2 luglio 2004

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$.

a) Si consideri una qualunque trasformazione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ *che verifichi contemporaneamente le seguenti proprietà:*

i) $\dim ImT = 2$;

ii) $T(1, 0, 0, 1) = (\alpha, \beta, 0, 0)$.

Si scriva la matrice A associata a T rispetto alle basi canoniche. (5 punti)

b) Si calcoli una base per $\ker T$*. (4 punti)*

2) Si ponga $\gamma = 11 - a$ e $\delta = 11 - b$.

a) Si consideri la trasformazione lineare $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *tale che* $L(0, 0, 2) = (0, 2\delta, 2)$, $L(0, 3, 0) = (3\delta, 3\gamma, 0)$, $L(1, 0, 0) = (\gamma^2, 0, 0)$*. Dire se L ammette una base spettrale motivando la risposta. (5 punti)*

b) Si calcoli una base per il complemento ortogonale del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ *generato dal vettore* $(0, \delta, \gamma)$*. (4 punti)*

SOLUZIONI

1)

a) Si può scegliere la trasformazione lineare $T(x, y, z, t) = (\alpha x, \beta t, 0, 0)$*. In tal caso A è uguale alla matrice*

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Una base per il nucleo di T è $\big((0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\big)$.

2)

a) La matrice associata ad L rispetto alla base naturale è semplicemente

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 & \delta & 0 \\ 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ed il suo polinomio caratteristico è dato da $(t - \gamma^2)(t - \gamma)(t - 1)$*. Abbiamo i tre autovalori distinti* γ^2, γ e 1*, quindi L ammette una base spettrale.*

b) L'equazione del complemento ortogonale cercato è $\delta y + \gamma z = 0$*. Una base è* $\big((1, 0, 0), (0, \gamma, -\delta)\big)$.