29 giugno 2009 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (X) $\mathbb{Z}_6$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(X) (F) Se $A, B \in M_8(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora ${}^t\big((A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A)\big) = ({}^tA)^2$.

(V) (X) Se $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ allora $\det(A - B) = \det A - \det B$

(X) (F) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x che non contengono monomi di grado 3 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ (rispetto alle usuali operazioni).

(X) (F) Esistono spazi vettoriali che hanno basi di cardinalità infinita.

(V) (X) Un sistema lineare ammette sempre almeno una soluzione.

(V) (X) Due autospazi di uno stesso endomorfismo hanno sempre almeno un vettore non nullo in comune.

(V) (X) Se $\mathbf{u}$ è un vettore dello spazio vettoriale euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, allora $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} = \mathbf{u}$.

(V) (X) I polinomi caratteristici delle matrici A e $2A$ hanno le stesse radici ($A \in M_n(\mathbb{R})$).

(X) (F) L'equazione $x^2 - y^2 = 3$ rappresenta una iperbole del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(6 punti)*

Calcolare gli autovalori (*2 punti*) ed una base spettrale (*4 punti*) per la matrice $A = \begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ b+1 & a+1 \end{pmatrix}$.

AUTOVALORI: $a+b+2$, $a-b$.

BASE SPETTRALE: $B = \big((1,1),(1,-1)\big)$.

`ESERCIZIO 2` *(2 punti)*

Calcolare la distanza nel piano euclideo standard fra il punto $(0,0)$ e la retta di equazione $(10-a)x+(10-b)y+10-c = 0$.

DISTANZA: $\frac{10-c}{\sqrt{(10-a)^2+(10-b)^2}}$.

`ESERCIZIO 3` *(3 punti)*

Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $\begin{cases} (a+1)x+(b+1)y+(c+1)z=0 \\ 2(a+1)x+10y+2(c+1)z=0 \end{cases}$.

DIMENSIONE: 1 se $b \neq 4$, 2 se $b=4$.

`ESERCIZIO 4` *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} a-10 & t & t \\ -t & 10-b & 0 \\ -t & 0 & c+1 \end{pmatrix}$ è massimo.

RISPOSTA: Il rango di A è massimo per $t \neq \pm\sqrt{\frac{(10-a)(10-b)(c+1)}{11-b+c}}$.

`ESERCIZIO 5` *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t la seguente è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^4$:

$$\{(a+1,10-b,1,0),(0,1,2,1),(a+1,t+2,5,2),(0,1,0,-1)\}.$$

RISPOSTA: È una base se e solo se $t \neq 10-b$.

`ESERCIZIO 6` *(3 punti)* Calcolare, nello spazio vettoriale euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, il vettore

$$\big((a+1,0,1)\wedge(0,0,1)\big)\wedge(10-b,1,0).$$

RISULTATO: $\big(0,0,(a+1)(10-b)\big)$.

---

29 giugno 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) **(~~F~~)** L'insieme $\mathbb{Z}$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

(~~V~~) **(F)** La trasposta di una matrice reale $n \times n$ invertibile è una matrice invertibile.

(~~V~~) **(F)** Un sistema di 4 generatori dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni) è una base dello stesso spazio vettoriale.

(V) **(~~F~~)** Il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni) costituito dalle quaterne (x, y, z, t) tali che $x + y + z + t = 0$ ha dimensione 1.

(V) **(~~F~~)** Se due matrici quadrate reali sono una il doppio dell'altra hanno lo stesso determinante.

(V) **(~~F~~)** Un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se ha tante equazioni quante incognite.

(~~V~~) **(F)** Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile se e solo se ammette una base spettrale.

(V) **(~~F~~)** Esistono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^7$ che hanno la stessa dimensione del proprio complemento ortogonale.

(V) **(~~F~~)** Dato l'usuale prodotto vettoriale $\wedge$ in $\mathbb{R}^3$, si ha che $(1, 1, 0) \wedge (0, 0, 1) = (1, 1, 1)$.

