7 settembre 2006

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 263571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) *Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = 10 - b$. Data la trasformazione lineare T_t da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_t(x)$ dove*

$$A_t = \begin{pmatrix} t & t & 1 & t(\alpha+1) & t-1 \\ 0 & 1 & 1 & \alpha & 0 \\ -(\alpha+\beta) & 1 & t & -\beta & 1-t \end{pmatrix}$$

a) *Calcolare le dimensioni di $Ker\ T_t$ e $Im\ T_t$ al variare del parametro reale t. (5 punti)*
b) *Calcolare una base di $Ker\ T_t$ nel caso $t = 1$. (4 punti)*

2) *Dato l'endomorfismo T_k da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove*

$$A_k = \begin{pmatrix} b+1 & -k & 1 \\ -k & b+1 & 0 \\ 0 & 0 & a-10 \end{pmatrix}$$

a) *Si dica per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo è diagonalizzabile (5 punti)*
b) *Si ponga $\alpha = 11 - a$ e $\beta = 11 - b$. Sia r la retta di $\mathbb{R}^3$ di equazioni cartesiane $r : x = 1,\ \alpha y - z - \alpha = 0$. Determinare un'equazione cartesiana del piano contenente r e passante per il punto P di coordinate $(0, \beta, 0)$. (4 punti)*

SOLUZIONI:

1a) *$dimIm(T_t) = 2,\ dimKer(T_t) = 3$ per $t = 1, \alpha + \beta$; $dimIm(T_t) = 3,\ dimKer(T_t) = 2$ altrimenti.*

1b) *Base per $Ker(T_1) : (-1, -\alpha, 0, 1, 0), (0, -1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0, 1)$.*

2a) *Si ponga $\alpha = a - 10$ e $\beta = b + 1$. Il polinomio caratteristico è $p(t) = (t - \alpha)((t - \beta)^2 - k^2)$. Gli autovalori sono $\alpha, \beta - k, \beta + k$.*
Se $k \neq 0, \beta - \alpha, \alpha - \beta$ si hanno tre autovalori distinti e quindi A_k è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = 0$ abbiamo che $ma(\beta) = mg(\beta) = 2$ e $ma(\alpha) = mg(\alpha) = 1$ e dunque A_0 è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = \beta - \alpha$ abbiamo che $ma(\alpha) = 2 \neq 1 = mg(\alpha)$ e $ma(\beta + k) = mg(\beta + k) = 1$ e dunque $A_{\beta-\alpha}$ non è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = \alpha - \beta$ abbiamo che $ma(\alpha) = 2 \neq 1 = mg(\alpha)$ e $ma(\beta - k) = mg(\beta - k) = 1$ e dunque $A_{\alpha-\beta}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

2b) *Un'equazione cartesiana per il piano cercato è $\pi : \alpha(1 - \beta)x - \alpha y + z + \alpha\beta = 0$.*