7 giugno 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) **(F)** Se A e B sono due matrici simmetriche $n \times n$ e $AB = BA$ allora anche AB è una matrice simmetrica.

(V) **(X)** Tutti gli spazi vettoriali hanno dimensione finita.

(X) **(F)** Se A e B sono le matrici rispettivamente associate a due endomorfismi S e T di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica, allora $A + B$ è la matrice associata a $S + T$ rispetto alla stessa base.

(V) **(X)** Un sistema di equazioni ammette soluzioni se e solo se è lineare.

(X) **(F)** Ogni endomorfismo T di $\mathbb{R}^n$ è iniettivo se e solo se ogni $v \in \mathbb{R}^n$ ammette almeno una retroimmagine secondo T.

(X) **(F)** Nessuna matrice singolare è ortogonale.

(X) **(F)** Non esiste nessuna matrice $A \in M_{67}(\mathbb{R})$ tale che $A^{2010} = -I$ (I matrice identica 67×67).

(V) **(X)** Sia T un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ e sia (v_1, v_2, v_3) una base ordinata ortogonale di $\mathbb{R}^3$. Allora $(T(v_1), T(v_2), T(v_3))$ è una base ordinata ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

(V) **(X)** Se due endomorfismi di $\mathbb{R}^5$ ammettono una stessa base come base spettrale, allora coincidono.

(X) **(F)** Se u e v sono due autovettori non nulli di un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associati a due autovalori distinti allora non possono essere uno multiplo dell'altro.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*2 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -\gamma & \frac{2}{3}k & 0 \\ \frac{2}{3}k & -\gamma & 0 \\ 0 & \beta & \alpha + \frac{k}{3} \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*2 punti*).

AUTOVALORI: $\alpha + \frac{k}{3}$, $-\gamma - \frac{2}{3}k$, $-\gamma + \frac{2}{3}k$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq 0, 3\alpha + 3\gamma, -(\alpha+\gamma)$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq 3\alpha + 3\gamma, -(\alpha+\gamma)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione parametrica per la retta r passante per il punto $P(\beta, 0, 0)$, parallela al piano $\pi : \beta x + y + z + \gamma = 0$ ed ortogonale alla retta s di rappresentazione cartesiana $\begin{cases} \alpha x = 0 \\ \gamma y + \beta z = 0 \end{cases}$.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : x = \beta - (\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})t,\ y = t,\ z = \frac{\beta}{\gamma}t$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 9 - a$ e $\gamma = 9 - c$. Determinare una base del sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ dato da $W = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : A \times M = -M \right\}$, dove $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\left\{ \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ \alpha+1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $T(x,y,z) = (-\alpha y, 0, \gamma z)$. Si calcoli una base per il nucleo di T *(2 punti)* e una base per il nucleo di T^2 *(3 punti)*.

RISPOSTA: Una base per il nucleo di T è $((1,0,0))$. Una base per il nucleo di T^2 è $((0,1,0),(1,0,0))$.

---

7 giugno 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (F) Se $z \in \mathbb{C}$ allora $z \cdot \bar{z} = 1$.

(V) (F) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è ortogonale.

(V) (F) Se A e B sono le matrici rispettivamente associate a due endomorfismi S e T di $\mathbb{R}^n$ rispetto alla base canonica, allora AB è la matrice associata a $S \circ T$ rispetto alla stessa base.

(V) (F) Se $A \in M_8(\mathbb{R})$ è una matrice diagonale invertibile allora cancellando la prima riga e la prima colonna di A si ottiene una matrice 7×7 invertibile.

(V) (F) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare (definito positivo) sullo spazio vettoriale V allora si ha che $\langle v, v \rangle = 0$ per ogni $v \in V$.

(V) (F) Due basi di uno stesso spazio vettoriale V hanno sempre la stessa cardinalità.

(V) (F) Se una matrice reale $n \times n$ ha determinante uguale a 1 allora ammette almeno un autovalore reale.

(V) (F) Se una matrice reale $n \times n$ non è diagonalizzabile per similitudine allora non è simmetrica.

(V) (F) Se A è la matrice associata ad un endomorfismo T di $\mathbb{R}^3$ e A è ortogonale allora $\ker T$ contiene solo il vettore nullo.

