9 giugno 2009 - PROVA D'ESAME - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(X) (F) $\mathbb{Z}_2$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(V) (X) Se $A, B \in M_7(\mathbb{R})$ allora ${}^t(A \cdot {}^tB) = {}^tA \cdot B$.

(X) (F) Se $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ e $\det(A^{100} \cdot B^{100}) = 0$ allora $\det(A \cdot B) = 0$

(V) (X) L'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella variabile x di grado multiplo di 4 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$ (rispetto alle usuali operazioni).

(V) (X) Ogni base di uno spazio vettoriale contiene un solo vettore nullo.

(V) (X) Un sistema lineare omogeneo ammette sempre infinite soluzioni.

(X) (F) Un autospazio è sempre uno spazio vettoriale.

(V) (X) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori dello spazio vettoriale euclideo orientato $\mathbb{R}^3$, allora $(\mathbf{u}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{u})$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.

(X) (F) La trasformazione inversa di una isometria dello spazio vettoriale euclideo V è una isometria di V.

(V) (X) L'equazione $x^4 - y^4 = 3$ rappresenta una iperbole del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 1}}$ *(5 punti)*

Si calcoli, al variare del parametro reale t, la dimensione dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$S : \begin{cases} 2x & +3y & -2z & = & t-c+2 \\ (t-a+3)x & +6y & +(a-t+3)z & = & 4 \\ x & +(t-b+1)y & -z & = & 2 \\ -x & +(2t-3)y & +z & = & c-t \end{cases}$$

RISPOSTA: Se $t \neq 1-b, 2+c$ risulta $\rho(A) = 3 \neq 4 = \rho(C)$ e dunque $\mathrm{Sol(S)} = \emptyset$; se $t = 1-b$ o $t = 2+c$ risulta $\rho(A) = \rho(C) = 3$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 0$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 2}}$ *(5 punti)*

Determinare una base spettrale per la matrice $A = \begin{pmatrix} 9-a-c & 2(a+1)(c-10) & 2(a+1)(b+1) \\ -2 & a+c-9 & 2(b+1) \\ 0 & 0 & a-c+11 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: Una base spettrale è data da $\big((a+1,1,0),(b+1,0,1),(c-10,1,0)\big)$ (il primo vettore genera U_{c-a-11}, gli ultimi due generano U_{a-c+11}).

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 3}}$ *(5 punti)*

Fornire una rappresentazione cartesiana del piano π di $\mathbb{R}^3$, ortogonale alla retta $r : x - z + 2 = 0,\ y = 10 - c$ ed equidistante dai punti $P(2a+1, 10-c, 2a+3)$ e $Q(2b-21, 10-c, 2b-19)$.

RISPOSTA: Una rappresentazione cartesiana è $\pi : x + z - 2a - 2b + 18 = 0$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 4}}$ *(5 punti)*

Calcolare l'inversa della seguente matrice A e dire se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine, motivando la risposta:

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & 0 \\ 0 & b-10 & 1 \\ 0 & 1 & 10-c \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1} = \frac{1}{(10-a)\big((b-10)(10-c)-1\big)} \begin{pmatrix} (b-10)(10-c)-1 & 0 & 0 \\ 0 & (10-a)(10-c) & a-10 \\ 0 & a-10 & (10-a)(b-10) \end{pmatrix}$. A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine perché simmetrica.

9 giugno 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (X) L'insieme $\mathbb{N}$ è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

(X) (F) La trasposta di una matrice reale simmetrica $n \times n$ è una matrice simmetrica.

(V) (X) Tutti i sistemi di generatori di uno stesso spazio vettoriale reale hanno lo stesso numero di elementi.

(X) (F) Lo spazio vettoriale delle successioni reali costanti (dotato delle usuali operazioni) ha dimensione 1.

(X) (F) Se due matrici sono una il doppio dell'altra hanno lo stesso rango.

(X) (F) Non esistono sistemi lineari omogenei che non ammettono soluzioni.

(V) (X) Tutte le matrici reali quadrate invertibili sono diagonalizzabili per similitudine.

(X) (F) Esistono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^8$ che hanno la stessa dimensione del proprio complemento ortogonale.

(V) (X) Dato l'usuale prodotto vettoriale $\wedge$ in $\mathbb{R}^3$, si ha che se $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(V) (X) L'equazione $x^2y^2 = 1$ rappresenta una ellisse del piano euclideo standard.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 *(5 punti)*

Si calcoli, al variare del parametro reale t, la dimensione dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$S : \begin{cases} 2x & +3y & -2z & = & t-c+2 \\ (t-a+3)x & +6y & +(a-t+3)z & = & 4 \\ x & +(t-b+1)y & -z & = & 2 \\ -x & +(2t-3)y & +z & = & c-t \end{cases}$$

RISPOSTA: Se $t \neq 1-b, 2+c$ risulta $\rho(A) = 3 \neq 4 = \rho(C)$ e dunque $\mathrm{Sol(S)} = \emptyset$; se $t = 1-b$ o $t = 2+c$ risulta $\rho(A) = \rho(C) = 3$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 0$.

