11/12/2003

Sostituire ai parametri b ed a rispettivamente l'ultima e la penultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 63571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1)

a) Discutere il seguente sistema lineare nelle incognite reali x, y, z, u, v

$$\begin{cases} 4x & +3y & & +2u & +2v & = & t-a \\ 2x & +2y & & +(t+b-1)u & -2v & = & -2 \\ 4x & +3y & +(t-a-1)(t+b+1)z & +2u & +2v & = & 1 \\ x & +y & & +(t+b)u & -v & = & -1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale t, dicendo per quali valori di t esistono soluzioni e qual è, nei vari casi, la dimensione dello spazio delle soluzioni. *(6 punti)*

b) Si considerino in $I\!R^3$ i piani α e β di equazioni cartesiane $(10-a)x-(10-b)y+z=1$ e $(10-b)x+(10-a)y=2$, rispettivamente (rispetto al riferimento cartesiano naturale). Se a è pari si calcoli una equazione cartesiana del piano passante per $(0,0,0)$, ortogonale alla retta intersezione di α e β. Se a è dispari si determini un'equazione parametrica della retta passante per $(0,0,0)$ e parallela sia ad α che a β. *(3 punti)*

2) Dato l'endomorfismo T_t da $I\!R^4$ a $I\!R^4$ di equazione matriciale $(y) = A_t(x)$ dove

$$A_t = \begin{pmatrix} t-(10-a) & -(10-a) & 0 & 0 \\ -(10-a) & t-(10-a) & 0 & 0 \\ 1 & -1 & t-(10-a)-(10-b) & a-b \\ 1 & -1 & a-b & t-(10-a)-(10-b) \end{pmatrix}$$

a) Discutere la diagonalizzabilità di T_t al variare del parametro reale t. *(6 punti)*

b) Se a è pari si calcoli la dimensione di ${}^{\perp}U$ sapendo che il sottospazio vettoriale $U \subset I\!R^4$ è generato dai tre vettori $(12-a, 4, b, 3), (0, 2, b, 1), (a, 1, 0, 1)$.

Se a è dispari si calcoli l'area del triangolo di vertici $(10-a, 1, 0), (0, 2, b+1), (0, 1, 1)$ in $I\!R^3$. *(3 punti)*

SOLUZIONI

11/12/2003

1)

a) Dette rispettivamente A_t e C_t la matrice completa e incompleta del sistema si ha
$\rho(A_t) = 3$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t = a + 1$ ($\dim Sol(S) = 5 - 3 = 2$),
$\rho(A_t) = 2$ e $\rho(C_t) = 3$ se $t = -(b + 1)$ (nessuna soluzione),
$\rho(A_t) = \rho(C_t) = 4$ in tutti gli altri casi ($\dim Sol(S) = 5 - 4 = 1$).

b) Caso a pari: la giacitura del piano cercato è generata dai vettori $((10 - a), -(10 - b), 1)$ e $((10 - b), (10 - a), 0)$. Quindi un'equazione parametrica del piano è

$$\begin{cases} x & = & (10-a)\alpha + (10-b)\beta \\ y & = & -(10-b)\alpha + (10-a)\beta \\ z & = & \alpha \end{cases}$$

ed una sua equazione cartesiana è $(10 - a)x - (10 - b)y - [(10 - a)^2 + (10 - b)^2]z = 0$.
Caso a dispari: se (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) è una terna di coefficienti direttori per la retta cercata si ha che

$$\begin{cases} (10-a)\ell_1 - (10-b)\ell_2 + \ell_3 = 0 \\ (10-b)\ell_1 + (10-a)\ell_2 = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} \ell_1 & = & (10-a)t \\ \ell_2 & = & -(10-b)t \\ \ell_3 & = & -[(10-a)^2 + (10-b)^2]t \end{cases} .$$

Scegliendo $t = 1$ si ottiene $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = ((10 - a), -(10 - b), -[(10 - a)^2 + (10 - b)^2])$. Un'equazione parametrica della retta cercata è dunque

$$\begin{cases} x & = & (10-a)\lambda \\ y & = & -(10-b)\lambda \\ z & = & -[(10-a)^2 + (10-b)^2]\lambda \end{cases} .$$

2)

a) Poniamo $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Il polinomio caratteristico è dato da $[(\lambda + \alpha - t)^2 - \alpha^2][(\lambda + \alpha + \beta - t)^2 - (\alpha - \beta)^2]$. Gli autovalori sono dunque t, $t - 2\alpha$ e $t - 2\beta$. Se $\alpha \neq \beta$ si ha $ma(t) = mg(t) = 1$, $ma(t - 2\alpha) = mg(t - 2\alpha) = 2$, $ma(t - 2\beta) = mg(t - 2\beta) = 1$ per ogni valore di t. Se $\alpha = \beta$ si ha $ma(t) = mg(t) = 1$ e $ma(t - 2\alpha) = mg(t - 2\alpha) = 3$ per ogni valore di t.
Quindi A_t risulta diagonalizzabile per similitudine per ogni valore di t.

b) Caso a pari: $\dim^\perp U = 4 - \dim U$. Poiché $\dim U = 3$ per $a \neq 4$ e $\dim U = 2$ per $a = 4$, si ha che $\dim^\perp U = 1$ per $a \neq 4$ e $\dim^\perp U = 2$ per $a = 4$.
Caso a dispari: l'area cercata è $\frac{1}{2}\|\big((10 - a, 1, 0) - (0, 1, 1)\big) \wedge \big((0, 2, b + 1) - (0, 1, 1)\big)\| = \frac{1}{2}\sqrt{(10 - a)^2(b^2 + 1) + 1}$.