8 gennaio 2009 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	⇒ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) $(\mathbb{Q}, +)$ è un gruppo commutativo.

(X) (F) Se $A, I \in M_4(\mathbb{R})$ (I matrice identica) allora $(A + I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$.

(V) (X) La somma di due matrici $n \times n$ ortogonali è ortogonale.

(V) (X) $\det {}^tA = -\det A$.

(X) (F) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile y è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

(X) (F) L'insieme delle matrici $n \times n$ reali simmetriche è un sottospazio vettoriale di $M_n(\mathbb{R})$.

(V) (X) L'unione di due basi di uno spazio vettoriale è ancora una base dello spazio vettoriale.

(V) (X) La somma di due automorfismi di $\mathbb{R}^8$ è un automorfismo di $\mathbb{R}^8$.

(V) (X) Un sistema lineare ammette almeno una soluzione se e solo se il rango della sua matrice completa è massimo.

(V) (X) Esistono endomorfismi di $\mathbb{R}^9$ che ammettono come autovalori tutti i numeri reali.

(X) (F) $\left(\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (1, 0, 0)\right)$ è una base ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(V) (X) Ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione n può essere orientato in esattamente n modi diversi.

(X) (F) Le isometrie conservano le ampiezze degli angoli.

(V) (X) Le rette del piano di equazioni parametriche $x = 3t, y = 2t + 1$ e $x = 4t - 1, y = -6t$ sono fra loro parallele.

(V) (X) L'equazione $x^2 - 2y^2 = 1$ rappresenta una parabola del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(3 punti)*

Calcolare, al variare del parametro reale t, la dimensione dell'immagine della trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$T_t(x, y, z) = \Big((a+1)x,\ x + (b+1)y + tz,\ x + ty + (c+1)z,\ (b+1-t)y + (t-c-1)z\Big).$$

RISPOSTA: 3 se $t \neq \pm\sqrt{(b+1)(c+1)}$, 2 altrimenti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(4 punti)*

Determinare per quali valori del parametro reale t l'endomorfismo $T_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dato da

$$T_t(x, y, z, u) = \Big((20-a)x + t^2u,\ (10-b)y,\ x - (c+1)z,\ x + y + (20-a)u\Big)$$

ammette una base spettrale.

RISPOSTA: L'endomorfismo T_t è diagonalizzabile se e solo se $t \neq \pm(21-a+c), \pm(10-a+b), 0$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(4 punti)*

Calcolare una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard) per il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^4$ dato dal sistema $\begin{cases} (10-a)x = 0 \\ (10-b)y + (c+1)z - u = 0 \end{cases}$ nelle incognite x, y, z, u.

RISPOSTA: una possibile base è data da $\Big((0, 1, 0, 10-b),\ \big(0, -(10-b)^2(c+1), (10-b) + (10-b)^3, (10-b)(c+1)\big)\Big)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(4 punti)*

Dire, MOTIVANDO LA RISPOSTA, se la matrice $B = I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^k$ è invertibile quando $k = 1.000.000$ e $A = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 1 & b+2 & 0 \\ -2 & 5 & c+2 \end{pmatrix}$. Suggerimento: cercate di scrivere B in modo più semplice e ricordate che la potenza di una matrice triangolare bassa è sempre una matrice triangolare bassa.

RISPOSTA: Dato che $(I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^k)(A - I) = A^{k+1} - I$ e la matrice $A - I$ è invertibile (infatti $\det(A-I) = (a+1)(b+1)(c+1) \neq 0$) si ha che B è invertibile se e solo se lo è $A^{k+1} - I$. Dato che A è una matrice triangolare bassa lo è anche la matrice A^{k+1}, e gli elementi sulla sua diagonale principale sono uguali a $(a+2)^{k+1}, (b+2)^{k+1}, (c+2)^{k+1}$, nell'ordine. Dunque il determinante della matrice $A^{k+1} - I$ è $\big((a+2)^{k+1} - 1\big)\big((b+2)^{k+1} - 1\big)\big((c+2)^{k+1} - 1\big) \neq 0$. Perciò $A^{k+1} - I$ è invertibile e quindi lo è anche B.

---

8 gennaio 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) **(F)** L'insieme $\mathbb{R}[t]$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra polinomi.

(X) **(F)** Se $A, B \in M_4(\mathbb{R})$ e $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ allora $AB = BA$.

(V) **(X)** Se I è la matrice identica reale $n \times n$, $\det(-I) = -1$.

(X) **(F)** Non esistono sistemi di generatori per lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^7[y]$ (dotato delle usuali operazioni) formati da 7 vettori.

