8 settembre 2004

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$. Si consideri la trasformazione lineare $T : \mathbf{R}^5 \to \mathbf{R}^4$ definita ponendo $T(x, y, z, u, v) = ((\alpha + 1)x + \alpha y + 3u + v, (1 - \beta)x - \beta y + \beta z + u + v, -y + 2z + 3u + v, x - y + 3z + 5u + 2v)$.
a) Calcolare le dimensioni di $Ker\ T$ e $Im\ T$. (5 punti)
b) Calcolare una base di $Ker\ T$. (4 punti)

2) Si ponga $\gamma = 10 - a$ e $\delta = 10 - b$. Per ogni valore del parametro reale k si consideri l'endomorfismo $L_k : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $L_k(1, 0) = (\gamma, 1)$, $L_k(0, 1) = (k, \delta)$.
a) Dire, motivando la risposta, per quali valori di k l'endomorfismo L_k ammette una base spettrale. (5 punti)
b) Si calcoli, rispetto al riferimento cartesiano naturale, un'equazione cartesiana dell'unico piano di $\mathbf{R}^3$ passante per il punto P di coordinate $(1, 1, 0)$ e parallelo alle due rette di equazioni $\begin{cases} z = 1 \\ x - \gamma y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 0 \\ \delta x - z = -1 \end{cases}$. (4 punti)

SOLUZIONI

1) Indichiamo con A la matrice associata a T rispetto alle basi naturali di $\mathbf{R}^5$ ed $\mathbf{R}^4$. Quindi

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+1 & \alpha & 0 & 3 & 1 \\ 1-\beta & -\beta & \beta & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Se $a = 1$ e $b = 1$ oppure $a = 2$ e $b = 0$ si ha che $\dim Im\ T = \rho(A) = 3$ e $\dim Ker\ T = 5 - \rho(A) = 2$. Altrimenti si ha che $\dim Im\ T = \rho(A) = 4$ e $\dim Ker\ T = 5 - \rho(A) = 1$. Si ottengono questi risultati riducendo la matrice A con trasformazioni elementari per riga e per colonna. Per esempio, applicando le trasformazioni $[\mathbf{a}_1 \leftarrow \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_5]$, $[\mathbf{a}_2 \leftarrow \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3]$, $[\mathbf{a}^4 \leftarrow \mathbf{a}^4 - 2\mathbf{a}^3]$, $[\mathbf{a}_4 \leftarrow \mathbf{a}_4 - 3\mathbf{a}_5]$, $[\mathbf{a}^4 \leftarrow -\mathbf{a}^4]$, $[\mathbf{a}^2 \leftarrow \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}^4]$, $[\mathbf{a}_3 \leftarrow \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4]$, $[\mathbf{a}^3 \leftarrow \mathbf{a}^3 - \mathbf{a}^1]$, $[\mathbf{a}_2 \leftarrow \mathbf{a}_2 - \alpha\mathbf{a}_5]$, $[\mathbf{a}^2 \leftarrow \mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^1]$, $[\mathbf{a}^2 \leftarrow \mathbf{a}^2 - \mathbf{a}^3]$ si ottiene la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha lo stesso rango di A.
b) Se $a = 1$ e $b = 1$ una base per $Ker\ T$ è data da $B = \{(1, -1, 0, 0, -1), (0, 2, 3, -1, -1)\}$. Se $a = 2$ e $b = 0$ una base per $Ker\ T$ è data da $B = \{(1, -1, 0, 0, -1), (0, 1, 2, -1, 0)\}$. Altrimenti una base per $Ker\ T$ è data da $B = \{(1, -1, 0, 0, -1)\}$. Per trovare queste basi basta risolvere il sistema $A\ {}^t(x, y, z, u, v) = (0, 0, 0, 0)$.

2)
a) La matrice associata a L_k rispetto alla base naturale è semplicemente

$$\begin{pmatrix} \gamma & k \\ 1 & \delta \end{pmatrix}$$

ed il suo polinomio caratteristico è dato da $t^2 - t(\gamma + \delta) + (\gamma\delta - k)$. Il discriminante del polinomio è $(\gamma - \delta)^2 + 4k$. Quindi per $k < -(\gamma - \delta)^2/4$ non ci sono autovalori ed L_k non ammette alcuna base spettrale. Se $k > -(\gamma - \delta)^2/4$ ci sono due autovalori distinti e dunque L_k ammette una base spettrale. Se $k = -(\gamma - \delta)^2/4$ c'è il solo autovalore $(\gamma + \delta)/2$ ed ha molteplicità geometrica 1, dunque L_k non ammette alcuna base spettrale.
b) Risolvendo i sistemi lineari omogenei associati si ricavano i coefficienti direttori delle due rette: $(\gamma, 1, 0)$ e $(1, 0, \delta)$. Un'equazione del piano cercato è pertanto data da

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ \gamma & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \delta \end{vmatrix} = 0$$

cioè $\delta x - \gamma\delta y - z + (\gamma - 1)\delta = 0$.