5 luglio 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) Se A e B sono due matrici simmetriche $n \times n$ allora anche $A - B$ è una matrice simmetrica.

(X) (F) Gli spazi vettoriali standard $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ sono isomorfi se e solo se $m = n$.

(X) (F) Siano S e T due endomorfismi di $\mathbb{R}^n$, e A e B le matrici a loro associate rispetto alla base canonica. Allora se $S = T^{-1}$ si ha che $A = B^{-1}$.

(V) (X) Un sistema lineare omogeneo nelle incognite x, y, z, t può non ammettere alcuna soluzione.

(V) (X) La somma di due endomorfismi iniettivi di $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo iniettivo.

(X) (F) Ogni matrice ortogonale ha determinante uguale a 1 o a -1.

(X) (F) Tutte le matrici quadrate reali con determinante uguale a 2010 sono invertibili.

(X) (F) Se (v_1, v_2, v_3) è una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rispetto al prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$, allora $\langle v_1 + v_2, v_2 + v_3 \rangle = 1$.

(X) (F) Se $A = {}^tA$ allora A è diagonalizzabile per similitudine.

(X) (F) Il polinomio caratteristico di una matrice quadrata reale può non ammettere radici reali.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*1 punto*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k-2 & \gamma & \alpha+\beta+6 \\ 0 & 2k+2 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*3 punti*).

AUTOVALORI: $k-2$, $2k+2$, $\alpha+\beta$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq -4, \frac{\alpha+\beta-2}{2}, \alpha+\beta+2$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq \frac{\alpha+\beta-2}{2}, \alpha+\beta+2$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π contenente la retta $\begin{cases} x+\beta z = 1 \\ y = -\alpha \end{cases}$ e passante per il punto $P(0,0,\gamma)$ (*3 punti*). Determinare inoltre la distanza di π dall'origine del sistema di riferimento (*2 punti*).

EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : \alpha x + (1-\beta\gamma)y + \alpha\beta z - \alpha\beta\gamma = 0$. La distanza di π da O è dunque pari a $\frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2+(1-\beta\gamma)^2+\alpha^2\beta^2}}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$ e $\gamma = 10-c$. Si fornisca un esempio di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che T sia suriettiva e Ker$T$ NON contenga i vettori $(\alpha, 0, 0, \beta, 0)$ e $(0, -\gamma, 0, 0, 0)$.

RISPOSTA: una possibile soluzione è data dalla trasformazione $(y) = A(x)$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z

$$\begin{cases} x & +(\gamma+1)y & +3z & = & k-\alpha+4 \\ (\alpha-k-1)x & +2(\gamma+1)y & +6z & = & 2 \\ -x & +2(\gamma+1)y & +(k+\beta+9)z & = & 4 \end{cases}$$

Determinare le matrici incompleta e completa associate al sistema *(1 punto)*. Al variare del parametro reale k, discutere il sistema lineare, dicendo per quali valori di k esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(4 punti)*.

RISPOSTA: Le matrici incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \gamma+1 & 3 \\ \alpha-k-1 & 2(\gamma+1) & 6 \\ -1 & 2(\gamma+1) & (k+\beta+9) \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 1 & \gamma+1 & 3 & k-\alpha+4 \\ \alpha-k-1 & 2(\gamma+1) & 6 & 2 \\ -1 & 2(\gamma+1) & (k+\beta+9) & 4 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq \alpha-3, -\beta-3$ vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 3$ e dunque dim(Sol(S)) $= 0$. Se $k = \alpha-3$, vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 2$ e dunque dim(Sol(S)) $= 1$. Se $k = -\beta-3$, vale che $\rho(A_k) = 2 \neq 3 = \rho(C_k)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$.

---

5 luglio 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) **(F)** In $\mathbb{C}$ si ha che $\frac{2i}{1+i} = 1 + i$.

(V) **(X)** Ogni matrice simmetrica è ortogonale.

(X) **(F)** La composizione di due endomorfismi iniettivi di $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo iniettivo.