(X) **(F)** Lo spazio vettoriale delle matrici di $M_2(\mathbb{R})$ che hanno tutti gli elementi della diagonale principale nulli ha dimensione 2.

(X) **(F)** Se la somma delle dimensioni di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^5$ è strettamente superiore a 5, i due spazi hanno in comune almeno un vettore non nullo.

(V) **(X)** Qualunque matrice associata ad una trasformazione lineare è quadrata.

(V) **(X)** Se A è una matrice quadrata il rango di A e quello di A^2 sono uguali.

(X) **(F)** Il sistema lineare omogeneo dato dall'equazione $A \cdot {}^t(x_1, \ldots, x_n) = \mathbf{0}$ ($A \in M_n(\mathbb{R})$) ammette soluzioni diverse dal vettore nullo se e solo se $\rho(A) < n$.

(V) **(X)** Ogni sottospazio vettoriale di dimensione 3 dello spazio vettoriale standard $\mathbb{R}^8$ può essere rappresentato da un sistema lineare di 3 equazioni in 8 incognite.

(V) **(X)** Ogni matrice reale invertibile può essere diagonalizzata per similitudine.

(V) **(X)** Ogni polinomio reale è il polinomio caratteristico di almeno una matrice quadrata reale.

(X) **(F)** Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ed il suo complemento ortogonale hanno in comune il solo vettore nullo.

(X) **(F)** Dato l'usuale prodotto vettoriale $\wedge$ in $\mathbb{R}^3$, si ha che $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 2\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$.

(X) **(F)** L'equazione $3x^2 + 2y^2 = 1$ rappresenta una ellisse del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(3 punti)*

Calcolare, al variare del parametro reale t, la dimensione dell'immagine della trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definita da

$$T_t(x,y,z) = \Big((a+1)x,\ x+(b+1)y+tz,\ x+ty+(c+1)z,\ (b+1-t)y+(t-c-1)z\Big).$$

$\boxed{3 \text{ se } t \neq \pm\sqrt{(b+1)(c+1)},\ 2 \text{ altrimenti.}}$

`ESERCIZIO 2` *(4 punti)*

Determinare per quali valori del parametro reale t l'endomorfismo $T_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dato da

$$T_t(x,y,z,u) = \Big((20-a)x+t^2u,\ (10-b)y,\ x-(c+1)z,\ x+y+(20-a)u\Big)$$

ammette una base spettrale.

RISPOSTA: L'endomorfismo T_t è diagonalizzabile se e solo se $t \neq \pm(21-a+c), \pm(10-a+b), 0$.

`ESERCIZIO 3` *(4 punti)*

Calcolare una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard) per il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^4$ dato dal sistema $\begin{cases} (10-a)x = 0 \\ (10-b)y+(c+1)z-u = 0 \end{cases}$ nelle incognite x, y, z, u.

RISPOSTA: una possibile base è data da $\Big((0,1,0,10-b),\ \big(0,-(10-b)^2(c+1),(10-b)+(10-b)^3,(10-b)(c+1)\big)\Big)$.

`ESERCIZIO 4` *(4 punti)*

Dire, MOTIVANDO LA RISPOSTA, se la matrice $B = I+A+A^2+A^3+\ldots+A^k$ è invertibile quando $k = 1.000.000$ e $A = \begin{pmatrix} a+2 & 0 & 0 \\ 1 & b+2 & 0 \\ -2 & 5 & c+2 \end{pmatrix}$. Suggerimento: cercate di scrivere B in modo più semplice e ricordate che la potenza di una matrice triangolare bassa è sempre una matrice triangolare bassa.

RISPOSTA: Dato che $(I+A+A^2+A^3+\ldots+A^k)(A-I) = A^{k+1}-I$ e la matrice $A-I$ è invertibile (infatti $\det(A-I) = (a+1)(b+1)(c+1) \neq 0$) si ha che B è invertibile se e solo se lo è $A^{k+1}-I$. Dato che A è una matrice triangolare bassa lo è anche la matrice A^{k+1}, e gli elementi sulla sua diagonale principale sono uguali a $(a+2)^{k+1}, (b+2)^{k+1}, (c+2)^{k+1}$, nell'ordine. Dunque il determinante della matrice $A^{k+1}-I$ è $\big((a+2)^{k+1}-1\big)\big((b+2)^{k+1}-1\big)\big((c+2)^{k+1}-1\big) \neq 0$. Perciò $A^{k+1}-I$ è invertibile e quindi lo è anche B.