(V) (F) L'equazione $x - y^2 = 0$ rappresenta una ellisse del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*2 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -\gamma & \frac{2}{3}k & 0 \\ \frac{2}{3}k & -\gamma & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - \frac{k}{3} \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*2 punti*).

AUTOVALORI: $\alpha - \frac{k}{3}$, $-\gamma - \frac{2}{3}k$, $-\gamma + \frac{2}{3}k$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq 0, -(3\alpha + 3\gamma), \alpha + \gamma$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq -(3\alpha + 3\gamma), \alpha + \gamma$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione parametrica per la retta r passante per il punto $P(0, \alpha, 0)$, parallela al piano $\pi : x + \beta y + z + \gamma = 0$ ed ortogonale alla retta s di rappresentazione cartesiana $\begin{cases} \alpha y = 0 \\ \gamma x + \beta z = 0 \end{cases}$.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : x = t,\ y = -\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) t + \alpha,\ z = \frac{\beta}{\gamma} t.$

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 11 - a$ e $\beta = 11 - b$. Determinare una base del sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ dato da $W = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : A \times M = M \right\}$, dove $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\left\{ \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x, y, z, u) = (\alpha x - \alpha y - u, \gamma y, 0, y).$$

Si calcoli una base per il nucleo di T *(3 punti)* e una base per l'immagine di T *(2 punti)*.

RISPOSTA: Una base per il nucleo di T è $((1, 0, 0, \alpha), (0, 0, 1, 0))$.

Una base per l'immagine di T è $((1, 0, 0, 0), (-\alpha, \gamma, 0, 1))$.

---

7 giugno 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (~~F~~) Lo spazio vettoriale reale delle matrici reali $m \times n$ ha dimensione $m + n$.

(V) (~~F~~) Ogni polinomio a coefficienti reali in una variabile ammette almeno una radice in $\mathbb{R}$.

(~~V~~) (F) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ tali che $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ allora $AB = BA$.

(~~V~~) (F) Se A e B sono due matrici reali $n \times n$ allora $Tr(A - B) = Tr(A) - Tr(B)$.

(~~V~~) (F) L'insieme delle successioni reali convergenti a 0 è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale di tutte le successioni reali (dotato delle usuali operazioni).

(V) (~~F~~) Se il polinomio caratteristico di una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ ha una radice reale di molteplicità algebrica n allora A è diagonalizzabile per similitudine.

(V) (~~F~~) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è una matrice ortogonale allora A coincide con la sua inversa.

(V) (~~F~~) Siano $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare naturale su $\mathbb{R}^3$. Se $\langle u, v \rangle = 0$, $\langle u, w \rangle = 0$ e $\langle v, w \rangle = 0$ allora (u, v, w) non può essere una base di $\mathbb{R}^3$.

(V) (~~F~~) Sommando due matrici reali $n \times n$ a determinante nullo si ottiene sempre una matrice a determinante nullo.

(V) (~~F~~) I piani di equazioni cartesiane $x - y = 1$ e $x + z = 0$ sono paralleli nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*2 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -\gamma & \frac{2}{3}k & 0 \\ \frac{2}{3}k & -\gamma & 0 \\ 0 & \beta & \alpha + \frac{k}{3} \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*2 punti*).

AUTOVALORI: $\alpha + \frac{k}{3}$, $-\gamma - \frac{2}{3}k$, $-\gamma + \frac{2}{3}k$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq 0, 3\alpha + 3\gamma, -(\alpha+\gamma)$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq 3\alpha + 3\gamma, -(\alpha+\gamma)$.

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione parametrica per la retta r passante per il punto $P(\beta, 0, 0)$, parallela al piano $\pi : \beta x + y + z + \gamma = 0$ ed ortogonale alla retta s di rappresentazione cartesiana $\begin{cases} \alpha x = 0 \\ \gamma y + \beta z = 0 \end{cases}$.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : x = \beta - (\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})t,\ y = t,\ z = \frac{\beta}{\gamma}t.$

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 9 - a$ e $\gamma = 9 - c$. Determinare una base del sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ dato da $W = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : A \times M = -M \right\}$, dove $A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\left\{ \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ \alpha+1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} \right\}$.