(V) **(X)** Se $A \in M_8(\mathbb{R})$ è una matrice diagonale invertibile allora cancellando una qualunque riga ed una qualunque colonna di A si ottiene una matrice 7×7 invertibile.

(X) **(F)** Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare (definito positivo) sullo spazio vettoriale V allora si ha che $\langle v + v, v - v \rangle = 0$ per ogni $v \in V$.

(X) **(F)** Ogni sottoinsieme non vuoto di una base di uno spazio vettoriale V è linearmente indipendente.

(V) **(X)** Ogni matrice reale $n \times n$ con determinante non nullo è diagonalizzabile per similitudine.

(X) **(F)** Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ e siano U_{λ_1}, U_{λ_2} gli autospazi di due suoi autovalori distinti. Allora U_{λ_1} e U_{λ_2} non possono avere in comune vettori non nulli.

(V) **(X)** La molteplicità algebrica di un autovalore è sempre diversa da quella geometrica.

(V) **(X)** L'equazione $x^2 \cdot y^2 = 0$ rappresenta una ellisse del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*1 punto*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+2 & \alpha & -\beta-\gamma-6 \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta-\gamma \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*3 punti*).

AUTOVALORI: $k+2$, $2k-2$, $-\beta-\gamma$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq 4, \frac{-\beta-\gamma+2}{2}, -\beta-\gamma-2$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq \frac{-\beta-\gamma+2}{2}, -\beta-\gamma-2$.

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π contenente la retta $\begin{cases} y+\beta z = 1 \\ x = -\alpha \end{cases}$ e passante per il punto $P(\gamma, 0, 0)$ (*3 punti*). Determinare inoltre la distanza di π dall'origine del sistema di riferimento (*2 punti*).

EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : x + (\alpha+\gamma)y + (\alpha+\gamma)\beta z - \gamma = 0$. La distanza di π da O è dunque pari a $\frac{\gamma}{\sqrt{1+(\alpha+\gamma)^2(1+\beta^2)}}$.

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$ e $\gamma = 10-c$. Si fornisca un esempio di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tale che T sia iniettiva e ImT NON contenga i vettori $(0,0,\alpha,\beta,0)$ e $(0,\gamma,0,0,0)$.

RISPOSTA: una possibile soluzione è data dalla trasformazione $(y) = A(x)$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

`ESERCIZIO 4` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z

$$\begin{cases} x & +3y & +(\alpha+1)z & = & k-\beta+4 \\ (\beta-k-1)x & +6y & +2(\alpha+1)z & = & 2 \\ -x & +(k+\gamma+9)y & +2(\alpha+1)z & = & 4 \end{cases}$$

Determinare le matrici incompleta e completa associate al sistema *(1 punto)*. Al variare del parametro reale k, discutere il sistema lineare, dicendo per quali valori di k esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(4 punti)*.

RISPOSTA: Le matrici incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha+1 \\ \beta-k-1 & 6 & 2(\alpha+1) \\ -1 & (k+\gamma+9) & 2(\alpha+1) \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha+1 & k-\beta+4 \\ \beta-k-1 & 6 & 2(\alpha+1) & 2 \\ -1 & (k+\gamma+9) & 2(\alpha+1) & 4 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq \beta-3, -\gamma-3$ vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 3$ e dunque dim(Sol(S)) $= 0$. Se $k = \beta-3$, vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 2$ e dunque dim(Sol(S)) $= 1$. Se $k = -\gamma-3$, vale che $\rho(A_k) = 2 \neq 3 = \rho(C_k)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$.

---

5 luglio 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $m \times n$ ha dimensione $m \cdot n$.

(V) (X) La funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita ponendo $F(x, y) = (x + 1, y - 1)$ è una trasformazione lineare.

(X) (F) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili e $A = B^{-1}$, allora si ha che $(A + B)(B - A) = B^2 - A^2$.