---

8 gennaio 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** **, b=** **, c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (X) Esistono gruppi privi di unità.

(X) (F) Tutti i campi sono anche anelli.

(X) (F) Se $A, B \in M_6(\mathbb{R})$ e B è invertibile allora $A \cdot B = \mathbf{0}$ implica che $A = \mathbf{0}$.

(X) (F) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ è ortogonale.

(X) (F) Il numero di permutazioni su n oggetti è $n!$.

(X) (F) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A^{50} non è invertibile allora anche A non è invertibile.

(V) (X) Se $A = (a^i_j) \in M_n(\mathbb{R})$ e A^i_j indica il complemento algebrico di a^i_j, allora $\det A = \sum_{j=1}^n a^h_j A^j_h$, per ogni $h = 1, \ldots, n$.

(V) (X) L'insieme delle matrici invertibili di ordine n è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

(V) (X) Tutte le basi di uno spazio vettoriale reale di dimensione n contengono esattamente n^2 vettori.

(V) (X) Se $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^7$ è una trasformazione lineare e $\dim \mathrm{Im}T = 2$ allora $\dim \mathrm{Ker}T = 5$.

(V) (X) Unendo due sistemi lineari risolubili si ottiene sempre un sistema lineare risolubile.

(X) (F) L'endomorfismo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $F(x, y, z) = (x+y+z, 2y+2z, 3z)$ è diagonalizzabile per similitudine.

(X) (F) Il prodotto misto di tre vettori uguali di $\mathbb{R}^3$ è sempre nullo.

(X) (F) Se $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (intesi come vettori riga), si ha che $(\mathbf{x} \cdot {}^t\mathbf{y})^2$ è minore uguale del prodotto fra $\mathbf{x} \cdot {}^t\mathbf{x}$ e $\mathbf{y} \cdot {}^t\mathbf{y}$.

(X) (F) I piani di equazioni cartesiane $x = 1$ e $y + z = 3$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(3 punti)*

Calcolare, al variare del parametro reale t, la dimensione dell'immagine della trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T_t(x, y, z, u) = \Big((a+1)x + y + z,\ (b+1)y + tz + (b+1-t)u,\ ty + (c+1)z + (t-c-1)u\Big).$$

$\boxed{3 \text{ se } t \neq \pm\sqrt{(b+1)(c+1)},\ 2 \text{ altrimenti.}}$

`ESERCIZIO 2` *(4 punti)*

Determinare per quali valori del parametro reale t l'endomorfismo $T_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dato da

$$T_t(x, y, z, u) = \Big((20-a)x + z + u,\ (10-b)y + u,\ -(c+1)z,\ t^2x + (20-a)u\Big)$$

ammette una base spettrale.

RISPOSTA: L'endomorfismo T_t è diagonalizzabile se e solo se $t \neq \pm(21-a+c), \pm(10-a+b), 0$.

`ESERCIZIO 3` *(4 punti)*

Calcolare una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard) per il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^4$ dato dal sistema $\begin{cases} (10-a)y = 0 \\ -x + (10-b)z + (c+1)u = 0 \end{cases}$ nelle incognite x, y, z, u.

RISPOSTA: una possibile base è data da $\Big((10-b, 0, 1, 0),\ \big((10-b)(c+1), 0, -(10-b)^2(c+1), (10-b) + (10-b)^3\big)\Big)$.

`ESERCIZIO 4` *(4 punti)*

Dire, MOTIVANDO LA RISPOSTA, se è vero che **per ogni** matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ esiste una matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ tale che $B^k = A$, prima nel caso $k = 2$ e poi nel caso $k = 3$.

RISPOSTA: La risposta è no in entrambi i casi. Per provarlo nel caso $k = 2$ basta prendere una matrice A con determinante negativo (la non esistenza di B è provata dal Teorema di Binet). Nel caso $k = 3$ possiamo considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Posto $B^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si ha che $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dato che B non può essere la matrice nulla (A sarebbe nulla) e le sue colonne sono linearmente dipendenti (infatti il suo determinante è nullo per il Teorema di Binet), le due condizioni $\gamma a + \delta c = 1$ e $\gamma b + \delta d = 0$ implicano che $b = d = 0$. Quindi $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Facendo il calcolo si ottiene che $B^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ a^2c & 0 \end{pmatrix}$. Dovendo essere $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, si ottiene $a = 0$ e dunque $B^3 = \mathbf{0}$, in contraddizione col fatto che $B^3 = A$.

---

8 gennaio 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (X) L'insieme $\mathbb{Z}_n$ delle classi di resto modulo n è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma modulo n se e solo se n è un numero primo.