ESERCIZIO 2 *(5 punti)*

Determinare una base spettrale per la matrice $A = \begin{pmatrix} 9-a-c & 2(a+1)(c-10) & 2(a+1)(b+1) \\ -2 & a+c-9 & 2(b+1) \\ 0 & 0 & a-c+11 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: Una base spettrale è data da $\big((a+1,1,0),(b+1,0,1),(c-10,1,0)\big)$ (il primo vettore genera U_{c-a-11}, gli ultimi due generano U_{a-c+11}).

ESERCIZIO 3 *(5 punti)*

Fornire una rappresentazione cartesiana del piano π di $\mathbb{R}^3$, ortogonale alla retta $r : x - z + 2 = 0,\ y = 10 - c$ ed equidistante dai punti $P(2a+1, 10-c, 2a+3)$ e $Q(2b-21, 10-c, 2b-19)$.

RISPOSTA: Una rappresentazione cartesiana è $\pi : x + z - 2a - 2b + 18 = 0$.

ESERCIZIO 4 *(5 punti)*

Calcolare l'inversa della seguente matrice A e dire se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine, motivando la risposta:

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & 0 \\ 0 & b-10 & 1 \\ 0 & 1 & 10-c \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1} = \frac{1}{(10-a)\big((b-10)(10-c)-1\big)} \begin{pmatrix} (b-10)(10-c)-1 & 0 & 0 \\ 0 & (10-a)(10-c) & a-10 \\ 0 & a-10 & (10-a)(b-10) \end{pmatrix}$. A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine perché simmetrica.

9 giugno 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (X) Ogni insieme dotato di due operazioni è un campo.

(X) (F) La potenza k-esima (k intero positivo) di una matrice reale invertibile $n \times n$ è una matrice invertibile.

(V) (X) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è ortogonale.

(X) (F) Se p è una permutazione allora $p \circ p$ è una permutazione pari.

(X) (F) La dimensione dello spazio vettoriale delle matrici reali simmetriche 2×2 è 3.

(X) (F) Se $A = (a^i_j) \in M_n(\mathbb{R})$ e A^i_j indica il complemento algebrico di a^i_j, allora $\det A = \sum_{i=1}^n a^i_j A^i_j$ per ogni j da 1 a n.

(V) (X) L'insieme delle matrici reali $n \times n$ di rango pari è uno spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

(V) (X) La somma di due endomorfismi diagonalizzabili dello spazio vettoriale stardard $\mathbb{R}^3$ è diagonalizzabile.

(X) (F) I polinomi caratteristici delle matrici A e ${}^tA$ coincidono ($A \in M_n(\mathbb{R})$).

(X) (F) I piani di equazioni cartesiane $-x = 1$ e $2y + z = 4$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

`ESERCIZIO 1` *(5 punti)*

Si calcoli, al variare del parametro reale t, la dimensione dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$S : \begin{cases} 2x & +3y & -2z & = & t-c+2 \\ (t-a+3)x & +6y & +(a-t+3)z & = & 4 \\ x & +(t-b+1)y & -z & = & 2 \\ -x & +(2t-3)y & +z & = & c-t \end{cases}$$

RISPOSTA: Se $t \neq 1-b, 2+c$ risulta $\rho(A) = 3 \neq 4 = \rho(C)$ e dunque $\mathrm{Sol(S)} = \emptyset$; se $t = 1-b$ o $t = 2+c$ risulta $\rho(A) = \rho(C) = 3$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 0$.

`ESERCIZIO 2` *(5 punti)*

Determinare una base spettrale per la matrice $A = \begin{pmatrix} 9-a-c & 2(a+1)(c-10) & 2(a+1)(b+1) \\ -2 & a+c-9 & 2(b+1) \\ 0 & 0 & a-c+11 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: Una base spettrale è data da $\big((a+1,1,0),(b+1,0,1),(c-10,1,0)\big)$ (il primo vettore genera U_{c-a-11}, gli ultimi due generano U_{a-c+11}).

`ESERCIZIO 3` *(5 punti)*

Fornire una rappresentazione cartesiana del piano π di $\mathbb{R}^3$, ortogonale alla retta $r : x - z + 2 = 0,\ y = 10 - c$ ed equidistante dai punti $P(2a+1, 10-c, 2a+3)$ e $Q(2b-21, 10-c, 2b-19)$.

RISPOSTA: Una rappresentazione cartesiana è $\pi : x + z - 2a - 2b + 18 = 0$.