(~~V~~) **(F)** L'equazione $x^2 + y^2 = 4$ rappresenta una ellisse del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 *(5 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t la matrice $A = \begin{pmatrix} a+1 & t \\ -t & c+1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine (*4 punti*) e se esistono valori di t per i quali A ha rango 1 (*1 punto*).

DIAGONALIZZABILITÀ: È diagonalizzabile per similitudine per $|t| < \frac{|a-c|}{2}$ se $a \neq c$, e per $t = 0$ se $a = c$.

RANGO UGUALE A 1: Non ha mai rango 1.

ESERCIZIO 2 *(3 punti)*

Calcolare, nello spazio euclideo standard, l'area del triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(a+1, 10-b, 10-c)$, $(0,1,0)$.

AREA TRIANGOLO: $\frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2 + (10-c)^2}$.

ESERCIZIO 3 *(3 punti)*

Calcolare la dimensione dell'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x,y) = \big((10-a)x - (b+1)y, 2x - 2y, 3x - 3y, 4x - 4y\big).$$

DIMENSIONE DELL'IMMAGINE: 1 se $a + b = 9$, 2 se $a + b \neq 9$.

ESERCIZIO 4 *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t la seguente è una base ortogonale del piano euclideo standard:

$$\big\{(a+1, 10-b), (10-c, t)\big\}.$$

RISPOSTA: È una base ortogonale se e solo se $t = -\frac{(a+1)(10-c)}{10-b}$.

ESERCIZIO 5 *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale k le due rette del piano euclideo standard di rispettive equazioni parametriche $\begin{cases} x = kt + a + 1 \\ y = (b+1)t + c + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2t + a + 1 \\ y = t + 10 - c \end{cases}$ sono parallele.

RISPOSTA: Sono parallele per $k = 2b + 2$.

ESERCIZIO 6 *(3 punti)* Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 11-b & 1 \\ 1 & c+1 \end{pmatrix}$.

INVERSA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c+1}{(11-b)(c+1)-1} & \frac{-1}{(11-b)(c+1)-1} \\ \frac{-1}{(11-b)(c+1)-1} & \frac{11-b}{(11-b)(c+1)-1} \end{pmatrix}$.

---

29 giugno 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (X) L'insieme dei numeri interi pari è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(X) (F) Se $A, B \in M_9(\mathbb{R})$ e $\det B = 1$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A$.

(X) (F) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ è ortogonale.

(V) (X) Se p è una permutazione pari allora p^{-1} è una permutazione dispari.

(X) (F) La dimensione dello spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 che hanno la prima riga nulla è 2 (si considerino le usuali operazioni).

(V) (X) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ ha la diagonale principale nulla, allora $\det A = 0$.

(X) (F) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ diagonali è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

(X) (F) Il multiplo di un endomorfismo diagonalizzabile dello spazio vettoriale stardard $\mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

(X) (F) Se $\|\cdot\|$ è la norma euclidea standard su $\mathbb{R}^3$ allora $\|\mathbf{u} + 2\mathbf{u}\| = 3\|\mathbf{u}\|$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$.

(X) (F) I piani di equazioni cartesiane $-x = 1$ e $2x = 7$ sono paralleli nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(6 punti)*

Calcolare gli autovalori (*2 punti*) ed una base spettrale (*4 punti*) per la matrice $A = \begin{pmatrix} a+1 & b+1 \\ b+1 & a+1 \end{pmatrix}$.

AUTOVALORI: $a+b+2$, $a-b$.

BASE SPETTRALE: $B = \big((1,1),(1,-1)\big)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(2 punti)*

Calcolare la distanza nel piano euclideo standard fra il punto $(0,0)$ e la retta di equazione $(10-a)x+(10-b)y+10-c = 0$.

DISTANZA: $\frac{10-c}{\sqrt{(10-a)^2+(10-b)^2}}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(3 punti)*

Calcolare la dimensione del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ di equazione cartesiana $\begin{cases} (a+1)x+(b+1)y+(c+1)z=0 \\ 2(a+1)x+10y+2(c+1)z=0 \end{cases}$.

