5/9/2003

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u

$$\begin{cases} & -3y & +12z & +3u & = & 9 \\ (a+1+t)x & -y & +4z & +u & = & 3 \\ (b+1-t)x & +y & +(2b-2t-2)z & -u & = & -3t+3b \\ & -y & +4z & +\big(1-(a+1)t-t^2\big)u & = & 6 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(6 punti)*

b) Si considerino in IR^3 i piani α e β di equazioni cartesiane

$$(a+2)x + (b+12)y + (-a-b-14)z = 0$$

e

$$(b+11)x + (a+1)y + (-a-b-12)z = 1,$$

rispettivamente. Si calcoli una equazione cartesiana della retta r passante per il punto $(0, a, b)$ e parallela ad α ed a β. *(3 punti)*

2) Dato l'endomorfismo T_t da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_t(x)$ dove

$$A_t = \begin{pmatrix} -t & t & 0 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 0 & -t & b-10 \end{pmatrix}$$

a) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice A_t risulta diagonalizzabile per similitudine sul campo dei reali. *(5 punti)*

b) Si scelga un valore $\bar{t}$ per il quale $A_{\bar{t}}$ risulti diagonalizzabile per similitudine e si calcolino una base spettrale per $T_{\bar{t}}$ ed una forma diagonale di $A_{\bar{t}}$. *(4 punti)*

SOLUZIONI

1)

a) Dette rispettivamente A_t e C_t la matrice completa e incompleta del sistema si ha
$\rho(A_t) = 2$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t = -(a+1)$ (nessuna soluzione),
$\rho(A_t) = 3$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t = b+1$ (∞^1 soluzioni),
$\rho(A_t) = 3$ e $\rho(C_t) = 4$ se $t = 0$ (nessuna soluzione),
$\rho(A_t) = \rho(C_t) = 4$ in tutti gli altri casi (una soluzione).

b) L'equazione parametrica di r è $P = t(1,1,1) + (0, a, b)$. Un'equazione cartesiana è data da

$$\begin{cases} x - y + a & = & 0 \\ x - z + b & = & 0 \end{cases}$$

2)

a) Poniamo $\alpha = a + 1$ e $\beta = b - 10$. Il polinomio caratteristico è dato da $(\lambda + t)(\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$. Gli autovalori sono dunque $-t$, α e β. Se $t \neq -\alpha, -\beta$ abbiamo tre autovalori distinti e A_t risulta diagonalizzabile per similitudine. Per $t = -\alpha$ risulta $mg(\alpha) = 1 < ma(\alpha) = 2$ e quindi A_t risulta non diagonalizzabile per similitudine. Per $t = -\beta$ risulta $mg(\beta) = ma(\beta) = 2$ e quindi A_t risulta diagonalizzabile per similitudine.

b) Scelgo $\bar{t} = 0$. Una base spettrale per $T_{\bar{t}}$ è $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$. Una forma diagonale per $A_{\bar{t}}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$