7 aprile 2005

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) Si consideri, per ogni numero reale t, la trasformazione lineare $T_t : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ definita ponendo $T_t(x, y, z, u, v) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ dove

$$\begin{cases} \alpha = x + (10-a)y + z + (a-8)u + (12-a)v \\ \beta = (b+1)x + (b+1)u + (b+1-t)v \\ \gamma = y + 3z + 2u + (4+2t)v \\ \delta = -x + 2y - 3u + (1+t)v \end{cases}$$

a) Calcolare le dimensioni di $Ker\ T_t$ e $Im\ T_t$ al variare del parametro reale t. (5 punti)
b) Calcolare una base di $Im\ T_t$ nel caso $t = 0$. (4 punti)

2) Per ogni valore del parametro reale k si consideri l'endomorfismo $L_k : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $L_k(1, 0) = (k, 20 - b)$, $L_k(0, 1) = (a, 1)$.
a) Dire, motivando la risposta, per quali valori di k l'endomorfismo L_k ammette una base spettrale. (5 punti)
b) Si calcoli, rispetto al riferimento cartesiano naturale, un'equazione cartesiana dell'unico piano di $\mathbf{R}^3$ passante per il punto P di coordinate $(1, 0, 1)$ e ortogonale ai due piani di equazioni rispettive $x + y = a$ e $y - z = b$. (4 punti)

SOLUZIONI
1) Indichiamo con A_t la matrice associata a T_t rispetto alle basi naturali di $\mathbf{R}^5$ ed $\mathbf{R}^4$. Quindi

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 10-a & 1 & a-8 & 12-a \\ b+1 & 0 & 0 & b+1 & b+1-t \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4+2t \\ -1 & 2 & 0 & -3 & 1+t \end{pmatrix}.$$

a) Applicando ad A_t le due trasformazioni colonna $[\mathbf{a}_4 \leftarrow \mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3]$ e $[\mathbf{a}_5 \leftarrow \mathbf{a}_5 - \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3]$ ed eliminando la quarta colonna (che risulta nulla) si ottiene che il rango di A_t coincide con quello della seguente matrice

$$B_t = \begin{pmatrix} 1 & 10-a & 1 & 0 \\ b+1 & 0 & 0 & -t \\ 0 & 1 & 3 & 2t \\ -1 & 2 & 0 & t \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $(2 - 33b + 3ab)t$. Osservando che $2 - 33b + 3ab \neq 0$ per ogni coppia di interi (a, b) e che il rango del minore $C = \begin{pmatrix} b+1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ è 3 si ha che $\dim Im\ T_t = \rho(A_t) = 3$ e $\dim Ker\ T_t = 5 - \rho(A_t) = 2$ per $t = 0$, mentre $\dim Im\ T_t = \rho(A_t) = 4$ e $\dim Ker\ T_t = 5 - \rho(A_t) = 1$ per $t \neq 0$.
b) Una base come quella cercata è data dalle prime tre colonne di A_t: $((1, b+1, 0, -1), (10-a, 0, 1, 2), (1, 0, 3, 0))$.
2)
a) La matrice associata a L_k rispetto alla base naturale è semplicemente

$$\begin{pmatrix} k & a \\ 20-b & 1 \end{pmatrix}$$

ed il suo polinomio caratteristico è dato da $t^2 - (k+1)t + (k - a(20-b))$. Il discriminante risulta uguale a $(k-1)^2 + 4a(20-b)$. Se $a \neq 0$ il discriminante è positivo e il polinomio caratteristico ha due radici distinte per ogni valore di k, quindi esiste sempre una base spettrale. Se $a = 0$ e $k \neq 1$ il polinomio caratteristico ha due radici distinte ed esiste una base spettrale. Se $a = 0$ e $k = 1$ il valore 1 è il solo autovalore ed ha molteplicità geometrica 1, quindi non esiste una base spettrale.
b) Un'equazione del piano cercato è data da $x - y - z = 0$.