9 gennaio 2008

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow a = \quad , b = \quad , c =$

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.**

`ESERCIZIO 1` *(3 punti)*

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & b+1 & 0 & c+1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 10-a & 10-b & 0 & 10-c \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e considerata la trasformazione lineare $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ di equazione $(y) = A(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \operatorname{Ker} T$ e $\dim \operatorname{Im} T$.

RISPOSTA: $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T = 0, \dim \operatorname{Im} T = 4}$ per $b \neq c$, $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T = 1, \dim \operatorname{Im} T = 3}$ per $b = c$.

`ESERCIZIO 2` *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, u, w ammette soluzione:

$$\begin{cases} (c+1)x + cy + tz - cu = 4 - c \\ (b+1)x - z + 2w = 0 \\ (c-b)x - ty + (1-c)z + tu - 2w = 2 + t \end{cases}$$

RISPOSTA: ammette soluzione se e solo se $t \neq -c$.

`ESERCIZIO 3` *(1 punto)*

Si calcoli (rispetto al riferimento cartesiano naturale) una rappresentazione cartesiana nelle incognite x, y, z, u per il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ dato dalla chiusura lineare dell'insieme $\{(a+1, b, 0, 1), (0, 10-b, 1, 2), (a+1, 10, 1, 10-c)\}$.

RISPOSTA: $bx - (a+1)y + (a+1)(10-b)z = 0$ se $c \neq 7$, $\begin{cases} bx - (a+1)y + (a+1)(10-b)z = 0 \\ x + 2(a+1)z - (a+1)u = 0 \end{cases}$ se $c = 7$.

`ESERCIZIO 4` *(1 punto)*

Si calcoli una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ che ha (rispetto al riferimento cartesiano naturale) equazione cartesiana $\begin{cases} (a+1)z + (10-b)u = 0 \\ (10-c)x - (10-b)y = 0 \end{cases}$ nelle incognite x, y, z, u.

RISPOSTA: $\{(10-b, 10-c, 0, 0), (0, 0, 10-b, -(a+1))\}$.

`ESERCIZIO 5` *(1 punto)*

Si trovi una forma diagonale per la matrice simmetrica $\begin{pmatrix} -b & 1-a-c \\ 1-a-c & b \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} \sqrt{b^2 + (1-a-c)^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{b^2 + (1-a-c)^2} \end{pmatrix}$.

(girare il foglio)

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 6}}$ *(3 punti)*

Si dica per quali valori del parametro reale k (se ve ne sono) la matrice $\begin{pmatrix} k & k-(c+1) & a+1 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & (c+1)-k & b+1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine.

RISPOSTA: Se $b \neq c$ la matrice è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $k = c+1$ oppure $k = a+b+2$. Se $b = c$ la matrice è diagonalizzabile per similitudine se e solo se $k = a+b+2$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 7}}$ *(1 punto)*

Scrivere le coordinate del vettore $(a+1, b+1, 0)$ rispetto alla base $\Big((a+1, b+1, c+1), (0,1,1), (0,0,-1)\Big)$ di $\mathbb{R}^3$.

RISPOSTA: $(1, 0, c+1)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 8}}$ *(2 punti)*

Scrivere un'equazione parametrica della retta r passante per il punto $(0,0,0)$ e parallela ai piani di rispettive equazioni cartesiane $(10-b)x - y + (b-c)z + a = 0$ e $(10-a)x - z + b = 0$ (rispetto al riferimento cartesiano naturale di $\mathbb{R}^3$).

RISPOSTA: $\begin{cases} x = t \\ y = \Big((10-b) + (b-c)\cdot(10-a)\Big)t \\ z = (10-a)t \end{cases}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 9 (se } a \texttt{ è pari)}}$ *(3 punti)*

Siano A una matrice reale $n \times n$ e I la matrice identica $n \times n$. Dimostrare che se la matrice $A - I$ non è invertibile allora non lo è neppure la matrice $A^{100} - I$.

DIMOSTRAZIONE: Si ha che $A^{100} - I = (I + A + A^2 + A^3 + \ldots + A^{99}) \cdot (A - I)$ e quindi, per il Teorema di Binet, $\det(A-I) = 0$ implica $\det(A^{100} - I) = 0$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 9 (se } a \texttt{ è dispari)}}$ *(3 punti)*

Siano I la matrice identica $n \times n$ e A una matrice reale $n \times n$ tale che $A^2 = I$. Dimostrare che se $A \neq I$ allora $A + I$ non è regolare.

DIMOSTRAZIONE: Si ha che $A + I = A + A^2 = A \cdot (I + A) = A \cdot (A + I)$. Se $A + I$ fosse regolare sarebbe invertibile ed avremmo $A = A \cdot I = A \cdot \Big((A+I)\cdot(A+I)^{-1}\Big) = \Big(A \cdot (A+I)\Big)\cdot(A+I)^{-1} = (A+I)\cdot(A+I)^{-1} = I$, contro l'ipotesi.