`ESERCIZIO 4` *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $T(x, y, z) = (-\alpha y, 0, \gamma z)$. Si calcoli una base per il nucleo di T *(2 punti)* e una base per il nucleo di T^2 *(3 punti)*.

RISPOSTA: Una base per il nucleo di T è $((1, 0, 0))$. Una base per il nucleo di T^2 è $((0, 1, 0), (1, 0, 0))$.

---

7 giugno 2010 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) Sia A una matrice reale $n \times n$. L'insieme delle sue righe è una base per $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\det A \neq 0$.

(X) (F) Non esiste nessuna matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ che sia contemporaneamente ortogonale e antisimmetrica (cioè ${}^tA = -A$).

(X) (F) Se $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ sono matrici invertibili, allora anche la matrice $ABABABAB$ è invertibile.

(V) (X) L'insieme delle matrici quadrate reali 9×9 che hanno traccia positiva è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

(V) (X) Se $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare iniettiva allora $\dim \operatorname{Im} T = 1$.

(V) (X) Se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ è un prodotto scalare (definito positivo) sullo spazio vettoriale V e $\| \cdot \|$ è la rispettiva norma allora si ha che $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ per ogni $u, v \in V$ con u ortogonale a v.

(X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ allora le matrici ${}^tA$ e $-A$ hanno lo stesso rango.

(X) (F) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^n$ privi di autovalori reali.

(V) (X) Non esistono vettori che abbiano prodotto scalare negativo con tutti i vettori di una (fissata) base dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^n$.

(X) (F) I piani di equazioni parametriche $x = 0, y = t, z = s$ e $x = s, y = t, z = 4$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, riportando UNICAMENTE i risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Calcolare gli autovalori (*2 punti*) della matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -\gamma & \frac{2}{3}k & 0 \\ \frac{2}{3}k & -\gamma & 0 \\ 0 & \beta & \alpha - \frac{k}{3} \end{pmatrix}.$$

Al variare del parametro reale k, stabilire quando A_k ammette autovalori tutti distinti (*1 punto*) e quando è diagonalizzabile (*2 punti*).

AUTOVALORI: $\alpha - \frac{k}{3}$, $-\gamma - \frac{2}{3}k$, $-\gamma + \frac{2}{3}k$. Sono tutti distinti se e soltanto se $k \neq 0, -(3\alpha + 3\gamma), \alpha + \gamma$.

DIAGONALIZZABILITÀ: A_k è diagonalizzabile se e soltanto se $k \neq -(3\alpha + 3\gamma), \alpha + \gamma$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = a+1$, $\beta = b+1$, $\gamma = c+1$. Nello spazio euclideo standard, determinare una rappresentazione parametrica per la retta r passante per il punto $P(0, \alpha, 0)$, parallela al piano $\pi : x + \beta y + z + \gamma = 0$ ed ortogonale alla retta s di rappresentazione cartesiana $\begin{cases} \alpha y = 0 \\ \gamma x + \beta z = 0 \end{cases}$.

EQUAZIONE DELLA RETTA: Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è data da $r : x = t,\ y = -\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right) t + \alpha,\ z = \frac{\beta}{\gamma} t.$

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 11 - a$ e $\beta = 11 - b$. Determinare una base del sottospazio di $M_2(\mathbb{R})$ dato da $W = \left\{ M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : A \times M = M \right\}$, dove $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

BASE: Una possibile base del sottospazio considerato è $\left\{ \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ 0 & \alpha - 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(5 punti)* Si ponga $\alpha = 10 - a$, $\beta = 10 - b$, $\gamma = 10 - c$. Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definita ponendo

$$T(x, y, z, u) = (\alpha x - \alpha y - u, \gamma y, 0, y).$$

Si calcoli una base per il nucleo di T *(3 punti)* e una base per l'immagine di T *(2 punti)*.

RISPOSTA: Una base per il nucleo di T è $((1, 0, 0, \alpha), (0, 0, 1, 0))$.

Una base per l'immagine di T è $((1, 0, 0, 0), (-\alpha, \gamma, 0, 1))$.
