10 settembre 2008

NOME:
MATRICOLA: $\Rightarrow a = \quad , b = \quad , c =$

Sostituire ai parametri a, b, c rispettivamente la terzultima, penultima e ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 330257; $a = 2$, $b = 5$, $c = 7$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio, scrivendo SOLO le risposte richieste. Non consegnare alcun altro foglio.**

`ESERCIZIO 1` *(3 punti)*

Data la matrice $A_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & a+4-t & 6 & t-b-1 \\ c+1 & c+2 & 2c+2 & 1 \end{pmatrix}$ e considerata la trasformazione lineare $T_t : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ di equazione $(y) = A_t(x)$ rispetto alle basi canoniche, calcolare $\dim \operatorname{Ker} T_t$ e $\dim \operatorname{Im} T_t$ al variare del parametro reale t.

RISPOSTA: Se $t \neq \frac{a+b+2}{2}$ $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T_t = 1, \dim \operatorname{Im} T_t = 3}$. Se $t = \frac{a+b+2}{2}$ $\boxed{\dim \operatorname{Ker} T_t = 2, \dim \operatorname{Im} T_t = 2}$.

`ESERCIZIO 2` *(3 punti)*

Dire per quali valori del parametro reale t il seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z, u ammette soluzione e in tali casi determinare qual è la dimensione dello spazio delle soluzioni:

$$\begin{cases} 2tx + (a+1)y + z + tu = 2(a+1) \\ y - z = 1 - (a+1) \\ 2x + z + u = 10 - b \end{cases}$$

RISPOSTA: se $a + b \neq 9$ il sistema ammette soluzione se e solo se $t \neq a + 2$ e in tal caso la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1. Se $a + b = 9$ il sistema ammette sempre soluzione e la dimensione dello spazio delle soluzioni è 1 per $t \neq a + 2$ e 2 per $t = a + 2$.

`ESERCIZIO 3` *(2 punti)*

Si calcoli l'inversa della seguente matrice: $\begin{pmatrix} a+1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

RISPOSTA: $\begin{pmatrix} \frac{1}{a+1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{(a+1)(b+1)} & \frac{1}{b+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c+1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c+1} & 1 \end{pmatrix}$.

`ESERCIZIO 4` *(2 punti)*

Trovare una base per il complemento ortogonale in $\mathbb{R}^3$ del sottospazio generato dal vettore $(10 - b, c + 1, -1)$.

RISPOSTA: una possibile base è $B = ((1, 0, 10 - b), (0, 1, c + 1))$.

(girare il foglio)

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 5}}$ *(3 punti)*

Si dica per quali valori del parametro reale k la matrice $\begin{pmatrix} -(a+1) & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & b+1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile per similitudine.

RISPOSTA: $k \neq b+1$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 6}}$ *(1 punto)*

Scrivere le coordinate del vettore $(a+1, b+1, c+1)$ rispetto alla base $\big((a+1, b+1, 0), (a+1, 0, c+1), (0, b+1, c+1)\big)$ di $\mathbb{R}^3$.

RISPOSTA: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 7}}$ *(2 punti)*

Scrivere un'equazione parametrica della retta di $\mathbb{R}^3$ passante per $(-a, -b, -c)$ e parallela ai due piani di rispettive equazioni cartesiane $y + (10-b)z = c+1$ e $x + (a+1)y = 100$.

RISPOSTA: $\begin{cases} x = & (a+1)(10-b)t - a \\ y = & -(10-b)t - b \\ z = & t - c \end{cases}$.

$\boxed{\texttt{ESERCIZIO 8}}$ *(2 punti)*

Determinare per quali valori del parametro reale t il seguente sottoinsieme di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è linearmente **dipendente**:

$$\left\{ \begin{pmatrix} t & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10-c & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} \right\}.$$

RISPOSTA: $t = 1 - 2\frac{10-c}{a+1}$.