(V) (X) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ allora $Tr(A \cdot B) = Tr(A) \cdot Tr(B)$.

(X) (F) L'insieme delle n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ di $\mathbb{R}^n$ tali che $x_1 + \ldots + x_n = 0$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^n$.

(V) (X) Esistono matrici quadrate reali per le quali non esiste il polinomio caratteristico.

(X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale allora A coincide con la trasposta della sua inversa.

(X) (F) Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ tre vettori non nulli e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare naturale su $\mathbb{R}^3$. Se $\langle u, v \rangle = 0$, $\langle u, w \rangle = 0$ e $\langle v, w \rangle = 0$ allora (u, v, w) è una base di $\mathbb{R}^3$.

(V) (X) Il prodotto vettoriale $\wedge$ definito sullo spazio vettoriale stardard orientato $\mathbb{R}^3$ è commutativo ($u \wedge v = v \wedge u$).

(X) (F) I piani di equazioni cartesiane $x - y = 1$ e $z = 0$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*1 punto*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k-2 & \gamma & \alpha+\beta+6 \\ 0 & 2k+2 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha+\beta \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*3 punti*).

AUTOVALORI: $k-2$, $2k+2$, $\alpha+\beta$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq -4, \frac{\alpha+\beta-2}{2}, \alpha+\beta+2$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq \frac{\alpha+\beta-2}{2}, \alpha+\beta+2$.

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π contenente la retta $\begin{cases} x+\beta z = 1 \\ y = -\alpha \end{cases}$ e passante per il punto $P(0,0,\gamma)$ (*3 punti*). Determinare inoltre la distanza di π dall'origine del sistema di riferimento (*2 punti*).

EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : \alpha x + (1-\beta\gamma)y + \alpha\beta z - \alpha\beta\gamma = 0$. La distanza di π da O è dunque pari a $\frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2+(1-\beta\gamma)^2+\alpha^2\beta^2}}$.

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$ e $\gamma = 10-c$. Si fornisca un esempio di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ tale che T sia suriettiva e Ker$T$ NON contenga i vettori $(\alpha, 0, 0, \beta, 0)$ e $(0, -\gamma, 0, 0, 0)$.

RISPOSTA: una possibile soluzione è data dalla trasformazione $(y) = A(x)$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

`ESERCIZIO 4` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z

$$\begin{cases} x & +(\gamma+1)y & +3z & = & k-\alpha+4 \\ (\alpha-k-1)x & +2(\gamma+1)y & +6z & = & 2 \\ -x & +2(\gamma+1)y & +(k+\beta+9)z & = & 4 \end{cases}$$

Determinare le matrici incompleta e completa associate al sistema *(1 punto)*. Al variare del parametro reale k, discutere il sistema lineare, dicendo per quali valori di k esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(4 punti)*.

RISPOSTA: Le matrici incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & \gamma+1 & 3 \\ \alpha-k-1 & 2(\gamma+1) & 6 \\ -1 & 2(\gamma+1) & (k+\beta+9) \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 1 & \gamma+1 & 3 & k-\alpha+4 \\ \alpha-k-1 & 2(\gamma+1) & 6 & 2 \\ -1 & 2(\gamma+1) & (k+\beta+9) & 4 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq \alpha-3, -\beta-3$ vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 3$ e dunque dim(Sol(S)) $= 0$. Se $k = \alpha-3$, vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 2$ e dunque dim(Sol(S)) $= 1$. Se $k = -\beta-3$, vale che $\rho(A_k) = 2 \neq 3 = \rho(C_k)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$.

---

5 luglio 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(~~**V**~~) (**F**) Sia A una matrice reale $n \times n$. L'insieme delle sue colonne è una base per $\mathbb{R}^n$ se e solo se il rango di A è uguale a n.

(**V**) (~~**F**~~) L'unica matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ che abbia determinante uguale a 1 è la matrice identica.

(~~**V**~~) (**F**) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile, allora anche la matrice $5A$ è invertibile.

