- (V) (K) Se $A = (a_j^i) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{p \in \mathfrak{S}_n} a_{p(1)}^1 \cdot \dots \cdot a_{p(h)}^h \cdot \dots \cdot a_{p(n)}^n$.
- (V) (K) L'insieme dei polinomi reali di grado pari nella incognita t è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
- (V) (K) Tutte le basi di uno spazio vettoriale reale di dimensione n sono concordi.
- (X) (F) Esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^6$ e $M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$.
- (V) (K) Ogni sistema lineare di 5 equazioni in 7 incognite ammette ∞^2 soluzioni.
- (X) (F) L'endomorfismo $F : \mathbb{R}^{2009} \rightarrow \mathbb{R}^{2009}$ definito da $F(x_1, \dots, x_{2009}) = (x_{2009}, \dots, x_1)$ è diagonalizzabile per similitudine.
- (V) (K) Il rango di una matrice quadrata di ordine n è sempre minore o uguale del suo determinante.
- (X) (F) Nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ esistono almeno due vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ tali che $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
- (X) (F) Nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$ esistono rette che non si intersecano e non sono fra loro parallele.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 (4 punti)

Calcolare, al variare del parametro reale t , la dimensione del nucleo della trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da $T_t(1, 0, 0) = (1, 0, t - c - 1, 2)$, $T_t(-1, 1, 0) = (0, a + 1, -t, t)$, $T_t(0, 1, 1) = (1, a + b + 2, b - c, t - b + 1)$.

RISPOSTA: Se $t \neq -(a + 1)$ $\dim \ker T_t = 0$; se $t = -(a + 1)$ $\dim \ker T_t = 1$.

ESERCIZIO 2 (4 punti)

Determinare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dato da

$$T_t(x, y, z, u) = \left((10 - a)x, (10 - b)y, (10 - c)z + u, z + (10 - c)u \right).$$

RISPOSTA: Una base spettrale è data da $\left((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1) \right)$.

ESERCIZIO 3 (4 punti)

Determinare nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$ una equazione PARAMETRICA di una retta passante per il punto $(0, 0, 0)$, che formi un angolo di $\frac{\pi}{3}$ radianti con l'asse delle y e che sia parallela al piano di equazione $(c + 1)x + (b + 1)z - (a + 1) = 0$.

RISPOSTA: Una equazione è data da $x = (b + 1)t, y = kt, z = -(c + 1)t$ con $k = \pm \sqrt{\frac{(b+1)^2 + (c+1)^2}{3}}$.

ESERCIZIO 4 (3 punti)

Sia U il sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$ formato dalle matrici $A \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $A + {}^tA$ sia un multiplo della matrice identica I . Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

RISPOSTA: Se $A + {}^tA = \lambda I$ e $B + {}^tB = \mu I$ allora $(A + B) + {}^t(A + B) = (A + {}^tA) + (B + {}^tB) = \lambda I + \mu I = (\lambda + \mu)I$. Inoltre $kA + {}^t(kA) = k(A + {}^tA) = k(\lambda I) = (k\lambda)I$. Questo prova che U è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. La dimensione di U è 2. Infatti, posto $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la condizione di appartenenza ad U si esprime con il sistema $\begin{cases} b + c = 0 \\ a - d = 0 \end{cases}$. La dimensione dello spazio delle soluzioni di tale sistema è 2.

NOME:

MATRICOLA:	$\Rightarrow a=$	$, b=$	$, c=$
------------	------------------	--------	--------

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2, b = 5, c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

- (X) (F) L'insieme degli interi pari è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
- (X) (F) L'insieme $\mathbb{Z}_7$ delle classi di resto modulo 7 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto modulo 7.
- (X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è tale che $A^2 = I$ (I matrice identica), allora $(A + I)^4 = 8(A + I)$.
- (X) (F) Un insieme di 8 vettori distinti di $\mathbb{R}^7[t]$ è una base di $\mathbb{R}^7[t]$ se e solo se tale insieme è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^7[t]$.
- (X) (F) Dato uno spazio vettoriale V , l'unico suo vettore che ha le stesse componenti rispetto a qualunque base di V è il vettore nullo.
- (X) (F) L'immagine di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^7$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^7$.
- (X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ le matrici A e $A + A$ hanno lo stesso rango.
- (V) (K) Un sistema lineare è risolubile se e solo se la sua matrice completa e la sua matrice incompleta sono uguali.
- (X) (F) Se la matrice $A \in M_{1000}(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile per similitudine, lo è anche la matrice A^{2009} .
- (X) (F) Se due matrici quadrate sono simili hanno lo stesso rango.
- (X) (F) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ è una forma bilineare.
- (V) (K) La funzione $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita ponendo $F(x, y, z) = (xy, yz, zx)$ è una trasformazione ortogonale.
- (X) (F) Due sottospazi vettoriali tridimensionali di $\mathbb{R}^4$ hanno in comune almeno i punti di un piano.
- (V) (K) I piani di equazioni cartesiane $x - y - z = 0$ e $-2x + 2y + 2z = 0$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.
- (V) (K) L'equazione $y^2 + \frac{1}{2}x^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 (4 punti)

Calcolare, al variare del parametro reale t , la dimensione del nucleo della trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definita da $T_t(1, 0, 0) = (1, 0, t - c - 1, 2)$, $T_t(-1, 1, 0) = (0, a + 1, -t, t)$, $T_t(0, 1, 1) = (1, a + b + 2, b - c, t - b + 1)$.

RISPOSTA: Se $t \neq -(a + 1)$ $\dim \ker T_t = 0$; se $t = -(a + 1)$ $\dim \ker T_t = 1$.

ESERCIZIO 2 (4 punti)

Determinare una base spettrale per l'endomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dato da

$$T_t(x, y, z, u) = ((10 - a)x, (10 - b)y, (10 - c)z + u, z + (10 - c)u).$$

RISPOSTA: Una base spettrale è data da $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 1, -1))$.

ESERCIZIO 3 (4 punti)

Determinare nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$ una equazione PARAMETRICA di una retta passante per il punto $(0, 0, 0)$, che formi un angolo di $\frac{\pi}{3}$ radianti con l'asse delle y e che sia parallela al piano di equazione $(c + 1)x + (b + 1)z - (a + 1) = 0$.

RISPOSTA: Una equazione è data da $x = (b + 1)t, y = kt, z = -(c + 1)t$ con $k = \pm \sqrt{\frac{(b+1)^2 + (c+1)^2}{3}}$.

ESERCIZIO 4 (3 punti)

Sia U il sottoinsieme di $M_2(\mathbb{R})$ formato dalle matrici $A \in M_2(\mathbb{R})$ tali che $A + {}^tA$ sia un multiplo della matrice identica I . Dimostrare che U è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$ e calcolarne la dimensione.

RISPOSTA: Se $A + {}^tA = \lambda I$ e $B + {}^tB = \mu I$ allora $(A + B) + {}^t(A + B) = (A + {}^tA) + (B + {}^tB) = \lambda I + \mu I = (\lambda + \mu)I$. Inoltre $kA + {}^t(kA) = k(A + {}^tA) = k(\lambda I) = (k\lambda)I$. Questo prova che U è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$. La dimensione di U è 2. Infatti, posto $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la condizione di appartenenza ad U si esprime con il sistema $\begin{cases} b + c = 0 \\ a - d = 0 \end{cases}$. La dimensione dello spazio delle soluzioni di tale sistema è 2.