`ESERCIZIO 4` *(5 punti)*

Calcolare l'inversa della seguente matrice A e dire se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine, motivando la risposta:

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & 0 \\ 0 & b-10 & 1 \\ 0 & 1 & 10-c \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1} = \frac{1}{(10-a)\big((b-10)(10-c)-1\big)} \begin{pmatrix} (b-10)(10-c)-1 & 0 & 0 \\ 0 & (10-a)(10-c) & a-10 \\ 0 & a-10 & (10-a)(b-10) \end{pmatrix}$. A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine perché simmetrica.

---

9 giugno 2009 - PROVA INTERMEDIA - Geometria e Algebra T

NOME:	
MATRICOLA:	$\Rightarrow$ **a=** , **b=** , **c=**

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.** N.B.: Quando presenti nel testo, i simboli n ed m denotano sempre numeri naturali non nulli.

Stabilire la verità (V) o falsità (F) di ciascuna delle seguenti affermazioni, marcando con una crocetta il simbolo corrispondente. Ogni risposta corretta vale 1 punto, ogni risposta errata -1 punto. La mancata risposta comporta punteggio nullo.

(V) (~~F~~) L'insieme $M_2(\mathbb{R})$ è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

(V) (~~F~~) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ a traccia nulla è una matrice a traccia nulla.

(V) (~~F~~) Se $A, B \in M_5(\mathbb{R})$ hanno rango 5, allora anche $A + B$ ha rango 5.

(~~V~~) (F) Ogni sistema finito di generatori di uno spazio vettoriale V ammette un sottoinsieme che è una base di V.

(~~V~~) (F) L'immagine di una trasformazione lineare $T : V \to W$ contiene sempre il vettore nullo di W.

(~~V~~) (F) Se la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ è diagonalizzabile per similitudine allora anche $-A$ è diagonalizzabile per similitudine.

(~~V~~) (F) Se $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ ammettono entrambe 1 e 2 come autovalori, allora sono simili.

(~~V~~) (F) L'insieme $\{(\cos(-7), \sin(-7)), (\sin(7), \cos(7))\}$ è una base ortonormale dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

(~~V~~) (F) Se due spazi vettoriali reali finitamente generati sono isomorfi hanno la stessa dimensione.

(V) (~~F~~) Le rette di equazioni parametriche $x = t, y = 2t - 1, z = 1$ e $x = -7, y = 2t, z = -t + 5$ sono ortogonali nello spazio euclideo standard $\mathbb{R}^3$.

(girare il foglio)

Svolgere i seguenti esercizi, sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti.

ESERCIZIO 1 *(5 punti)*

Si calcoli, al variare del parametro reale t, la dimensione dello spazio delle soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z:

$$S : \begin{cases} 2x & +3y & -2z & = & t-c+2 \\ (t-a+3)x & +6y & +(a-t+3)z & = & 4 \\ x & +(t-b+1)y & -z & = & 2 \\ -x & +(2t-3)y & +z & = & c-t \end{cases}$$

RISPOSTA: Se $t \neq 1-b, 2+c$ risulta $\rho(A) = 3 \neq 4 = \rho(C)$ e dunque $\mathrm{Sol(S)} = \emptyset$; se $t = 1-b$ o $t = 2+c$ risulta $\rho(A) = \rho(C) = 3$ e dunque $\dim(\mathrm{Sol(S)}) = 0$.

ESERCIZIO 2 *(5 punti)*

Determinare una base spettrale per la matrice $A = \begin{pmatrix} 9-a-c & 2(a+1)(c-10) & 2(a+1)(b+1) \\ -2 & a+c-9 & 2(b+1) \\ 0 & 0 & a-c+11 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: Una base spettrale è data da $\big((a+1,1,0),(b+1,0,1),(c-10,1,0)\big)$ (il primo vettore genera U_{c-a-11}, gli ultimi due generano U_{a-c+11}).

ESERCIZIO 3 *(5 punti)*

Fornire una rappresentazione cartesiana del piano π di $\mathbb{R}^3$, ortogonale alla retta $r : x - z + 2 = 0,\ y = 10 - c$ ed equidistante dai punti $P(2a+1, 10-c, 2a+3)$ e $Q(2b-21, 10-c, 2b-19)$.

RISPOSTA: Una rappresentazione cartesiana è $\pi : x + z - 2a - 2b + 18 = 0$.

ESERCIZIO 4 *(5 punti)*

Calcolare l'inversa della seguente matrice A e dire se A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine, motivando la risposta:

$$A = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & 0 \\ 0 & b-10 & 1 \\ 0 & 1 & 10-c \end{pmatrix}.$$

RISPOSTA: $A^{-1} = \frac{1}{(10-a)\big((b-10)(10-c)-1\big)} \begin{pmatrix} (b-10)(10-c)-1 & 0 & 0 \\ 0 & (10-a)(10-c) & a-10 \\ 0 & a-10 & (10-a)(b-10) \end{pmatrix}$. A^{-1} è diagonalizzabile per similitudine perché simmetrica.