2 luglio 2008

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow a = \quad , b = \quad , c =$

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.**

`ESERCIZIO 1` *(3 punti)*

Data la matrice $A_t = \begin{pmatrix} a+1 & 0 & -(a+1) & 2t & 0 & t \\ 10-b & b+1 & b-10 & 0 & c+1 & 0 \\ t & 0 & -t & 2(a+1) & 0 & a+1 \end{pmatrix}$ e considerata la trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^3$ di equazione $(y) = A_t(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \operatorname{Ker} T_t$ e $\dim \operatorname{Im} T_t$ al variare del parametro reale t.

RISPOSTA: Se $t \neq \pm(a+1)$ $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T_t = 3, \dim \operatorname{Im} T_t = 3}$. Se $t = \pm(a+1)$ $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T_t = 4, \dim \operatorname{Im} T_t = 2}$.

`ESERCIZIO 2` *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z ammette soluzione e in tali casi determinare qual è la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} (a+2)x + y + z = t \\ x + (b+2)y + z = 1 \\ x + y + (c+2)z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

RISPOSTA: ammette soluzione se e solo se $t = a + 2$. In tal caso la dimensione dello spazio delle soluzioni è 0 (una sola soluzione).

`ESERCIZIO 3` *(1 punto)*

Si calcoli per quale valore del parametro reale t la seguente matrice **NON** ammette inversa: $\begin{pmatrix} 10-a & t \\ 10-b & 10-c \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $t = \frac{(10-a)(10-c)}{10-b}$.

`ESERCIZIO 4` *(2 punti)*

Trovare una base per lo spazio vettoriale delle matrici X reali 2×2 tali che AX sia la matrice nulla, dove $A = \begin{pmatrix} 10-a & a-10 \\ 5-b & b-5 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

(girare il foglio)

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(3 punti)*

Si calcoli una base spettrale per l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ la cui matrice associata, rispetto alla base canonica, è $\begin{pmatrix} a+1 & 0 & (10-b)^2 \\ 0 & 20-c & 0 \\ 1 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: una possibile base spettrale è $\{(10-b,0,1),(b-10,0,1),(0,1,0)\}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 6}}$ *(1 punto)*

Scrivere le coordinate del vettore $(b+1,0,c+1)$ rispetto alla base $\Big((0,-1,1),(b+1,a+1,c+1),(0,1,0)\Big)$ di $\mathbb{R}^3$.

RISPOSTA: $(0,1,-(a+1))$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 7}}$ *(2 punti)*

Scrivere un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per (a,b,c) e parallela ai due piani di rispettive equazioni cartesiane $(10-a)x+y+z=c+1$ e $(10-a)x+2y+(b+1)z=0$.

RISPOSTA: $\begin{cases} x = & (b-1)t+a \\ y = & -b(10-a)t+b \\ z = & (10-a)t+c \end{cases}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 8}}$ *(3 punti)*

Determinare per quali valori del parametro reale t il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$ è linearmente **dipendente**:

$$\{(a+1,t,b,-c),(1,a+1,2,1),(a+3,0,b+4,2-c)\}.$$

RISPOSTA: $t=-2(a+1)$.