(V) (X) L'insieme $M_n(\mathbb{R})$ delle matrici quadrate di ordine n è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto tra matrici.

(X) (F) Se $A \in M_4(\mathbb{R})$ è tale che $A^n = I$ (I matrice identica) per ogni numero naturale n, allora $A = I$.

(X) (F) Un insieme di 9 vettori distinti di $\mathbb{R}^9$ è una base di $\mathbb{R}^9$ se e solo se tali vettori sono linearmente indipendenti.

(X) (F) Se due vettori di $\mathbb{R}^5$ hanno le stesse componenti rispetto ad una base ordinata fissata di $\mathbb{R}^5$, coincidono.

(X) (F) Il nucleo di una trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^5$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^8$.

(X) (F) Permutando le righe di una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ si ottiene una matrice che ha lo stesso rango di A.

(X) (F) Un sistema lineare è risolubile se e solo se i ranghi della sua matrice completa e della sua matrice incompleta sono uguali.

(X) (F) La matrice $A = (a^i_j) \in M_{1000}(\mathbb{R})$ definita ponendo $a^i_j = i + j + 1$ è diagonalizzabile per similitudine.

(X) (F) Se due matrici quadrate sono simili hanno lo stesso determinante.

(V) (X) Ogni forma bilineare su $\mathbb{R}^3$ è un prodotto scalare.

(X) (F) La funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $F(x, y, z) = (y, x, z)$ è una trasformazione ortogonale.

(V) (X) Se due piani di $\mathbb{R}^4$ si intersecano, hanno in comune almeno i punti di una retta.

(X) (F) I piani di equazioni cartesiane $x + y + z = 1$ e $2x + 2y + 2z = 3$ sono paralleli nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(X) (F) L'equazione $y = -\frac{1}{2}x^2$ rappresenta una parabola del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 *(3 punti)*

Calcolare, al variare del parametro reale t, la dimensione dell'immagine della trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$T_t(x,y,z,u) = \Big((a+1)x + y + z,\ (b+1)y + tz + (b+1-t)u,\ ty + (c+1)z + (t-c-1)u\Big).$$

$\boxed{3 \text{ se } t \neq \pm\sqrt{(b+1)(c+1)},\ 2 \text{ altrimenti.}}$

ESERCIZIO 2 *(4 punti)*

Determinare per quali valori del parametro reale t l'endomorfismo $T_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dato da

$$T_t(x,y,z,u) = \Big((20-a)x + z + u,\ (10-b)y + u,\ -(c+1)z,\ t^2x + (20-a)u\Big)$$

ammette una base spettrale.

RISPOSTA: L'endomorfismo T_t è diagonalizzabile se e solo se $t \neq \pm(21-a+c), \pm(10-a+b), 0$.

ESERCIZIO 3 *(4 punti)*

Calcolare una base ortogonale (rispetto al prodotto scalare standard) per il sottospazio vettoriale euclideo di $\mathbb{R}^4$ dato dal sistema $\begin{cases} (10-a)y = 0 \\ -x + (10-b)z + (c+1)u = 0 \end{cases}$ nelle incognite x, y, z, u.

RISPOSTA: una possibile base è data da $\Big((10-b,0,1,0),\ \big((10-b)(c+1), 0, -(10-b)^2(c+1), (10-b)+(10-b)^3\big)\Big)$.

ESERCIZIO 4 *(4 punti)*

Dire, MOTIVANDO LA RISPOSTA, se è vero che **per ogni** matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ esiste una matrice $B \in M_2(\mathbb{R})$ tale che $B^k = A$, prima nel caso $k = 2$ e poi nel caso $k = 3$.

RISPOSTA: La risposta è no in entrambi i casi. Per provarlo nel caso $k = 2$ basta prendere una matrice A con determinante negativo (la non esistenza di B è provata dal Teorema di Binet). Nel caso $k = 3$ possiamo considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Posto $B^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ si ha che $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dato che B non può essere la matrice nulla (A sarebbe nulla) e le sue colonne sono linearmente dipendenti (infatti il suo determinante è nullo per il Teorema di Binet), le due condizioni $\gamma a + \delta c = 1$ e $\gamma b + \delta d = 0$ implicano che $b = d = 0$. Quindi $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Facendo il calcolo si ottiene che $B^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ a^2c & 0 \end{pmatrix}$. Dovendo essere $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, si ottiene $a = 0$ e dunque $B^3 = \mathbf{0}$, in contraddizione col fatto che $B^3 = A$.