DIMENSIONE: 1 se $b \neq 4$, 2 se $b = 4$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} a-10 & t & t \\ -t & 10-b & 0 \\ -t & 0 & c+1 \end{pmatrix}$ è massimo.

RISPOSTA: Il rango di A è massimo per $t \neq \pm\sqrt{\frac{(10-a)(10-b)(c+1)}{11-b+c}}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t la seguente è una base per lo spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^4$:

$$\{(a+1,10-b,1,0),(0,1,2,1),(a+1,t+2,5,2),(0,1,0,-1)\}.$$

RISPOSTA: È una base se e solo se $t \neq 10-b$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 6}}$ *(3 punti)* Calcolare, nello spazio vettoriale euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, il vettore

$$\big((a+1,0,1) \wedge (0,0,1)\big) \wedge (10-b,1,0).$$

RISULTATO: $\big(0,0,(a+1)(10-b)\big)$.

---

29 giugno 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) L'insieme $M_5(\mathbb{R})$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(X) (F) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ non invertibili è una matrice non invertibile.

(X) (F) Se $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ e $A = 3B$, allora A e B hanno lo stesso rango.

(V) (X) Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale V è contenuto in una base di V.

(V) (X) Se $T : V \to W$ è una trasformazione lineare allora si ha che T è suriettiva se e solo se $\dim \operatorname{Ker} T = 0$.

(V) (X) Una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile per similitudine se e solo se A è simmetrica.

(X) (F) Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ ammette un autovalore di molteplicità geometrica 3 allora è diagonalizzabile.

(X) (F) Permutando l'ordine dei vettori di una base ortonormale ordinata di uno spazio vettoriale euclideo V si ottiene ancora una base ortonormale ordinata di V.

(X) (F) Se due spazi vettoriali reali finitamente generati hanno la stessa dimensione sono isomorfi.

(V) (X) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = -1, z = 0$ e $x = 0, y = 2t, z = 1$ sono parallele nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t la matrice $A = \begin{pmatrix} a+1 & t \\ -t & c+1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine (*4 punti*) e se esistono valori di t per i quali A ha rango 1 (*1 punto*).

DIAGONALIZZABILITÀ: È diagonalizzabile per similitudine per $|t| < \frac{|a-c|}{2}$ se $a \neq c$, e per $t = 0$ se $a = c$.

RANGO UGUALE A 1: Non ha mai rango 1.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(3 punti)*

Calcolare, nello spazio euclideo standard, l'area del triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(a+1, 10-b, 10-c)$, $(0,1,0)$.

AREA TRIANGOLO: $\frac{1}{2}\sqrt{(a+1)^2 + (10-c)^2}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(3 punti)*

Calcolare la dimensione dell'immagine della trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x,y) = \big((10-a)x - (b+1)y, 2x - 2y, 3x - 3y, 4x - 4y\big).$$

DIMENSIONE DELL'IMMAGINE: 1 se $a + b = 9$, 2 se $a + b \neq 9$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t la seguente è una base ortogonale del piano euclideo standard:

$$\{(a+1, 10-b), (10-c, t)\}.$$

RISPOSTA: È una base ortogonale se e solo se $t = -\frac{(a+1)(10-c)}{10-b}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale k le due rette del piano euclideo standard di rispettive equazioni parametriche $\begin{cases} x = kt + a + 1 \\ y = (b+1)t + c + 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2t + a + 1 \\ y = t + 10 - c \end{cases}$ sono parallele.

RISPOSTA: Sono parallele per $k = 2b + 2$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 6}}$ *(3 punti)* Calcolare l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} 11-b & 1 \\ 1 & c+1 \end{pmatrix}$.

INVERSA: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{c+1}{(11-b)(c+1)-1} & \frac{-1}{(11-b)(c+1)-1} \\ \frac{-1}{(11-b)(c+1)-1} & \frac{11-b}{(11-b)(c+1)-1} \end{pmatrix}$.