(**V**) (~~**F**~~) L'insieme delle matrici quadrate reali 2×2 nelle quali il prodotto degli elementi sulla diagonale principale è nullo è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

(~~**V**~~) (**F**) Non esiste alcuna trasformazione lineare iniettiva $T : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$.

(~~**V**~~) (**F**) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare (definito positivo) sullo spazio vettoriale V e $\| \cdot \|$ è la rispettiva norma allora si ha che $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ per ogni $u, v \in V$ con u ortogonale a v.

(**V**) (~~**F**~~) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora le matrici A e A^2 hanno lo stesso rango.

(~~**V**~~) (**F**) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di autovettori non nulli.

(~~**V**~~) (**F**) L'unico vettore dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$ che ha prodotto scalare nullo con tutti i vettori di $\mathbb{R}^n$ è il vettore nullo.

(~~**V**~~) (**F**) I piani di equazioni parametriche $x = t - 1, y = s, z = 8$ e $x = s, y = t, z = 5$ sono paralleli nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*1 punto*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} k+2 & \alpha & -\beta-\gamma-6 \\ 0 & 2k-2 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta-\gamma \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*3 punti*).

AUTOVALORI: $k+2$, $2k-2$, $-\beta-\gamma$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq 4, \frac{-\beta-\gamma+2}{2}, -\beta-\gamma-2$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq \frac{-\beta-\gamma+2}{2}, -\beta-\gamma-2$.

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione cartesiana per il piano π contenente la retta $\begin{cases} y+\beta z = 1 \\ x = -\alpha \end{cases}$ e passante per il punto $P(\gamma, 0, 0)$ (*3 punti*). Determinare inoltre la distanza di π dall'origine del sistema di riferimento (*2 punti*).

EQUAZIONE CARTESIANA DEL PIANO: Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è data da $\pi : x + (\alpha+\gamma)y + (\alpha+\gamma)\beta z - \gamma = 0$. La distanza di π da O è dunque pari a $\frac{\gamma}{\sqrt{1+(\alpha+\gamma)^2(1+\beta^2)}}$.

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$ e $\gamma = 10-c$. Si fornisca un esempio di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ tale che T sia iniettiva e ImT NON contenga i vettori $(0,0,\alpha,\beta,0)$ e $(0,\gamma,0,0,0)$.

RISPOSTA: una possibile soluzione è data dalla trasformazione $(y) = A(x)$ dove $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

`ESERCIZIO 4` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10-a$, $\beta = 10-b$, $\gamma = 10-c$. Si consideri il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z

$$\begin{cases} x & +3y & +(\alpha+1)z & = & k-\beta+4 \\ (\beta-k-1)x & +6y & +2(\alpha+1)z & = & 2 \\ -x & +(k+\gamma+9)y & +2(\alpha+1)z & = & 4 \end{cases}$$

Determinare le matrici incompleta e completa associate al sistema *(1 punto)*. Al variare del parametro reale k, discutere il sistema lineare, dicendo per quali valori di k esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni *(4 punti)*.

RISPOSTA: Le matrici incompleta e completa associate al sistema sono rispettivamente

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha+1 \\ \beta-k-1 & 6 & 2(\alpha+1) \\ -1 & (k+\gamma+9) & 2(\alpha+1) \end{pmatrix}, \quad C_k = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha+1 & k-\beta+4 \\ \beta-k-1 & 6 & 2(\alpha+1) & 2 \\ -1 & (k+\gamma+9) & 2(\alpha+1) & 4 \end{pmatrix}.$$

Se $k \neq \beta-3, -\gamma-3$ vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 3$ e dunque dim(Sol(S)) $= 0$. Se $k = \beta-3$, vale che $\rho(A_k) = \rho(C_k) = 2$ e dunque dim(Sol(S)) $= 1$. Se $k = -\gamma-3$, vale che $\rho(A_k) = 2 \neq 3 = \rho(C_k)$ e dunque $Sol(S) = \emptyset$.
