10 settembre 2007 Nome: Num. Matricola: a= b=

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 263571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) *Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Data la trasformazione lineare T_t da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ di equazione matriciale $(y) = A_t(x)$ dove*

$$A_t = \begin{pmatrix} -\beta & -3 & -\alpha & 1 \\ -4 & (t-2\alpha) & -(2t+\beta) & 0 \\ (t-2\alpha+\beta) & 3 & \alpha & -1 \\ 2 & 0 & (t+\frac{\beta}{2}) & 0 \end{pmatrix}$$

a) *Calcolare le dimensioni di $Ker\ T_t$ e $Im\ T_t$ al variare del parametro reale t. (6 punti)*
b) *Calcolare una base di $Im\ T_t$ nel caso $t = 2\alpha$. (3 punti)*

2) *Si ponga $\alpha = a + 1$ e $\beta = b + 1$. Dato l'endomorfismo T_k da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A_k(x)$ dove*

$$A_k = \begin{pmatrix} (\alpha-k) & -(k+\beta) & 0 \\ 0 & (\alpha+\beta) & 0 \\ (2k-\alpha) & -(k+\beta) & k \end{pmatrix}$$

a) *Si determini per quali valori del parametro reale k l'endomorfismo T_k è diagonalizzabile per similitudine. (6 punti)*
b) *Scrivere un'equazione cartesiana del piano di $\mathbb{R}^3$ parallelo alla retta $r : x = 1,\ y = \beta t,\ z = -t$, ortogonale al piano $\pi : \alpha x + z + 1 = 0$ e passante per il punto P di coordinate $(0, 0, \alpha+\beta)$, rispetto al riferimento cartesiano naturale. (3 punti)*

SOLUZIONI:

(1a)
dim $Im(T_t) = 2$, dim $Ker(T_t) = 2$ per $t = 2\alpha$
dim $Im(T_t) = 3$, dim $Ker(T_t) = 1$ per $t = -\frac{\beta}{2}$
dim $Im(T_t) = 4$, dim $Ker(T_t) = 0$ altrimenti

(1b)
Una possibile base per $Im\ T_{2\alpha}$ è $B = \{(-\beta, -4, \beta, 2), (-3, 0, 3, 0)\}$;

(2a)
Il polinomio caratteristico è $p(t) = (t - (\alpha - k))(t - (\alpha + \beta))(t - k)$. Gli autovalori sono $\alpha - k, \alpha + \beta, k$.
Se $k \neq -\beta, \frac{\alpha}{2}, \alpha + \beta$ abbiamo tre autovalori distinti e quindi T_k è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = -\beta$ abbiamo che $ma(-\beta) = mg(-\beta) = 1$ e $ma(\alpha + \beta) = mg(\alpha + \beta) = 2$ e dunque $A_{-\beta}$ è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = \frac{\alpha}{2}$ abbiamo che $ma(\alpha + \beta) = mg(\alpha + \beta) = 1$ e $ma(\frac{\alpha}{2}) = mg(\frac{\alpha}{2}) = 2$ e dunque $A_{\frac{\alpha}{2}}$ è diagonalizzabile per similitudine.
Se $k = \alpha + \beta$ abbiamo che $ma(-\beta) = mg(-\beta) = 1$ e $ma(\alpha + \beta) = 2 \neq 1 = mg(\alpha + \beta)$ e dunque $A_{\alpha+\beta}$ non è diagonalizzabile per similitudine.

(2b)
Una possibile rappresentazione cartesiana del piano cercato è $\pi : \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} - z + \alpha + \beta = 0$.