9/4/2003

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango). Non consegnare alcun altro foglio.*

1) Data la trasformazione lineare T_γ da $I\!R^4$ a $I\!R^3$ di equazione matriciale $(y) = A_\gamma(x)$ dove

$$A_\gamma = \begin{pmatrix} a+1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & b+1 & \gamma & \gamma \\ \gamma & 1 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

a) Si calcolino le dimensioni di $Ker\ T_\gamma$ e $Im\ T_\gamma$ al variare del parametro reale γ. *(5 punti)*
b) Si calcoli una base per il nucleo di T_γ nel caso $\gamma = 0$. *(4 punti)*

1) Dato l'endomorfismo T_t da $I\!R^3$ a $I\!R^3$ di equazione matriciale $(y) = A_t(x)$ dove

$$A_t = \begin{pmatrix} 10-a & 0 & t \\ 0 & 20 & 0 \\ 1 & 0 & 10-b \end{pmatrix}$$

a) Si dica per quali valori del parametro reale t la matrice A_t risulta diagonalizzabile per similitudine sul campo dei reali. *(5 punti)*
b) Si scelga un valore $\bar{t}$ per il quale $A_{\bar{t}}$ risulti diagonalizzabile per similitudine e si calcolino una base spettrale per $T_{\bar{t}}$ ed una forma diagonale di $A_{\bar{t}}$. *(4 punti)*

Soluzione di 1)a
$dimIm(T_\gamma) = 3, dimKer(T_\gamma) = 1$ per $\gamma \neq 0, a+b+2$
$dimIm(T_\gamma) = 2, dimKer(T_\gamma) = 2$ altrimenti

Soluzione di 1)b
Base per $KerT_0$: $((1, 0, -(a+1), 0), (0, 0, -(a+2), 1))$

Soluzione di 2)a
Per $t > -(b-a)^2/4$ ci sono tre autovalori distinti e dunque la matrice e' diagonalizzabile per similitudine.

Per $t = -(b-a)^2/4$ c'e' un autovalore $((20-a-b)/2)$ di molteplicita' algebrica 2 e molteplicita' geometrica 1, e dunque la matrice non e' diagonalizzabile per similitudine.

Per $t < -(b-a)^2/4$ c'e' un solo autovalore (20) ed ha molteplicita' algebrica 1, dunque la matrice non e' diagonalizzabile per similitudine.

Soluzione di 2)b
Scelgo $\bar{t} = 0$. Una base spettrale per $T_{\bar{t}}$ e' $(((b-a), 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$. Una forma diagonale per $A_{\bar{t}}$ e'

$$\begin{pmatrix} 10-a & 0 & t \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 10-b \end{pmatrix}.$$