16/01/2012 Num. Matr. ....

Sostituire ai parametri a e b rispettivamente la penultima e l'ultima cifra del proprio numero di matricola (es.: numero 693571; $a = 7$, $b = 1$). **Rispondere UNICAMENTE su questo foglio**, *sintetizzando le motivazioni dei risultati ottenuti (es.: indicare i minori considerati nel calcolo di un rango).* **Non consegnare alcun altro foglio.**

1) Si consideri la trasformazione lineare $T_k : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ canonicamente associata alla matrice

$$A_k = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & k+b+3 & k+b+4 & 1 \\ 0 & k-(a+1) & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare le dimensioni di $\operatorname{Ker} T_k$ e $\operatorname{Im} T_k$ al variare del parametro reale k. *(4 punti)*
b) Posto $k = -1-b$, calcolare una base per $\operatorname{Ker} T_{-1-b}$ *(3 punti)* ed una per $\operatorname{Im} T_{-1-b}$. *(2 punti)*

2) Si ponga $\alpha = 10 - a$ e $\beta = 10 - b$. Dato l'endomorfismo $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ di equazione matriciale $(y) = A(x)$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & -\alpha \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a) Calcolare gli autovalori di F. *(3 punti)*
b) Provare che F è diagonalizzabile per similitudine. *(2 punti)*
c) Fornire una rappresentazione parametrica della retta r passante per il punto $P_1 = (\alpha+\beta, 0, 0)$ e per il punto P dato dalla proiezione ortogonale di $P_2 = (\alpha+\beta, 2, 0)$ sul piano $\pi : (\alpha+\beta)x + y - z = 0$. *(4 punti)*

SOLUZIONI

1)
a) Se $k \neq -1-b$ allora $\rho(A_k) = 3$, dunque $\dim \operatorname{Im} T_k = 3$ e $\dim \operatorname{Ker} T_k = 1$. Se $k = -1-b$ allora $\rho(A_{-1-b}) = 2$, dunque $\dim \operatorname{Im} T_{-1-b} = 2$ e $\dim \operatorname{Ker} T_{-1-b} = 2$.
b) Una base per $\operatorname{Ker} T_{2-b}$ è $\{(4, 0, 1, 1), (-a-b, 1, 0, -2-a-b)\}$. Una base per $\operatorname{Im} T_{2-b}$ è $\{(-1-1-0), (1, 1, -1)\}$.

2)
a) Gli autovalori di F sono $\beta, -\beta$.
b) Vale che $mg(-\beta) = 1$ e $mg(\beta) = 2$. Dunque la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di F è pari a 3, e quindi F è diagonalizzabile.
c) Si ha che $P = (0, 1, 1)$. Una possibile rappresentazione parametrica della retta cercata è $r : x = (\alpha+\beta)t + \alpha + \beta, y = -t, z = -t$.