7/1/2003

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u, w

$$\begin{cases} tx + by + z + 2u + w & = & 3 \\ -ax + by + u - w & = & 1 \\ 2by + z + 3u & = & 4 \\ 2ax + z + u + 2w & = & a + 2 - t \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(6 punti)*

b) Si trovi una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ (rispetto al prodotto scalare standard) che contenga il vettore $(10 - a, 10 - b, 1)$. *(3 punti)*

2)

a) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ t & 20 - b & -t \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile per similitudine. *(6 punti)*

b) Calcolare (se esistono) tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ che abbiano tutte le coordinate non negative e siano equidistanti dai quattro piani di equazioni rispettive $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $(a + 1)x + (b + 1)y + z = 0$. (NB: si richiede di motivare esplicitamente il fatto che non ci siano altri punti oltre a quelli trovati) *(3 punti)*

SOLUZIONI

1)

a) Dette rispettivamente A_t e C_t la matrice completa e incompleta del sistema si ha $\rho(A_t) = \rho(C_t) = 2$ se $t = a$, mentre $\rho(A_t) = 3$ e $\rho(C_t) = 4$ se $t \neq a$. Quindi il sistema ammette soluzioni se e solo se $t = a$ e in tal caso la dimensione dello spazio delle soluzioni è $5 - 2 = 3$.

b) Una base come quella richiesta è $B = \big((10 - a, 10 - b, 1), (b - 10, 10 - a, 0), (a - 10, b - 10, (10 - a)^2 + (10 - b)^2)\big)$.

2)

a) Il polinomio caratteristico è dato da $(\lambda - a)(\lambda - 20 + b)(\lambda - t)$. Gli autovalori sono dunque a, $20 - b$ e t.

Se $t \neq a, 20 - b$ i tre autovalori sono distinti e A risulta diagonalizzabile per similitudine.

Se $t = a$ il rango della matrice caratteristica calcolata per $\lambda = a$ risulta uguale a 1 e la dimensione dell'autospazio di a risulta uguale a $3 - 1 = 2$, cosicché A è diagonalizzabile per similitudine.

Se $t = 20 - b$ il rango della matrice caratteristica calcolata per $\lambda = 20 - b$ risulta uguale a 2 e la dimensione dell'autospazio di $20 - b$ risulta uguale a $3 - 2 = 1$, cosicché A non è diagonalizzabile per similitudine.

b) L'unico punto con le caratteristiche richieste è $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, perché è il solo a verificare le condizioni $|x| = |y| = |z| = \frac{|(a+1)x+(b+1)y+z|}{\sqrt{(a+1)^2+(b+1)^2+1}}$ (dato che a e b sono interi fra 0 e 9).